2. OSNOVE DISKRETNE TEORIJE VJEROJATNOSTI

2.1. SLUČAJNI POKUS. ELEMENTARNI DOGAĐAJI I DOGAĐAJI. KLASIČNA DEFINICIJA VJEROJATNOSTI.

2.1.1. SLUČAJNI POKUS

- Svaki *pokus* čiji ishod nije unaprijed određen (pod uvjetima u kojima se pokus provodi) nazivamo *slučajni pokus*.
- Primjeri slučajnih pokusa:
- nenamještena nogometna utakmica u 1. kolu HNL;
- ukupno trajanje rada nekoga uređaja sve do pojave prvoga kvara (zaokruženo na najbliži nenegativan cijeli broj sati);
- izvlačenje u jednom kolu igre LOTO 7/35;
- prosidba;
- bacanje simetričnoga novčića;
- bacanje simetrične igraće kocke;
- (sve do primjene ultrazvuka) rođenje djeteta.

2.1.1. SLUČAJNI POKUS

- Primjeri ne-slučajnih ili *determinističkih* pokusa čiji su rezultati jednoznačno određeni uz uvjete pod kojima se provodi pokus:
- zagrijavanje vode na 100°C;
- prinošenje upaljene šibice suhom listu papira;
- okomiti hitac (uvis ili prema dolje);
- izlazak na ispit iz *Vjerojatnosti i statistike* bez prethodnoga učenja gradiva.

2.1.2. ELEMENTARNI DOGAĐAJI

- Svaki pojedini ishod slučajnoga pokusa zovemo *elementarni događaj* i označavamo s ω.
- Skup svih elementarnih događaja označavamo s Ω i nazivamo *prostor elementarnih događaja*.
- Prostor elementarnih događaja Ω ima svojstva:
- *Nikoja dva elementa nisu međusobno jednaka.*
- *Svaka izvedba slučajnoga pokusa kao ishod ima* točno jedan *element skupa* Ω.
- Zavisno o vrsti slučajnoga pokusa, skup Ω može biti *konačan* ili *beskonačan.*

2.1.3. ALGEBRA DOGAĐAJA

- Neka je $\mathbf{\Omega}$ prostor elementarnih događaja.
- Promatramo skup $\mathcal{F}$ podskupova skupa $\mathbf{\Omega}$ koji ima sljedeća svojstva:
  - $\varnothing \in \mathcal{F}$;
  - $\Omega \in \mathcal{F}$;
  - $(A, B \in \mathcal{F}) \Rightarrow (A \cup B \in \mathcal{F})$;
  - $(A \in \mathcal{F}) \Rightarrow (A^{\mathrm{C}} \in \mathcal{F})$.
- Skup $\mathcal{F}$ nazivamo *algebra događaja*.
- Elemente skupa $\mathcal{F}$ nazivamo *događaji*.

2.1.4. DOGAĐAJI

- Kao standardnu algebru događaja uzimamo *partitivni skup* skupa $\mathbf{\Omega}$, odnosno skup čiji su elementi svi podskupovi skupa $\mathbf{\Omega}$.
- Taj skup označavamo s $\mathcal{P}(\mathbf{\Omega})$.
- Tako intuitivno možemo reći da je *događaj* bilo koji podskup skupa $\mathbf{\Omega}$.
- Ako je $\mathbf{\Omega}$ konačan skup, onda je svaki podskup skupa $\mathbf{\Omega}$ ujedno i događaj (tj. vrijedi ekvivalencija: *biti događaj* $\Leftrightarrow$ *biti podskup skupa* $\mathbf{\Omega}$).
- Ako je $\mathbf{\Omega}$ beskonačan skup, gornja ekvivalencija ne mora vrijediti (tj. mogu postojati pravi podskupovi skupa $\mathbf{\Omega}$ koji nisu događaji).

2.1.5. OPERACIJE S DOGAĐAJIMA

- Uobičajene operacije sa skupovima i njihovi rezultati ovdje imaju svoja “posebna imena”.
- Skup $\mathbf{\Omega}$ (kao element algebre događaja $\mathcal{F}$) nazivamo *siguran događaj*. Taj će se događaj ostvariti pri *bilo kojem* izvođenju slučajnoga pokusa.
- Oprez: Razlikujte $\mathbf{\Omega}$ kao prostor elementarnih događaja i $\mathbf{\Omega}$ kao događaj!
- Prazan skup $\varnothing$ (kao element familije $\mathcal{F}$) nazivamo *nemoguć događaj*. Taj se događaj neće ostvariti ni u jednom izvođenju slučajnoga pokusa.

2.1.5. OPERACIJE S DOGAĐAJIMA

- Događaj $A \cup B$, gdje su A, $B \in \mathcal{F}$, naziva se *zbroj događaja* A i B, te se označava s $A + B$.
- Taj će se događaj ostvariti pri izvedbi slučajnoga pokusa ako i samo ako se pri izvedbi toga pokusa ostvari *barem jedan* od događaja A i B.
- Događaj $A \cap B$, gdje su A, $B \in \mathcal{F}$, naziva se *umnožak događaja* A i B, te se označava s $A \cdot B$.
- Taj će se događaj ostvariti pri izvedbi slučajnoga pokusa ako i samo ako se pri izvedbi toga pokusa *istovremeno* ostvare događaj A i događaj B.

2.1.5. OPERACIJE S DOGAĐAJIMA

- Ako vrijedi inkluzija $A \subset B$, onda kažemo da događaj A *povlači* događaj B.
- To znači da će se događaj B dogoditi ako se dogodio događaj A.
- Događaj $A \backslash B$ naziva se *razlika događaja* A i B. On se označava s $A-B$.
- Taj će se događaj dogoditi ako se dogodio događaj A, a nije se dogodio događaj B.
- Događaj $\Omega \backslash A$ nazivamo *događaj suprotan događaju* A i označavamo s A^C ili $-A$.
- Taj će se događaj dogoditi ako se nije dogodio događaj A.

2.1.5. OPERACIJE S DOGAĐAJIMA

- Ako vrijedi jednakost $A = B$, kažemo da su događaji A i B *jednaki*.
- Ako vrijedi jednakost $A \cap B = \emptyset$ (tj. ako su A i B disjunktni kao skupovi), kažemo da su događaji A i B *disjunktni* ili da se događaji A i B *međusobno isključuju*.
- To znači da će se događaj A dogoditi ako i samo ako se neće dogoditi događaj B.
- Bilo koja dva *elementarna* događaja se uvijek međusobno isključuju.

2.1.6. VJEROJATNOST

- Neka su $\mathbf{\Omega}$ prostor elementarnih događaja i $\mathcal{F}$ pripadna algebra događaja (npr. $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\mathbf{\Omega})$).
- Svako preslikavanje $P : \mathcal{F} \to [0,\ 1]$ koje ima svojstva:
- P1. $P(\varnothing) = 0$;
- P2. $P(\Omega) = 1$;
- P3. $(A \subset B) \Rightarrow (P(A) \leq P(B))$ (tzv. svojstvo *monotonosti*)
- P4. $(A \cdot B = \varnothing) \Rightarrow (P(A + B) = P(A) + P(B))$ (tzv. svojstvo *aditivnosti*)
- naziva se *vjerojatnost* (na algebri događaja $\mathcal{F}$).
- Realan broj $P(A)$ nazivamo *vjerojatnost događaja A*.
- Uređenu trojku $(\mathbf{\Omega}, \mathcal{F}, P)$ nazivamo *vjerojatnosni prostor*.
- Ako je $\mathbf{\Omega}$ konačan skup, riječ je o *konačnom* vjerojatnosnom prostoru.
- Ako je $\mathbf{\Omega}$ beskonačan skup, riječ je o *beskonačnom* vjerojatnosnom prostoru.

2.1.7. SVOJSTVA VJEROJATNOSTI

- 1. Za bilo koja dva događaja A, $B \in \mathcal{F}$ vrijedi:
- $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B)$
- 2. Za bilo koji događaj $A \in \mathcal{F}$ vrijedi:
- $P(A^{\mathrm{C}}) = 1 - P(A)$.
- 3. Ako je $\mathbf{\Omega}$ konačan vjerojatnosni prostor, tj. ako je $\mathbf{\Omega} = \{\boldsymbol{\omega}_1, \ldots, \boldsymbol{\omega}_n\}$ za neki $n \in \mathbb{N}$, onda je:

$$\begin{cases} P(\omega_i) \geq 0, \ \forall i \in [n]; \\ \sum_{i=1}^{n} P(\omega_i) = 1. \end{cases}$$

2.1.8. KLASIČAN VJEROJATNOSNI PROSTOR

- Neka je $\boldsymbol{\Omega} = \{\boldsymbol{\omega}_1, \ldots, \boldsymbol{\omega}_n\}$ *konačan* prostor elementarnih događaja.
- U većini slučajnih pokusa razumno je pretpostaviti da su svi *elementarni* događaji *jednako vjerojatni*, tj. da vrijedi jednakost:
  - $P(\boldsymbol{\omega}_1) = \ldots = P(\boldsymbol{\omega}_n).$
- Budući da prema svojstvu 3. iz 2.1.7. za proizvoljnu vjerojatnost mora vrijediti jednakost $\sum_{i=1}^{n} P(\omega_i) = 1$, lako dobivamo:

$$P(\omega_i) = \frac{1}{n}, \ \forall i \in [n].$$

2.1.8. KLASIČAN VJEROJATNOSNI PROSTOR

- Na taj je način funkcija P definirana na skupu $\mathbf{\Omega}$. Preostaje proširiti je na algebru $\mathcal{F}$.
- Svi elementi algebre $\mathcal{F}$ su *konačni* skupovi (jer je $\mathbf{\Omega}$ konačan skup).
- Zbog toga za svaki $A \in \mathcal{F}$ postoji jedinstveni $m \in \mathbb{N}$ takav da je $\operatorname{card}(A) = m$.
- Tako za svaki $A \in \mathcal{F}$ definiramo:

$$P(A) := \frac{\operatorname{card}(A)}{\operatorname{card}(\Omega)} = \frac{m}{n}$$

2.1.8. KLASIČAN VJEROJATNOSNI PROSTOR

- Nije teško provjeriti da ovako definirana funkcija P ima svojstva P1. – P4., tj. da je funkcija P vjerojatnost.
- Ovako dobivenu uređenu trojku $(\mathbf{\Omega}, \mathcal{F}, P)$ nazivamo *klasičan* (konačan) *vjerojatnosni prostor*.
- Osnovna prednost ovakvoga definiranja funkcije P jest što za izračunavanje vjerojatnosti *svakoga* elementa A algebre $\mathcal{F}$ *ne* moramo znati od *kojih* se točno elementarnih događaja sastoji događaj A, nego samo od *koliko* se točno elementarnih događaja sastoji događaj A.
- Zbog toga će nam u rješavanju zadataka s vjerojatnostima korisno poslužiti ranije naučene tehnike iz kombinatorike.

2.1.8. KLASIČAN VJEROJATNOSNI PROSTOR

- U terminologiji klasičnoga vjerojatnosnog prostora svaki element skupa $\mathbf{\Omega}$ naziva se *mogući ishod*.
- Svaki element događaja A naziva se *povoljan ishod*.
- Zbog toga formulu za računanje vjerojatnosti događaja A možemo izreći i ovako:

$$P(A) = \frac{\text{ukupan broj povoljnih ishoda}}{\text{ukupan broj mogućih ishoda}}.$$

2.1.9. NAPOMENA

- U rješavanju zadataka korisno je primijeniti sljedeće skupovne jednakosti:

1. $A - B = A \cdot B^{\mathrm{C}}$.

2. $\left(A^{\mathrm{C}}\right)^{\mathrm{C}} = A$.

3. $(A + B)^{\mathrm{C}} = A^{\mathrm{C}} \cdot B^{\mathrm{C}}$.

4. $(A \cdot B)^{\mathrm{C}} = A^{\mathrm{C}} + B^{\mathrm{C}}$.

5. $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$.

6. $(A + B) \cdot (A + C) = A + B \cdot C$.

2.1.9. NAPOMENA

- U rješavanju zadataka korisno je primijeniti i sljedeće jednakosti:

1. $P(A+B)=P(A)+P\left(A^C\cdot B\right).$

2. $P(A)=P(A\cdot B)+P\left(A\cdot B^C\right).$

3. $P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cdot B)-$
$-P(A\cdot C)-P(B\cdot C)+P(A\cdot B\cdot C).$

1. Odredite prostor elementarnih događaja za svaki od sljedećih pokusa:

   a) nenamještena nogometna utakmica u 1. kolu HNL-a;
   b) trajanje rada nekoga uređaja (zaokruženo na najbliži cijeli broj sati);
   c) rođenje djeteta;
   d) izvlačenje u jednom kolu igre LOTO 7/35;
   e) prosidba;
   f) bacanje simetričnoga novčića;
   g) bacanje simetrične igraće kocke.

Rješenje:

   a) $\Omega = \{$pobjeda domaćina, pobjeda gostiju, neriješeno$\}$;
   b) $\Omega = \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$. Taj skup je praktično prevelik, pa se empirijskim ispitivanjem obično nastoji utvrditi njegov maksimum.
   c) $\Omega = \{$dječak, djevojčica$\}$.
   d) $\Omega =$ skup svih sedmeročlanih podskupova skupa $\{1, 2, \ldots, 34, 35\}$. (Ponavljanje elemenata u bilo kojem od tih podskupova nije dozvoljeno.)
   e) $\Omega = \{$pristanak zaprošene osobe, odbijanje zaprošene osobe$\}$.
   f) $\Omega = \{$pismo, glava$\}$.
   g) $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

2. Promatramo slučajni pokus: *izvlačenje prvoga broja u* 1. *kolu* LOTA 7/35.

a) Navedite prostor elementarnih događaja Ω.

b) Neka su A = {izvučen je broj strogo veći od 10} i B = {izvučen je broj djeljiv s 5}. Odredite događaje $A + B$, $A \cdot B$, $A - B$, $B - A$, A^C i B^C, pa ih interpretirajte svojim riječima.

Rješenje:

a) $\Omega = [35] := \{1, 2, \ldots, 34, 35\}$;

b) Očito su $A = \{11, 12, 13, \ldots, 34, 35\}$ i $B = \{5, 10, 15, 20, 25, 30, 35\}$. Tada su:

- $A + B = \{5, 10, 11, 12, 13, \ldots, 34, 35\}$ =
- ={izvučen je broj koji je strogo veći od 10 ili djeljiv s 5};
- $A \cdot B = \{15, 20, 25, 30, 35\}$ =
  = {izvučen je višekratnik broja 5 koji je strogo veći od 10};
- $A - B = \{11, 12, 13, 14, 16, 17, 18, 19, 21, 22, 23, 24, 26, 27, 28, 29, 31, 32, 33, 34\}$ = {izvučen je broj koji je strogo veći od 10, a nije djeljiv s 5};
- $B - A = \{5, 10\}$ =
- = {izvučen je višekratnik broja 5 koji nije veći od 10};
- $A^C = \{1, 2, \ldots, 9, 10\}$ =
- = {izvučen je broj koji nije veći od 10};
- $B^C = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 11, \ldots, 34\}$ =
  = {izvučen je broj koji nije djeljiv s 5}.

3. Formirajte klasičan vjerojatnosni prostor za slučajan pokus iz zadatka 2., pa izračunajte vjerojatnosti svih događaja iz zadatka 2. b).

Rješenje: Već smo vidjeli da je

$$\Omega = [35].$$

Za algebru $\mathcal{F}$ standardno uzmimo $\mathcal{P}(\Omega)$. Vjerojatnost svakoga pojedinoga elementarnoga događaja $\omega \in \Omega$ definirana je s

$$P(\omega) = \frac{1}{35},$$

tj.

$$P(\{i\}) = \frac{1}{35}, \ \forall i \in [35].$$

Vjerojatnost bilo kojega događaja $C \in \mathcal{F}$ definirana je s:

$$P(C) = \frac{\text{card}(C)}{35}.$$

Iz zadatka 2.b) slijedi:

- $\text{card}(A) = 35 - 10 =$
  $= 25,$
- $\text{card}(B) = 7,$
- $\text{card}(A + B) = 25 + 2 =$
  $= 27,$
- $\text{card}(A \cdot B) = 5,$
- $\text{card}(A - B) = \text{card}(A) - \text{card}(A \cdot B) =$
  $= 25 - 5 =$
  $= 20,$
- $\text{card}(B - A) = 2,$
- $\text{card}(A^C) = 35 - 25 =$
  $= 10,$
- $\text{card}(B^C) = 35 - 7 =$
  $= 28.$

Zbog toga su tražene vjerojatnosti redom jednake:

$$P(A)=\frac{25}{35}=\frac{5}{7},$$
$$P(B)=\frac{7}{35}=\frac{1}{5},$$
$$P(A+B)=\frac{27}{35},$$
$$P(A\cdot B)=\frac{5}{35}=\frac{1}{7},$$
$$P(A-B)=\frac{20}{35}=\frac{4}{7},$$
$$P(B-A)=\frac{2}{35},$$
$$P(A^C)=\frac{10}{35}=\frac{2}{7},$$
$$P(B^C)=\frac{28}{35}=\frac{4}{5}.$$

4. Izračunajte vjerojatnost da u jednom kolu igre LOTO 7/35 pogodimo:

a) svih sedam brojeva dobitne kombinacije;
b) barem pet brojeva dobitne kombinacije;
c) najviše četiri broja dobitne kombinacije.

Rješenje: Ukupan broj svih elementarnih događaja (mogućih ishoda) jednak je ukupnom broju sedmeročlanih podskupova 35–članoga skupa. Taj broj je jednak

$$C(35,7)=\binom{35}{7}=6\ 724\ 520\,.$$

Dakle,

$$\operatorname{card}(\Omega)=\binom{35}{7}=6\ 724\ 520\,.$$

Za svaki $k\in[7]_0:=\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}$ definirajmo događaje A_k s:

$$A_k:=\{\text{pogodili smo točno } k \text{ brojeva dobitne kombinacije}\}.$$

Primijetimo da se događaji A_k međusobno isključuju i da vrijedi jednakost

$$P\left(\sum_{k=0}^{7}A_k\right)=1\,.$$

Naime, pri izvođenju slučajnoga pokusa *pogađanje brojeva dobitne kombinacije* mora se dogoditi točno jedan od njih (tj. pogodili smo ili 0 brojeva ili 1 broj ili… ili 6 brojeva ili svih 7 brojeva dobitne kombinacije).

Izvedimo formulu za izračunavanje vjerojatnosti svakoga od njih. Za to nam je potreban ukupan broj povoljnih ishoda u svakom pojedinom slučaju, odnosno broj $\operatorname{card}(A_k)$.

Pogođenih k brojeva dobitne kombinacije tvore k–člani podskup sedmeročlanoga skupa. Takvih podskupova ima ukupno

$$C(7,k)=\binom{7}{k}.$$

Nadalje, nepogođenih $7-k$ brojeva biramo među $35-7=28$ brojeva koji ne tvore dobitnu kombinaciju. Ukupan broj mogućih izbora tih brojeva jednak je ukupnom broju $(7-k)$-članih podskupova 28-članoga skupa. Taj broj je jednak

$$C(28,7-k)=\binom{28}{7-k}.$$

Primjenom pravila umnoška slijedi da je ukupan broj svih povoljnih ishoda jednak

$$\operatorname{card}(A_k)=\binom{7}{k}\cdot\binom{28}{7-k},\ \forall k\in[7]_0.$$

Zbog toga je vjerojatnost događaja A_k jednaka

$$\begin{aligned}P(A_k)&=\frac{\operatorname{card}(A_k)}{\operatorname{card}(\Omega)}=\\&=\frac{\binom{7}{k}\cdot\binom{28}{7-k}}{\binom{35}{7}}=\\&=\frac{\binom{7}{k}\cdot\binom{28}{7-k}}{6\ 724\ 520},\ \forall k\in[7]_0.\end{aligned}$$

a) Tražimo vjerojatnost događaja A_7. Prema prethodno navedenom, ta je vjerojatnost jednaka:

$$\begin{aligned}P(A_7)&=\frac{\binom{7}{7}\cdot\binom{28}{7-7}}{6\ 724\ 520}=\\&=\frac{1}{6\ 724\ 520}\approx\\&\approx 1.5\cdot 10^{-7}.\end{aligned}$$

b) Neka je A = {pogodili smo barem pet brojeva dobitne kombinacije}. Tada je očito

$$A=A_5+A_6+A_7,$$

pa zbog međusobne isključivosti događaja A_k i svojstva **P4.** slijedi:

$$
\begin{aligned}
P(A) = P(A_5 + A_6 + A_7) &\overbrace{=}^{\text{zbog P4.}} \\
&= P(A_5) + P(A_6) + P(A_7) = \\
&= \frac{\binom{7}{5}\cdot\binom{28}{7-5}}{6\ 724\ 520} + \frac{\binom{7}{6}\cdot\binom{28}{7-6}}{6\ 724\ 520} + \frac{\binom{7}{7}\cdot\binom{28}{7-7}}{6\ 724\ 520} = \\
&= \frac{\binom{7}{5}\cdot\binom{28}{2} + \binom{7}{6}\cdot\binom{28}{1} + \binom{7}{7}\cdot\binom{28}{0}}{6\ 724\ 520} = \\
&= \frac{\binom{7}{7-5}\cdot\binom{28}{2} + \binom{7}{7-6}\cdot\binom{28}{1} + \binom{7}{7}\cdot\binom{28}{0}}{6\ 724\ 520} = \\
&= \frac{\binom{7}{2}\cdot\binom{28}{2} + \binom{7}{1}\cdot\binom{28}{1} + \binom{7}{7}\cdot\binom{28}{0}}{6\ 724\ 520} = \\
&= \frac{\frac{7\cdot 6}{2}\cdot\frac{28\cdot 27}{2} + 7\cdot 28 + 1\cdot 1}{6\ 724\ 520} = \\
&= \frac{8135}{6\ 724\ 520} = \\
&= \frac{1\ 627}{1\ 344\ 904} \approx \\
&\approx 1.21\cdot 10^{-3}.
\end{aligned}
$$

c) Neka je $A = \{$pogodili smo najviše četiri broja dobitne kombinacije$\}$. Tada je očito

$$A = \sum_{k=0}^{4} A_k .$$

Tako odmah dobivamo:

$$
\begin{aligned}
P(A) = P\left(\sum_{k=0}^{4} A_k\right) &= \\
&= 1 - P\left(\sum_{k=5}^{7} A_k\right) \overbrace{=}^{\text{prema } \mathbf{b})} \\
&= 1 - \frac{1\ 627}{1\ 344\ 904} = \\
&= \frac{1\ 343\ 277}{1\ 344\ 904} \approx \\
&\approx 0.99879.
\end{aligned}
$$

5. Procijenite najvjerojatniji broj pogođenih brojeva u jednom kolu igre LOTO 7/35. (Dopunski broj u svim slučajevima zanemarujemo.)

Rješenje: Prema rješenju prethodnoga zadatka, za svaki $k \in [7]_0$ izračunajmo vjerojatnost

$$P(A_k) = \frac{\binom{7}{k} \cdot \binom{28}{7-k}}{6\ 724\ 520}.$$

Dobivamo:

$$P(A_0) = \frac{\binom{7}{0} \cdot \binom{28}{7-0}}{6\ 724\ 520} = \frac{\binom{7}{0} \cdot \binom{28}{7}}{6\ 724\ 520} = \frac{1 \cdot 1\ 184\ 040}{6\ 724\ 520} \approx 0.1761,$$

$$P(A_1) = \frac{\binom{7}{1} \cdot \binom{28}{7-1}}{6\ 724\ 520} = \frac{\binom{7}{1} \cdot \binom{28}{6}}{6\ 724\ 520} = \frac{7 \cdot 376\ 740}{6\ 724\ 520} \approx 0.3921,$$

$$P(A_2) = \frac{\binom{7}{2} \cdot \binom{28}{7-2}}{6\ 724\ 520} = \frac{\binom{7}{2} \cdot \binom{28}{5}}{6\ 724\ 520} = \frac{21 \cdot 98\ 280}{6\ 724\ 520} \approx 0.3069,$$

$$P(A_3) = \frac{\binom{7}{3} \cdot \binom{28}{7-3}}{6\ 724\ 520} = \frac{\binom{7}{3} \cdot \binom{28}{4}}{6\ 724\ 520} = \frac{35 \cdot 20\ 475}{6\ 724\ 520} \approx 0.1066,$$

$$P(A_4) = \frac{\binom{7}{4} \cdot \binom{28}{7-4}}{6\ 724\ 520} = \frac{\binom{7}{4} \cdot \binom{28}{3}}{6\ 724\ 520} = \frac{35 \cdot 3\ 276}{6\ 724\ 520} \approx 0.0171,$$

$$P(A_5) = \frac{\binom{7}{5} \cdot \binom{28}{7-5}}{6\ 724\ 520} = \frac{\binom{7}{5} \cdot \binom{28}{2}}{6\ 724\ 520} = \frac{21 \cdot 378}{6\ 724\ 520} \approx 1.2 \cdot 10^{-3},$$

$$P(A_6) = \frac{\binom{7}{6} \cdot \binom{28}{7-6}}{6\ 724\ 520} = \frac{\binom{7}{6} \cdot \binom{28}{1}}{6\ 724\ 520} = \frac{7 \cdot 28}{6\ 724\ 520} \approx 2.9 \cdot 10^{-5},$$

$$P(A_7) = \frac{\binom{7}{7} \cdot \binom{28}{7-7}}{6\ 724\ 520} = \frac{\binom{7}{7} \cdot \binom{28}{0}}{6\ 724\ 520} = \frac{1 \cdot 1}{6\ 724\ 520} \approx 1.5 \cdot 10^{-7}.$$

Odatle zaključujemo da najveću vjerojatnost ima događaj A_1. Dakle, najvjerojatnije je da ćemo u *bilo kojem* izvlačenju LOTA 7/35 pogoditi **točno jedan** broj dobitne kombinacije.

6. U skladištu se nalazi točno 15 različitih računala od kojih je trećina neispravna. Slučajno izabiremo točno 4 računala. Izračunajte vjerojatnost da se među izabranim računalima nalazi barem jedno neispravno računalo.

Rješenje: Označimo:

$\Omega = \{$iz skupa od 15 različitih računala biramo njih točno 4$\}$;
$A = \{$među izabranim računalima nalazi se barem jedno neispravno računalo$\}$.

Tada je

$$A^C = \{\text{sva četiri izabrana računala su ispravna}\}.$$

Odredimo $\text{card}(\Omega)$ i $\text{card}\left(A^C\right)$.

Ukupan broj načina na koje možemo izabrati 4 računala od njih 15 jednak je $\binom{15}{4}$.

Taj broj jednak je broju mogućih ishoda. Dakle,

$$\text{card}(\Omega) = \binom{15}{4}.$$

Ukupan broj načina na koje možemo izabrati 4 računala od njih $\frac{2}{3}\cdot 15 = 10$ ispravnih jednak je $\binom{10}{4}$. Dakle,

$$\text{card}\left(A^C\right) = \binom{10}{4}.$$

Tako zaključujemo da je tražena vjerojatnost jednaka:

$$\begin{aligned} P(A) &= 1 - P\left(A^C\right) = \\ &= 1 - \frac{\binom{10}{4}}{\binom{15}{4}} = \\ &= 1 - \frac{210}{1365} = \\ &= \frac{1155}{1365} = \frac{11}{13} \approx 0.84615. \end{aligned}$$

Napomena: Zadatak se alternativno (ali bitno sporije!) može riješiti tako da se za svaki $i \in [4] := \{1,2,3,4\}$ definira

$$A_i := \{\text{točno } i \text{ izabranih računala je neispravno}\},$$

pa izračuna

$$P(A_i) = \frac{\binom{5}{i} \cdot \binom{10}{4-i}}{\binom{15}{4}}.$$

Tada je tražena vjerojatnost jednaka

$$\begin{aligned}
P(A) &= \sum_{i=1}^{4} P(A_i) = \\
&= \frac{\binom{5}{1} \cdot \binom{10}{4-1}}{\binom{15}{4}} + \frac{\binom{5}{2} \cdot \binom{10}{4-2}}{\binom{15}{4}} + \frac{\binom{5}{3} \cdot \binom{10}{4-3}}{\binom{15}{4}} + \frac{\binom{5}{4} \cdot \binom{10}{4-4}}{\binom{15}{4}} = \\
&= \frac{5 \cdot \binom{10}{3} + \binom{5}{2} \cdot \binom{10}{2} + \binom{5}{3} \cdot 10 + \binom{5}{4} \cdot 1}{\binom{15}{4}} = \\
&= \frac{1155}{1365} = \\
&= \frac{11}{13}.
\end{aligned}$$