

 TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU POLYTECHNICUM ZAGREBIENSE Elektrotehnički odjel	Matematika 2 (preddiplomski stručni studij elektrotehnike)	2.1. Rekurzije – riješeni zadaci
--	---	---

Zadatak 1. Nadite što jednostavniju rekurziju čije je jedinstveno rješenje niz:

- a)** $a_n = n$;
- b)** $b_n = 2 \cdot n + 1$;
- c)** $c_n = n^2$;
- d)** $d_n = 2^n$.

Rješenje: U svakom zadatku ćemo pokušati naći vezu između n -toga člana niza i njemu neposredno prethodnoga (tj. $(n - 1)$ -voga člana) niza. Da bismo dobili jedinstveno rješenje rekurzije, moramo zadati točno jedan početni uvjet. Taj početni uvjet bit će prvi član zadanoga niza.

- a)** Iz pravila zadanoga niza izravno slijedi

$$a_{n-1} = n - 1.$$

Lako se vidi da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi identitet:

$$n = (n - 1) + 1.$$

Odatle ponovno prema pravilu zadanoga niza slijedi:

$$a_n = a_{n-1} + 1.$$

Lako izračunamo prvi član niza a_n . To je $a_1 = 1$. Dakle, tražena rekurzija je:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + 1, \\ a_1 = 1. \end{cases}$$

- b)** Iz pravila zadanoga niza slijedi:

$$b_{n-1} = 2 \cdot (n - 1) + 1 = 2 \cdot n - 1.$$

Lako se vidi da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi identitet:

$$2 \cdot n + 1 = (2 \cdot n - 1) + 2.$$

Odatle ponovno prema pravilu zadanoga niza slijedi

$$b_n = b_{n-1} + 2.$$

Lako izračunamo prvi član niza b_n . To je

$$b_1 = 2 \cdot 1 + 1 = 3.$$

 TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU POLYTECHNICUM ZAGREBIENSE Elektrotehnički odjel	Matematika 2 (preddiplomski stručni studij elektrotehnike)	2.1. Rekurzije – riješeni zadaci
---	---	---

Dakle, tražena rekurzija je:

$$\begin{cases} b_n = b_{n-1} + 2, \\ b_1 = 3. \end{cases}$$

c) Iz pravila zadanoga niza slijedi:

$$b_{n-1} = (n-1)^2 = n^2 - 2 \cdot n + 1.$$

Lako se vidi da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi identitet:

$$n^2 = (n^2 - 2 \cdot n + 1) + 2 \cdot n - 1.$$

Odatle ponovno prema pravilu zadanoga niza slijedi:

$$c_n = c_{n-1} + 2 \cdot n - 1.$$

Lako izračunamo prvi član niza c_n . To je $c_1 = 1^2 = 1$. Dakle, tražena rekurzija je:

$$\begin{cases} c_n = c_{n-1} + 2 \cdot n - 1, \\ c_1 = 1. \end{cases}$$

d) Iz pravila zadanoga niza slijedi:

$$d_{n-1} = 2^{n-1}.$$

Lako se vidi da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi identitet:

$$2^n = 2^{n-1} \cdot 2.$$

Odatle ponovno prema pravilu zadanoga niza slijedi:

$$d_n = 2 \cdot d_{n-1}.$$

Lako izračunamo prvi član niza d_n . To je $d_1 = 2^1 = 2$. Dakle, tražena rekurzija je:

$$\begin{cases} d_n = 2 \cdot d_{n-1}, \\ d_1 = 2. \end{cases}$$

Primjedba 1. U svakom pojedinom rješenju zapravo smo odredili i rekurziju i početne uvjete. Iako je rekurzija formalno *relacija* koja povezuje n -ti član niza s konačno mnogo njegovih prethodnika, u praksi se pod pojmom „rekurzija“ najčešće uzima relacija s početnim uvjetima. Razlog tome je poželjna jedinstvenost rješenja rekurzije, a za što je

 TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU POLYTECHNICUM ZAGREBIENSE Elektrotehnički odjel	Matematika 2 (preddiplomski stručni studij elektrotehnike)	2.1. Rekurzije – riješeni zadaci
--	---	---

nužno zadavanje početnih uvjeta. Tako u zadacima oblika „Riješite rekurziju:“ najčešće budu zadani i rekurzija i svi početni uvjeti.

Primjedba 2. U rješenju c) podzadatka smo utvrdili da se u vezi n -toga člana niza c_n i $(n - 1)$ -voga člana toga niza pojavljuje i varijabla n . To je potpuno korektno. Što više, u navedenoj vezi mogu se pojaviti polinomi, eksponencijalna funkcija i dr. Takve rekurzije ubrajamo u *nehomogene* rekurzije.

Zadatak 2. *Drp-banka* d.d. iz Špičkovine plaća štedišama 10% godišnjih dekurzivnih kamata na oročeni novac. Mutimir je odlučio na kraju svake pojedine godine uložiti po 1000 €. Nadite što jednostavniju rekurziju (sa što manje početnih uvjeta) za iznos koji Mutimir ima na računu nakon n godina. (Prepostavljamo da, osim navedenih uplata i pripisa kamata, nema drugih uplata i isplata.) Posebno, riješite zadatak za $n = 4$.

Rješenje: Neka je C_n iznos novca na Mutimirovu računu na kraju n -te godine. Dekurzivan obračun kamata znači da se na kraju svakoga razdoblja ukamačivanja kamate obračunavaju na iznos s početka toga razdoblja. U ovom slučaju to znači da se na kraju svake godine kamate obračunavaju (i pripisuju!) na iznos C_{n-1} jer na početku n -te godine raspolaćemo sa svotom nastalom na kraju prethodne godine, a ta je jednaka upravo C_{n-1} . Pripisanim kamatama još treba dodati Mutimirovu uplatu od 1000 €. Tako dobivamo rekurziju:

$$C_n = C_{n-1} + \frac{10}{100} \cdot C_{n-1} + 1000,$$

tj.:

$$C_n = 1.1 \cdot C_{n-1} + 1000, \text{ uz početni uvjet } C_1 = 1000.$$

Preostaje izračunati C_4 . Koristeći dobivenu rekurziju i početni uvjet imamo redom:

$$C_2 = 1.1 \cdot C_1 + 1000 = 1.1 \cdot 1000 + 1000 = 2100,$$

$$C_3 = 1.1 \cdot C_2 + 1000 = 1.1 \cdot 2100 + 1000 = 3310,$$

$$C_4 = 1.1 \cdot C_3 + 1000 = 1.1 \cdot 3310 + 1000 = 4641.$$

Dakle, u posebnom slučaju traženi iznos je $C_4 = 4641$ €.

Primjedba 3. Može se pokazati da je rješenje dobivene rekurzije dano formulom:

$$C_n = 10000 \cdot (1.1^n - 1).$$

Provjerite to uvrštavanjem odgovarajućih izraza u dobivenu rekurziju!

 TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE Elektrotehnički odjel	Matematika 2 (preddiplomski stručni studij elektrotehnike)	2.1. Rekurzije – riješeni zadaci
--	---	---

Zadatak 3. Lidija se penje stepenicama u *Avenue Mallu*. U jednom koraku ona može zakoračiti za jednu ili za dvije stepenice. Nadite što jednostavniju rekurziju (sa što manje početnih uvjeta) za ukupan broj različitih načina na koje se Lidija može popeti uz n stepenica? Posebno, riješite zadatak za $n=12$.

Rješenje: Označimo s K_n ukupan broj načina na koje Lidija može prijeći n stepenica. U prvom Lidijinom koraku iz podnožja stepenica moguća su točno dva različita slučaja, pa razmotrimo zasebno svaki od njih.

1. slučaj: Lidija zakorači za točno jednu stepenicu. Tada joj preostaje za prijeći još ukupno $n-1$ stepenicu. To može učiniti na ukupno K_{n-1} različitih načina.

2. slučaj: Lidija zakorači za točno dvije stepenice. Tada joj preostaje za prijeći još ukupno $n-2$ stepenica. To može učiniti na ukupno K_{n-2} različitih načina.

Time smo iscrpili oba slučaja. S obzirom da su slučajevi disjunktni (ne mogu se dogoditi istovremeno), zaključujemo da je:

$$K_n = K_{n-1} + K_{n-2}.$$

S obzirom da je n -ti član niza izražen pomoću dva prethodna člana, za jedinstvenost rješenja moramo zadati točno dva početna uvjeta. Lako se vidi da su:

$K_1 = 1$ (na jednu jedinu stepenicu Lidija se može popeti na točno jedan način, i to je prvi od gornja dva opisana);

$K_2 = 2$ (uz dvije stepenice Lidija se može popeti tako da stane na svaku od te dvije stepenice (tj. da u svakom koraku zakorači za točno jednu stepenicu) ili da u jednom koraku odmah zakorači na posljednju, drugu stepenicu (to je drugi od gornja dva opisana načina)).

Dakle, dobivena rekurzija je:

$$\begin{cases} K_n = K_{n-1} + K_{n-2}, \\ K_1 = 1, K_2 = 2. \end{cases}$$

Preostaje izračunati K_{12} . Koristeći dobivenu rekurziju imamo redom:

$$\begin{aligned} K_3 &= K_2 + K_1 = 2 + 1 = 3, \\ K_4 &= K_3 + K_2 = 3 + 2 = 5, \\ K_5 &= K_4 + K_3 = 5 + 3 = 8, \\ K_6 &= K_5 + K_4 = 8 + 5 = 13, \end{aligned}$$

 TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU POLYTECHNICUM ZAGREBIENSE Elektrotehnički odjel	Matematika 2 (preddiplomski stručni studij elektrotehnike)	2.1. Rekurzije – rješeni zadaci
--	---	--

$$\begin{aligned}
 K_7 &= K_6 + K_5 = 13 + 8 = 21, \\
 K_8 &= K_7 + K_6 = 21 + 13 = 34, \\
 K_9 &= K_8 + K_7 = 34 + 21 = 55, \\
 K_{10} &= K_9 + K_8 = 55 + 34 = 89, \\
 K_{11} &= K_{10} + K_9 = 89 + 55 = 144, \\
 K_{12} &= K_{11} + K_{10} = 144 + 89 = 233.
 \end{aligned}$$

Dakle, Lidijska može popeti uz 12 stepenica na ukupno 233 različita načina.

Primjedba 4. Može se pokazati da je rješenje dobivene rekurzije dano formulom:

$$K_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right).$$

Provjerite to uvrštavanjem odgovarajućih izraza u dobivenu rekurziju!

Zadatak 4. Ternarnim komunikacijskim kanalom mogu se predati poruke sastavljene pomoću abecede $A = \{+, -, *\}$. *Riječi* poruke su konačni nizovi znakova abecede takvi da na susjednim mjestima nema znaka *. Odredite ukupan broj svih različitih riječi duljine n . Posebno, riješite zadatak za $n = 6$.

Rješenje: Označimo traženi broj s R_n . S obzirom na znak kojim može početi svaka riječ, razlikujemo točno dva moguća slučaja, pa ćemo zasebno razmotriti svaki od njih.

1. slučaj: Riječ počinje znakom *. Prema pravilu stvaranja riječi, na 2. mjestu ne smije biti * (jer bi tada na 1. i 2. mjestu imali dvije uzastopne zvjezdice, što nije dozvoljeno), pa na to mjesto obvezno moramo staviti ili + ili -. Koji god od tih znakova odabrali, na 3. mjestu može doći bilo koji znak, pa se riječ dalje može dovršiti na ukupno R_{n-2} načina. (Zapravo, ovaj postupak možemo shvatiti kao da smo uzeli *bilo koju* riječ duljine $n - 2$, ispred prvoga znaka te riječi napisali + ili -, pa naposljetku ispred toga znaka napisali *.) U ovom slučaju, dakle, dobivamo ukupno $R_{n-2} + R_{n-2} = 2 \cdot R_{n-2}$ različitih riječi (ukupno R_{n-2} riječi za znak + na 2. mjestu i R_{n-2} riječi za znak - na 2. mjestu).

2. slučaj: Riječ počinje s + ili -. U ovom slučaju nije bitno koji je znak na 2. mjestu jer nema opasnosti da na prva dva mesta budu zvjezdice. Zbog toga u svakom od ovih podslučajeva riječ dalje možemo završiti na ukupno R_{n-1} načina. (Zapravo, ovaj postupak možemo shvatiti kao da smo uzeli *bilo koju* riječ duljine $n - 1$ i ispred nje nadopisali + ili -.) U ovom slučaju, dakle, dobivamo ukupno $R_{n-1} + R_{n-1} = 2 \cdot R_{n-1}$ različitih riječi (ukupno R_{n-1} riječi za znak + na 1. mjestu i R_{n-1} riječi za znak - na 1. mjestu).

Time smo iscrpili sve moguće slučajeve. Zaključujemo da mora vrijediti jednakost:

 TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU POLYTECHNICUM ZAGREBIENSE Elektrotehnički odjel	Matematika 2 (preddiplomski stručni studij elektrotehnike)	2.1. Rekurzije – riješeni zadaci
--	---	---

$$R_n = 2 \cdot R_{n-1} + 2 \cdot R_{n-2} \Leftrightarrow R_n = 2 \cdot (R_{n-1} + R_{n-2})..$$

Da bi rekurzija imala jedinstveno rješenje, moramo zadati točno dva početna uvjeta (jer smo n -ti član niza izrazili pomoću dva prethodna člana). Odredimo R_1 i R_2 .

Sve riječi duljine 1 su +, - i *. Ima ih ukupno 3. Zbog toga je $R_1 = 3$.

Sve riječi duljine 2 su ++, +- , +*, -+, - -, -*, *+ i *- (svi dvoslovi osim **). Ima ih ukupno 8. Zbog toga je $R_2 = 8$.

Tako smo dobili rekurziju:

$$\begin{cases} R_n = 2 \cdot (R_{n-1} + R_{n-2}), \\ R_1 = 3, R_2 = 8. \end{cases}$$

Preostaje izračunati R_6 . Imamo redom:

$$\begin{aligned} R_3 &= 2 \cdot (R_2 + R_1) = 2 \cdot (8 + 3) = 22, \\ R_4 &= 2 \cdot (R_3 + R_2) = 2 \cdot (22 + 8) = 60, \\ R_5 &= 2 \cdot (R_4 + R_3) = 2 \cdot (60 + 22) = 164, \\ R_6 &= 2 \cdot (R_5 + R_4) = 2 \cdot (164 + 60) = 448. \end{aligned}$$

Dakle, postoji ukupno 448 različitih riječi duljine 6.

Primjedba 5. Može se pokazati da je rješenje dobivene rekurzije dano formulom:

$$R_n = \frac{9+5\sqrt{3}}{6} \cdot \left(1+\sqrt{3}\right)^{n-1} + \frac{3-2\sqrt{3}}{6} \cdot \left(1-\sqrt{3}\right)^n.$$

Provjerite to uvrštavanjem odgovarajućih izraza u dobivenu rekurziju!

Zadatak 5. Metodom teleskopiranja riješite sljedeće rekurzije uz zadane početne uvjete:

- a)** $a_n = a_{n-1} + 2$, $a_1 = 1$;
- b)** $a_n = a_{n-1} - 2$, $a_1 = 2021$;
- c)** $a_n = 2 \cdot a_{n-1}$, $a_1 = 8$;
- d)** $a_n = \frac{a_{n-1}}{5}$, $a_1 = 625$;
- e)** $a_n = n \cdot a_{n-1}$, $a_1 = 1$.

Podsjetnik: Osnova ideja metode teleskopiranja je napisati zadalu rekurziju za $k = 1, 2, \dots, n$, pa zbrojiti ili pomnožiti zasebno lijeve, a zasebno desne strane napisanih

 TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU POLYTECHNICUM ZAGREBIENSE Elektrotehnički odjel	Matematika 2 (preddiplomski stručni studij elektrotehnike)	2.1. Rekurzije – riješeni zadaci
---	---	---

jednakosti. Ako je metoda primjenjiva, svi članovi a_1, a_2, \dots, a_{n-1} (dakle, svi osim posljednjega člana a_n) će se pojaviti i na lijevoj i na desnoj strani dobivene jednakosti (s istim koeficijentima na objema stranama), pa će se moći poništiti ili pokratiti. Tako će na lijevoj strani ostati samo član a_n , a na desnoj funkcija varijable n koju treba pojednostaviti što je više moguće („srediti do kraja“).

Rješenje: a) Napišimo zadanu rekurziju za svaki $k = 1, 2, \dots, n$. Dobivamo sljedeći „lanac“ od ukupno n jednakosti:

$$\begin{aligned} a_1 &= 1, \\ a_2 &= a_1 + 2, \\ a_3 &= a_2 + 2, \\ a_4 &= a_3 + 2, \\ &\vdots \\ a_{n-1} &= a_{n-2} + 2, \\ a_n &= a_{n-1} + 2. \end{aligned}$$

Zbrojimo posebno lijeve, a posebno desne strane ovih jednakosti. Dobivamo:

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_{n-1} + a_n &= 1 + (a_1 + 2) + (a_2 + 2) + (a_3 + 2) + \dots + (a_{n-2} + 2) + (a_{n-1} + 2), \\ a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_{n-1} + a_n &= (a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-2} + a_{n-1}) + (1 + \underbrace{2 + 2 + 2 + \dots + 2 + 2}_{n-1 \text{ puta}}), \\ a_n &= (n-1) \cdot 2 + 1, \\ a_n &= 2 \cdot n - 1. \end{aligned}$$

Ovdje smo primijenili svojstva komutativnosti i asocijativnosti zbrajanja u skupu \mathbb{R} . U pretposljednjem koraku poništili smo sve međusobno jednake članove koji se pojavljuju na suprotnim stranama jednakosti. Tako je na lijevoj strani preostao član a_n , a na desnoj (u ovom slučaju, linearna) funkcija varijable n .

b) Sada imamo sljedeći „lanac“ od ukupno n jednakosti:

$$\begin{aligned} a_1 &= 2021, \\ a_2 &= a_1 - 2, \\ a_3 &= a_2 - 2, \\ a_4 &= a_3 - 2, \\ &\vdots \\ a_{n-1} &= a_{n-2} - 2, \\ a_n &= a_{n-1} - 2. \end{aligned}$$

Ponovno zasebno zbrojimo lijeve, odnosno desne strane ovih jednakosti:

 TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU POLYTECHNICUM ZAGREBIENSE Elektrotehnički odjel	Matematika 2 (preddiplomski stručni studij elektrotehnike)	2.1. Rekurzije – riješeni zadaci
--	---	---

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_{n-1} + a_n = 2021 + (a_1 - 2) + (a_2 - 2) + (a_3 - 2) + \dots + (a_{n-2} - 2) + (a_{n-1} - 2),$$

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_{n-1} + a_n = (a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-2} + a_{n-1}) + (2021 - \underbrace{(2+2+2+\dots+2)}_{n-1 \text{ puta}}),$$

$$a_n = 2021 - (n-1) \cdot 2,$$

$$a_n = (-2) \cdot n + 2023.$$

c) U ovom zadatku imamo sljedeći „lanac“ od ukupno n jednakosti:

$$\begin{aligned} a_1 &= 8, \\ a_2 &= 2 \cdot a_1, \\ a_3 &= 2 \cdot a_2, \\ a_4 &= 2 \cdot a_3, \\ &\vdots \\ a_n &= 2 \cdot a_{n-1}. \end{aligned}$$

Vidimo da članovi a_1, a_2, a_3, \dots imaju različite koeficijente na lijevim i desnim stranama napisanih jednakosti. Zbog toga zbrajanjem napisanih jednakosti ne bismo ništa dobili jer se ti članovi ne bi poništili. No, budući da je $a_1 \neq 0$ i da se svaki sljedeći član dobiva iz neposredno prethodnoga množenjem brojem različitim od nule (što slijedi izravno iz zadane rekurzije), to znači da su svi članovi zadanoga niza različiti od nule. Zbog toga smijemo pomnožiti posebno lijeve i posebno desne strane napisanih jednakosti jer nema opasnosti da ćemo pri množenju negdje „naletjeti“ na faktor 0:

$$\begin{aligned} a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdots a_n &= 8 \cdot (2 \cdot a_1) \cdot (2 \cdot a_2) \cdot (2 \cdot a_3) \cdots (2 \cdot a_{n-1}), \\ a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdots a_n &= (a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdots a_{n-1}) \cdot (8 \cdot \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdots 2}_{n-1 \text{ dvojki}}), \quad /: a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdots a_{n-1} \neq 0 \\ a_n &= 8 \cdot 2^{n-1} = 2^3 \cdot 2^{n-1} = 2^{n+2}. \end{aligned}$$

U drugom koraku smo koristili svojstva komutativnosti i asocijativnosti množenja u skupu \mathbb{R} , pa smo skratili sve članove koji se pojavljuju na objema stranama. To smo smjeli napraviti jer smo ranije zaključili da su svi ti članovi različiti od nule, pa je i njihov umnožak različit od nule. Formulu za opći član niza $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ pojednostavnili smo što je bilo više moguće.

d) U ovom zadatku imamo sljedeći „lanac“ od ukupno n jednakosti:

$$\begin{aligned} a_1 &= 625, \\ a_2 &= \frac{a_1}{5}, \\ a_3 &= \frac{a_2}{5}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$a_n = \frac{a_{n-1}}{5}.$$

Pomnožimo zasebno lijeve i zasebno desne strane ovih jednakosti:

$$\begin{aligned}
 a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot \dots \cdot a_n &= 625 \cdot \left(\frac{a_1}{5}\right) \cdot \left(\frac{a_2}{5}\right) \cdot \left(\frac{a_3}{5}\right) \cdot \dots \cdot \left(\frac{a_{n-1}}{5}\right), \\
 a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot \dots \cdot a_n &= (a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_{n-1}) \cdot \left(625 \cdot \underbrace{\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot \dots \cdot \frac{1}{5}}_{n-1 \text{ petina}}\right), \quad /: a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_{n-1} \neq 0 \\
 a_n &= 625 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} = 5^4 \cdot 5^{1-n} = 5^{5-n}.
 \end{aligned}$$

e) U ovom zadatku imamo sljedeći „lanac“ od ukupno n jednakosti:

$$\begin{aligned}
 a_1 &= 1, \\
 a_2 &= 2 \cdot a_1, \\
 a_3 &= 3 \cdot a_2, \\
 a_4 &= 4 \cdot a_3, \\
 &\vdots \\
 a_n &= n \cdot a_{n-1}.
 \end{aligned}$$

Množenjem napisanih jednakosti i kraćenjem istih članova na objema stranama dobivamo:

$$\begin{aligned}
 a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot \dots \cdot a_n &= 1 \cdot (2 \cdot a_1) \cdot (3 \cdot a_2) \cdot (4 \cdot a_3) \cdot \dots \cdot (n \cdot a_{n-1}), \\
 a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot \dots \cdot a_n &= (a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_{n-1}) \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot n), \quad /: a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_{n-1} \neq 0 \\
 a_n &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot n = n!.
 \end{aligned}$$

Pogledajmo kako riješiti neke karakteristične tipove rekurzija koje nije moguće riješiti metodom teleskopiranja. Osnovna ideja je svakoj takvoj rekurziji pridružiti *karakterističnu jednadžbu*. To je algebarska jednadžba na čijoj je lijevoj strani polinom, a na desnoj nula. Takvu jednadžbu riješimo nekim od uobičajenih načina. Dobivamo rješenja k_1, \dots, k_r među kojima **nema međusobno jednakih**, a neka od njih mogu biti i kompleksni brojevi. Tada se skup svih nizova koji zadovoljavaju polaznu rekurziju (tzv. *opće rješenje rekurzije*) dobiva kao svojevrsna kombinacija potencija dobivenih rješenja kojima su „koeficijenti“ polinomi. Te polinome odredimo koristeći početne uvjete.

Ilustrirajmo ovu ideju na primjerima. Potpuno analognu ideju primijenit ćemo je kasnije u rješavanju homogenih linearnih običnih diferencijalnih jednadžbi 2. reda s konstantnim koeficijentima.

Zadatak 6. Riješite sljedeće homogene linearne rekurzije s konstantnim koeficijentima:

- a)** $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, $a_1 = a_2 = 1$;
- b)** $b_n = b_{n-1} + 2 \cdot b_{n-2}$, $b_1 = -1$, $b_2 = 1$;
- c)** $c_n = 2 \cdot c_{n-1} - c_{n-2}$, $c_1 = 1$, $c_2 = 2$.
- d)** $d_n = (-2) \cdot d_{n-1} + d_{n-2} + 2 \cdot d_{n-3}$, $d_1 = -3$, $d_2 = 5$, $d_3 = -9$;
- e)** $e_n = 3 \cdot e_{n-1} - 3 \cdot e_{n-2} + e_{n-3}$, $e_1 = 1$, $e_2 = 4$, $e_3 = 9$.

Rješenje: **a)** Najprije napišimo pripadnu karakterističnu jednadžbu. Dobijemo je tako da a_n zamijenimo s k^n , a_{n-1} s k^{n-1} i a_{n-2} s k^{n-2} :

$$k^n = k^{n-1} + k^{n-2}.$$

Riješimo tu jednadžbu. Primijetimo da su prva dva člana traženoga niza strogo veća od nule. S obzirom da je svaki član niza, počevši od trećega, jednak zbroju dvaju prethodnih, zaključujemo da su svi članovi niza strogo veći od nule (zbrajanjem brojeva strogo većih od nule ne možemo dobiti nepozitivan broj). Zbog toga tražimo sva rješenja karakteristične jednadžbe koja su različita od nule. U tu svrhu dijelimo svaki član karakteristične jednadžbe s onim članom te jednadžbe koji ima *najmanji eksponent* (koeficijenti ispred članova jednadžbe su nebitni). U ovome je slučaju taj član k^{n-2} . Podijelimo jednadžbu s k^{n-2} , pa dobijemo:

$$k^2 = k + 1.$$

Rješenja ove kvadratne jednadžbe su $k_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ i $k_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Zbog toga je opće rješenje zadane rekurzije:

$$a_n = A \cdot \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2} \right)^n + B \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n.$$

Pojasnimo kako smo dobili ovaj izraz. Ponajprije, svako od međusobno različitih rješenja karakteristične jednadžbe potenciramo na potenciju n jer smo prepostavili da je $a_n = k^n$. Nadalje, ako su nizovi a_n i b_n rješenja neke rekurzije, onda su i umnožak svakoga rješenja sa skalarom (ovdje taj skalar može biti i kompleksan broj), te zbroj tih dvaju rješenja također rješenja te rekurzije. Ta tvrdnja slijedi iz linearnosti polazne rekurzije (u toj se rekurziji pojavljuju samo operacije zbrajanja/oduzimanja članova niza i množenja tih članova realnim brojem). Detalje ovdje nećemo navoditi.

Uglavnom, opće rješenje zadane rekurzije, tj. *skup svih nizova koji zadovoljavaju zadanu rekurziju* (ali ne i sve početne uvjete!) dobivamo zbrajajući potencije rješenja karakteristične jednadžbe. Uz svako od tih rješenja kao „koeficijent“ dolazi polinom čiji je stupanj za jedan manji od kratnosti dotičnoga rješenja. (Podsjetimo, ako su p

polinom i $x_0 \in \mathbb{C}$ nultočka polinoma p , onda kažemo da x ima kratnost r ako je p djeljiv s $(x - x_0)^r$, ali nije djeljiv s $(x - x_0)^{r+1}$.) U ovom zadatku svako rješenje ima kratnost jednaku 1, pa uz njega kao koeficijent dolazi polinom stupnja $1-1=0$, tj. neka realna konstanta. Napomenimo da, kad god su rješenja karakteristične jednadžbe kompleksni brojevi koji nisu realni, onda se i kao koeficijenti polinoma moraju pojaviti kompleksni brojevi.

Dakle, *svi nizovi* koji zadovoljavaju zadanu rekurziju imaju oblik:

$$a_n = A \cdot \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2} \right)^n + B \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n, \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

Oni tvore skup koji nazivamo *opće rješenje zadane rekurzije*. Taj skup ima beskonačno mnogo elemenata jer $A, B \in \mathbb{R}$ mogu biti bilo koji realni brojevi. Preostaje odabratи onaj element toga skupa koji zadovoljava oba početna uvjeta. (Taj element će nužno biti jedinstven.) Na koji ćemo način to učiniti? U gornje opće rješenje uvrstit ćemo najprije $n = 1$, a potom $n = 2$. Tako ćemo dobiti sustav dviju *linearnih jednadžbi s dvije nepoznanice* (u općem slučaju: sustav n linearnih jednadžbi s n nepoznanica koji će nužno imati jedinstveno rješenje) kojega ćemo potom lagano riješiti.

Dakle, u izraz za opće rješenje uvrstimo najprije $n = 1$, a potom $n = 2$, pa iskoristimo početne uvjete $a_1 = a_2 = 1$. Dobivamo:

$$\begin{cases} 1 = a_1 = A \cdot \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2} \right)^1 + B \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^1, \\ 1 = a_2 = A \cdot \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2} \right)^2 + B \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \right) \cdot A + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right) \cdot B = 1, \\ \left(\frac{6+2\sqrt{5}}{4} \right) \cdot A + \left(\frac{6-2\sqrt{5}}{4} \right) \cdot B = 1. \end{cases}$$

Rješavanjem ovoga sustava (učinite to sami) dobijemo $(A, B) = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}} \right)$. Zbog toga je konačno rješenje zadatka niz

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right).$$

Primjedba 6. Niz a_n nazivamo *niz Fibonaccijevih brojeva*, a gornju formulu za opći član toga niza *Binetova formula*.

b) Analogno kao u prethodnom podzadatku dobivamo karakterističnu jednadžbu:

$$k^2 = k + 2.$$

Njezina su rješenja $k_1 = -1$ i $k_2 = 2$. Svako od tih rješenja ima kratnost 1, pa je opće rješenje zadane rekurzije:

$$b_n = A \cdot (-1)^n + B \cdot 2^n, \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

Nepoznate konstante $A, B \in \mathbb{R}$ odredimo iz početnih uvjeta $b_1 = -1$, $b_2 = 1$. U izraz za opće rješenje najprije uvrstimo $n = 1$, pa potom $n = 2$, te iskoristimo navedene početne uvjete:

$$\begin{cases} -1 = b_1 = A \cdot (-1)^1 + B \cdot 2^1, \\ 1 = b_2 = A \cdot (-1)^2 + B \cdot 2^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -A + 2 \cdot B = -1, \\ A + 4 \cdot B = 0 \end{cases} \Rightarrow (A, B) = (1, 0).$$

Dakle, traženi niz je

$$b_n = 1 \cdot (-1)^n + 0 \cdot 2^n = (-1)^n.$$

c) Analogno kao u a) podzadatku dobivamo karakterističnu jednadžbu:

$$k^2 = 2 \cdot k - 1.$$

Ona ima jedinstveno rješenje $k = 1$ i ono ima kratnost 2. Zbog toga će se kao koeficijent u izrazu kojim će biti zadano opće rješenje rekurzije pojaviti polinom stupnja $2-1=1$, odnosno polinom oblika $P(n) = A \cdot n + B$. Dakle, opće rješenje zadane rekurzije je:

$$c_n = (A \cdot n + B) \cdot 1^n = A \cdot n + B, \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

Nepoznate konstante $A, B \in \mathbb{R}$ odredimo iz početnih uvjeta $b_1 = 1$, $b_2 = 2$. U izraz za opće rješenje najprije uvrstimo $n = 1$, pa potom $n = 2$, te iskoristimo navedene početne uvjete:

$$\begin{cases} 1 = c_1 = A \cdot 1 + B, \\ 2 = c_2 = A \cdot 2 + B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A + B = 1, \\ 2 \cdot A + B = 2 \end{cases} \Rightarrow (A, B) = (1, 0).$$

Dakle, traženi niz je

$$c_n = 1 \cdot n + 0 = n.$$

Primjedba 7. Rješenje ovoga podzadatka je niz prirodnih brojeva. U zadatku 1.a) odredili smo još jednu rekurziju za isti niz. Ta je rekurzija bila različita od gornje. To pokazuje da *rekurzija kojom je jednoznačno zadan neki niz nije jedinstvena, ali rješenje svake rekurzije (uz odgovarajući broj zadanih početnih uvjeta) jest jedinstveno*.

d) Analogno kao u a) podzadatku dobivamo karakterističnu jednadžbu:

$$k^3 = (-2) \cdot k^2 + k + 2.$$

Nju možemo riješiti faktorizacijom:

$$\begin{aligned} k^3 + 2 \cdot k^2 - k - 2 &= 0, \\ k^2 \cdot (k+2) - (k+2) &= 0, \\ (k+2) \cdot (k^2 - 1) &= 0, \\ (k+2) \cdot (k+1) \cdot (k-1) &= 0. \end{aligned}$$

Odatle „očitamo“ da su sva rješenja te jednadžbe $k_1 = -2$, $k_2 = -1$ i $k_3 = 1$, te da svako od njih ima kratnost jednaku 1. Zbog toga je opće rješenje zadane rekurzije:

$$d_n = A \cdot (-2)^n + B \cdot (-1)^n + C \cdot 1^n = A \cdot (-2)^n + B \cdot (-1)^n + C, \quad A, B, C \in \mathbb{R}.$$

Nepoznate konstante $A, B, C \in \mathbb{R}$ odredimo uvrštavajući $n \in \{1, 2, 3\}$ i koristeći zadane početne uvjete:

$$\begin{cases} -3 = d_1 = A \cdot (-2)^1 + B \cdot (-1)^1 + C, \\ 5 = d_2 = A \cdot (-2)^2 + B \cdot (-1)^2 + C, \\ -9 = d_3 = A \cdot (-2)^3 + B \cdot (-1)^3 + C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \cdot A - B + C = -3, \\ 4 \cdot A + B + C = 5, \\ -8 \cdot A - B + C = -9 \end{cases} \Rightarrow (A, B, C) = (1, 1, 0).$$

(Ovaj sustav se „ručno“ najbrže riješi tako da se od prve jednadžbe oduzme treća, pa se potom zbroje prva i druga jednadžba, te dobivene vrijednosti uvrste u drugu jednadžbu.) Dakle, traženi niz je:

$$d_n = 1 \cdot (-2)^n + 1 \cdot (-1)^n = (-2)^n + (-1)^n.$$

e) Analogno kao u a) podzadatku (uz dodatnu zamjenu a_{n-3} s k^{n-3} i dijeljenje jednadžbe sa k^{n-3}) dobivamo karakterističnu jednadžbu:

$$k^3 = 3 \cdot k^2 - 3 \cdot k + 1.$$

Ona je ekvivalentna jednadžbi:

$$k^3 - 3 \cdot k^2 + 3 \cdot k - 1 = 0 \Leftrightarrow (k-1)^3 = 0.$$

Odatle „očitamo“ da ova jednadžba ima jedinstveno rješenje $k = 1$ i da je ono kratnosti

 TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU POLYTECHNICUM ZAGREBIENSE Elektrotehnički odjel	Matematika 2 (preddiplomski stručni studij elektrotehnike)	2.1. Rekurzije – riješeni zadaci
---	---	---

3. Zbog toga se u zapisu općega rješenja kao „koeficijent“ pojavljuje polinom stupnja $3-1=2$, tj. polinom oblika $P(n)=A \cdot n^2 + B \cdot n + C$, $A, B, C \in \mathbb{R}$. Tako zaključujemo da je opće rješenje zadane rekurzije:

$$e_n = (A \cdot n^2 + B \cdot n + C) \cdot 1^n = A \cdot n^2 + B \cdot n + C, \quad A, B, C \in \mathbb{R}.$$

Nepoznate konstante $A, B, C \in \mathbb{R}$ odredimo uvrštavajući $n \in \{1, 2, 3\}$ i koristeći zadane početne uvjete:

$$\begin{cases} 1 = e_1 = A \cdot 1^2 + B \cdot 1 + C, \\ 4 = e_2 = A \cdot 2^2 + B \cdot 2 + C, \\ 9 = e_3 = A \cdot 3^2 + B \cdot 3 + C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A + B + C = 1, \\ 4 \cdot A + 2 \cdot B + C = 4, \\ 9 \cdot A + 3 \cdot B + C = 9 \end{cases} \Rightarrow (A, B, C) = (1, 0, 0).$$

(Ovaj sustav se „ručno“ najbrže riješi tako da se od prve jednadžbe zasebno oduzmu najprije druga, a potom treća, čime se dobiva sustav dviju linearnih jednadžbi s dvije nepoznanice) Dakle, traženi niz je:

$$e_n = 1 \cdot n^2 + 0 \cdot n + 0 = n^2.$$

Primjedba 8. Niz kvadrata prirodnih brojeva rekurzivno smo zadali u zadatku 1.c). Rekurzija koju smo tada dobili razlikuje se od rekurzije u gornjem podzadatku.

Zadatak 7. Zadan je niz

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^n \cdot dx.$$

Pokažite da navedeni niz zadovoljava rekurziju:

$$\begin{cases} I_n = \frac{n-1}{n} \cdot I_{n-2}, & \text{za svaki } n \geq 3, \\ I_1 = 1, \quad I_2 = \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

Koristeći navedenu rekurziju, izvedite zatvorenu formulu za niz $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$, tj. izrazite I_n kao funkciju varijable n .

Rješenje: Zasebno provjeravamo valjanost rekurzije, odnosno početnih uvjeta. Pokažimo najprije valjanost svakoga početnoga uvjeta (to je lakši dio posla). Imamo redom:

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^1 \cdot dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot dx = (-\cos x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=0} - (-\cos 0) = 0 - (-1) = 1,$$

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^2 \cdot dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cdot dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \cdot (1 - \cos(2 \cdot x)) \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos(2 \cdot x)) \cdot dx =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(x - \frac{1}{2} \cdot \sin(2 \cdot x) \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \left(\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{2}\right)}_{=\sin\pi=0} \right) - \left(0 - \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\sin(2 \cdot 0)}_{=0} \right) \right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\pi}{2} - 0 - 0 + 0 \right) = \frac{\pi}{4}.$$

Dakle, vrijede oba početna uvjeta. Prelazimo na provjeru valjanosti rekurzije. Primjenom metode djelomične integracije dobivamo:

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^n \cdot dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{n-1} \cdot \sin x \cdot dx = \left| \begin{array}{l} u = (\sin x)^{n-1} \\ du = (n-1) \cdot (\sin x)^{n-2} \cdot \cos x \end{array} \right. \left| \begin{array}{l} v = \int \sin x \cdot dx = -\cos x \\ dv = \sin x \cdot dx \end{array} \right. =$$

$$= \left((n-1) \cdot (\sin x)^{n-2} \cdot (-\cos x) \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n-1) \cdot (\sin x)^{n-2} \cdot (-\cos x) \cdot \cos x \cdot dx =$$

$$= (n-1) \cdot \left(\underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=1} \right)^{n-2} \cdot \left(-\underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=0} \right) - \left(\underbrace{\sin 0}_{=0} \right)^{n-2} \cdot \left(-\underbrace{\cos 0}_{=1} \right) + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n-1) \cdot (\sin x)^{n-2} \cdot \cos^2 x \cdot dx$$

$$= (n-1) \cdot \underbrace{(1 \cdot 0 - 0 \cdot 1)}_{=0} + (n-1) \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{n-2} \cdot (1 - \sin^2 x) \cdot dx =$$

$$= (n-1) \cdot \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{n-2} \cdot dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^n \cdot dx \right) = (n-1) \cdot (I_{n-2} - I_n) \Rightarrow$$

$$I_n = (n-1) \cdot (I_{n-2} - I_n)$$

Iz ove jednakosti se lagano dobiva (učinite to sami)

$$I_n = \frac{n-1}{n} \cdot I_{n-2},$$

što smo i željeli pokazati.

Preostaje odrediti formulu za opći član niza I_n . Gornja rekurzija *nije* rekurzija s konstantnim koeficijentima jer koeficijent uz I_{n-2} ovisi o vrijednosti varijable n . Zbog toga je ne možemo riješiti koristeći karakterističnu jednadžbu. Međutim, možemo je

 TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU POLYTECHNICUM ZAGREBIENSE Elektrotehnički odjel	Matematika 2 (preddiplomski stručni studij elektrotehnike)	2.1. Rekurzije – riješeni zadaci
--	---	---

elegantno riješiti metodom teleskopiranja. Osnovna ideja je razlikovati dva slučaja: ako je n paran broj i ako je n neparan broj. Razmotrimo zasebno svaki od tih slučajeva.

Ako je n paran broj, onda su i brojevi $n-2, n-4, \dots$ parni brojevi. Napišimo sljedeći „lanac“ jednakosti:

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{\pi}{4}, \\ I_4 &= \frac{4-1}{4} \cdot I_2 = \frac{3}{4} \cdot I_2, \\ I_6 &= \frac{6-1}{6} \cdot I_4 = \frac{5}{6} \cdot I_4, \\ I_8 &= \frac{8-1}{8} \cdot I_6 = \frac{7}{8} \cdot I_6, \\ &\vdots \\ I_n &= \frac{n-1}{n} \cdot I_{n-2}. \end{aligned}$$

Množenjem posebno lijevih i posebno desnih strana tih jednakosti, te kraćenjem članova koji se pojavljuju na objema stranama dobivamo:

$$I_n = \frac{\pi}{4} \cdot \left(\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8} \cdot \dots \cdot \frac{n-1}{n} \right) = \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (n-1)}{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \dots \cdot n} \cdot \frac{\pi}{4}.$$

Ako je n neparan broj, onda su i brojevi $n-2, n-4, \dots$ neparni brojevi. Napišimo sljedeći „lanac“ jednakosti:

$$\begin{aligned} I_1 &= 1, \\ I_3 &= \frac{3-1}{3} \cdot I_1 = \frac{2}{3} \cdot I_1, \\ I_5 &= \frac{5-1}{5} \cdot I_3 = \frac{4}{5} \cdot I_3, \\ I_7 &= \frac{7-1}{7} \cdot I_6 = \frac{6}{7} \cdot I_5, \\ &\vdots \\ I_n &= \frac{n-1}{n} \cdot I_{n-2}. \end{aligned}$$

Množenjem posebno lijevih i posebno desnih strana tih jednakosti, te kraćenjem članova koji se pojavljuju na objema stranama dobivamo:

$$I_n = 1 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \dots \cdot \frac{n-1}{n} \right) = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (n-1)}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot n}.$$

 TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU POLYTECHNICUM ZAGREBIENSE Elektrotehnički odjel	Matematika 2 (preddiplomski stručni studij elektrotehnike)	2.1. Rekurzije – riješeni zadaci
---	---	---

Dakle, rješenje zadatka je:

$$I_n = \begin{cases} \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (n-1)}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots n}, & \text{ako je } n \text{ neparan,} \\ \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (n-1) \cdot \pi}{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdots n} \cdot \frac{\pi}{4}, & \text{inače.} \end{cases}$$

Primjedba 9. Dobivena rekurzija je vrlo korisna u računanju određenih integrala već za

manje vrijednosti n . Tako je npr. $I_6 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x \cdot dx$ vrlo sporo i mukotrplno računati

nizom pretvorbi u kosinuse višestrukih kutova. Međutim, iz netom riješenoga zadatka lagano proizlazi:

$$I_6 = \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 6} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{5}{32} \cdot \pi.$$

Zadatak 8. Zadan je niz

$$I_n = \int_0^{+\infty} x^{n-1} \cdot e^{-x} \cdot dx.$$

Pokažite da navedeni niz zadovoljava rekurziju:

$$\begin{cases} I_n = (n-1) \cdot I_{n-1}, & \text{za svaki } n \geq 2, \\ I_1 = 1. \end{cases}$$

Koristeći navedenu rekurziju, izvedite zatvorenu formulu za niz $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$, tj. izrazite I_n kao funkciju varijable n .

Rješenje: Dokažimo najprije sljedeću jednakost.

$$\text{Tvrđnja 1. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Dokaz: Uzastopnom primjenom L'Hôpital - Bernoullijeva pravila. Nazivnik polaznoga razlomka ostaje nepromijenjen ma koliko god puta ga derivirali. n -ta derivacija brojnika jednaka je $n!$ (što smo dokazali u *Matematici 1*), a ta vrijednost je konstanta. No, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{A}{e^x} = \left\{ \frac{A}{+\infty} \right\} = 0, \quad \forall A \in \mathbb{R}$, pa slijedi tvrdnja. ■

Sada možemo prijeći na rješavanje zadatka. Najprije provjerimo početni uvjet. Koristeći odgovarajuću definiciju nepravog integrala imamo redom:

 TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU POLYTECHNICUM ZAGREBIENSE Elektrotehnički odjel	Matematika 2 (preddiplomski stručni studij elektrotehnike)	2.1. Rekurzije – riješeni zadaci
---	---	---

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \int_0^{+\infty} x^{1-1} \cdot e^{-x} \cdot dx = \int_0^{+\infty} x^0 \cdot e^{-x} \cdot dx = \int_0^{+\infty} 1 \cdot e^{-x} \cdot dx = \int_0^{+\infty} e^{-x} \cdot dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\int_0^b e^{-x} \cdot dx \right) = \\
 &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left((-e^{-x}) \Big|_0^b \right) = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(-e^{-b} - \underbrace{\left(-e^{-0} \right)}_{=1} \right) = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{e^b} \right) \underset{\rightarrow +\infty}{\rightarrow} 1 - 0 = 1.
 \end{aligned}$$

Time smo provjerili početni uvjet i utvrdili da je on ispunjen. Preostaje provjeriti valjanost rekurzije. Primijenit ćemo metodu djelomične integracije i dokazanu tvrdnju. Imamo redom:

$$\begin{aligned}
 I_n &= \left| \begin{array}{l} u = x^{n-1} \\ du = (n-1) \cdot x^{n-2} \end{array} \quad \begin{array}{l} v = \int e^{-x} \cdot dx = -e^{-x} \\ dv = e^{-x} \cdot dx \end{array} \right| = \left(-x^{n-1} \cdot e^{-x} \right) \Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} (n-1) \cdot x^{n-2} \cdot (-e^{-x}) \cdot dx = \\
 &= (\text{prema Tvrđnji 1.}) = 0 + (n-1) \cdot \int_0^{+\infty} x^{n-2} \cdot e^{-x} \cdot dx = (n-1) \cdot I_{n-1}.
 \end{aligned}$$

Dakle, vrijedi i rekurzija. Time je prvi dio zadatka riješen.

Preostaje odrediti zatvorenu formulu za I_n . To je najlakše učiniti metodom teleskopiranja. Potpuno analogno kao u rješenju zadatka 5. e) dobivamo:

$$I_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) = (n-1)!.$$

Detalje raspišite sami za vježbu.

 TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU POLYTECHNICUM ZAGREBIENSE Elektrotehnički odjel	Matematika 2 (preddiplomski stručni studij elektrotehnike)	2.1. Rekurzije – riješeni zadaci
---	---	---

Rekurzije - domaća zadaća

1. Nađite što jednostavniju rekurziju (sa što manje početnih uvjeta) čije je jedinstveno rješenje niz:
 - a) $a_n = 5 \cdot n + 7$,
 - b) $b_n = 1 - n^2$,
 - c) $c_n = 2^{-n}$.
2. *Drp-banka* d.d. iz Špičkovine plaća štedišama 10% godišnjih dekurzivnih kamata na oročeni novac. Mutimir je odlučio početkom svake pojedine godine uložiti po 1000 €. Nađite što jednostavniju rekurziju (sa što manje početnih uvjeta) za iznos koji Mutimir ima na računu na kraju n -te godine. (Prepostavljamo da, osim navedenih uplata i pripisa kamata, nema drugih uplata i isplata.) Posebno, riješite zadatak za $n = 4$.
3. Neka je a_n ukupan broj različitih načina na koje račun od n kuna možemo platiti koristeći samo kovanice od 1 kn i 2 kn. (Pritom je $n \in \mathbb{N}$.) Poredak kovanica pri plaćanju je bitan. Pokažite da je $a_n = F_{n+1}$, gdje je F_n n -ti Fibonaccijev broj.
4. Promatramo sve binarne nizove duljine n (tj. nizove koji se sastoje od ukupno n nula i jedinica) u kojima nema uzastopnih nula. Pokažite da je ukupan broj svih takvih nizova jednak F_{n+2} , gdje je F_n n -ti Fibonaccijev broj. (*Napomena:* Binarni niz može početi s nulom.)
5. Metodom teleskopiranja riješite rekurzije:
 - a) $a_n = a_{n-1} + 2$, $a_1 = 2$;
 - b) $b_n = \frac{b_{n-1}}{2}$, $b_1 = 1024$;
 - c) $c_n = (n+1) \cdot c_{n-1}$, $c_1 = 2$.
6. Riješite rekurzije:
 - a) $a_n = 4 \cdot a_{n-1} - 3 \cdot a_{n-2}$, $a_1 = 5$, $a_2 = 11$;
 - b) $b_n = 8 \cdot (b_{n-1} - 2 \cdot b_{n-2})$, $b_1 = 8$, $b_2 = 48$;
 - c) $c_n = 6 \cdot c_{n-1} - 12 \cdot c_{n-2} + 8 \cdot c_{n-3}$, $c_1 = 16$, $c_2 = 20$, $c_3 = 0$.
7. Neka je $I_n = \int_0^1 \ln^n x \cdot dx$. Odredite zatvorenu formulu za niz $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

 TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU POLYTECHNICUM ZAGREBIENSE Elektrotehnički odjel	Matematika 2 (preddiplomski stručni studij elektrotehnike)	2.1. Rekurzije – riješeni zadaci
---	---	---

Upute i rezultati zadataka za domaću zadaću

1. Npr.

- a) $a_n = a_{n-1} - 5$, $a_1 = -2$;
- b) $b_n = b_{n-1} - 2 \cdot n + 1$, $b_1 = 0$,
- c) $c_n = \frac{c_{n-1}}{2}$, $c_1 = \frac{1}{2}$.

2. Neka je C_n iznos koji će Mutimir imati na računu na kraju n -te godine. Taj iznos se dobije tako da se iznosu na kraju prethodne $((n-1)$ -ve) godine pribroje uplata od 1000 € i ukupne kamate u n -toj godini. Te kamate se obračunavaju na glavnici koja iznosi $C_{n-1} + 1000$ jer se uplata od 1000 € obavlja na početku godine. Dakle, vrijede jednakosti:

$$\begin{cases} C_n = C_{n-1} + 1000 + \frac{10}{100} \cdot (C_{n-1} + 1000), \\ C_1 = 1000 + \frac{10}{100} \cdot 1000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_n = 1.1 \cdot C_{n-1} + 1100, \\ C_1 = 1100. \end{cases}$$

Odatle uz malo računanja slijedi $C_4 = 5105.1$. (Usporedite s rješenjem zadatka 2.)

3. Razmotrimo najprije slučajeve $n=1$ i $n=2$.

Za $n=1$ iznos od 1 kn možemo platiti na točno jedan način: kovanicom od 1 kn. Zbog toga je $a_1=1$.

Za $n=2$ iznos od 2 kn možemo platiti ili koristeći dvije kovanice od 1 kn ili jednu kovanicu od 2 kn. Zbog toga je $a_2=2$.

Promotrimo prvu (ili posljednju, svejedno je) kovanicu kojom plaćamo iznos od n kuna. Razlikujemo dva moguća slučaja.

I. Promatrana kovanica je kovanica od 1 kn. Tada preostali iznos od $n-1$ kuna možemo platiti na ukupno a_{n-1} načina.

II. Promatrana kovanica je kovanica od 2 kn. Tada preostali iznos od $n-2$ kuna možemo platiti na ukupno a_{n-2} načina.

Tako smo dobili da niz $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zadovoljava rekurziju $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, uz početne uvjete $a_1=1$ i $a_2=2$. Odatle izravno slijedi $a_n = F_{n+1}$, što smo i tvrdili.

 TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU POLYTECHNICUM ZAGREBIENSE Elektrotehnički odjel	Matematika 2 (preddiplomski stručni studij elektrotehnike)	2.1. Rekurzije – riješeni zadaci
--	---	---

4. Razmotrimo najprije slučajeve $n=1$ i $n=2$.

Za $n=1$ imamo dva binarna niza: to su 0 i 1. Zato je $a_1=2$.

Za $n=2$ mogući binarni nizovi su: 01, 10 i 11. Zato je $a_2=3$.

Promotrimo element na prvom mjestu niza duljine n . Moguća su točno dva slučaja:

- I. Niz počinje jedinicom. Tada iza te jedinice može doći bilo koja znamenka, tj. niz možemo nastaviti bilo kojim nizom duljine $n-1$. Tih nizova ima ukupno a_{n-1} .
- II. Niz počinje nulom. Tada iza te nule obavezno mora doći jedinica, a iza jedinice može doći bilo koji niz duljine $n-2$. Tih nizova ima ukupno a_{n-2} .

Tako smo dobili da niz $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zadovoljava rekurziju $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, uz početne uvjete $a_1 = 2$ i $a_2 = 3$. Odatle izravno slijedi $a_n = F_{n+2}$, što smo i tvrdili.

5. a) $a_n = 2 \cdot n$;
- b) $b_n = 2^{11-n}$;
- c) $c_n = (n+1)!$.
6. a) $a_n = 3^n + 2$;
- b) $b_n = (n+1) \cdot 2^{2-n}$;
- c) $c_n = (9 - n^2) \cdot 2^n$.

7. Najprije dokažimo pomoćnu tvrdnju.

Tvrđnja 2. $\lim_{x \rightarrow 0} (x \cdot \ln^n x) = 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

Dokaz: Neka je $L_n = \lim_{x \rightarrow 0} (x \cdot \ln^n x)$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Primjenom L'Hôpital – Bernoullijeva pravila dobivamo:

$$L_n = \lim_{x \rightarrow 0} (x \cdot \ln^n x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln^n x}{\frac{1}{x}} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{n \cdot \ln^{n-1} x \cdot \frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} \right) = -n \cdot \lim_{x \rightarrow 0} (x \cdot \ln^{n-1} x) = -n \cdot L_{n-1}.$$

Međutim,

$$L_1 = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x \cdot \ln^1 x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} \right) = -\lim_{x \rightarrow 0^+} (x) = -0 = 0.$$

Dakle, prvi član niza L_n jednak je nuli, a svi ostali članovi niza dobivaju se množenjem prvoga člana nekim prirodnim brojem (što se „iščitava“ iz dobivene rekurzije za L_n). Zbog toga su svi članovi niza L_n jednaki nuli, a to smo i tvrdili. ■

Sada primijetimo da je

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \int_0^1 \ln^1 x \cdot dx = \int_0^1 \ln x \cdot dx = \lim_{a \rightarrow 0^+} \left(\int_a^1 \ln x \cdot dx \right) = \lim_{a \rightarrow 0^+} \left((x \cdot \ln x - x) \Big|_a^1 \right) = \\
 &= \lim_{a \rightarrow 0^+} \left((1 \cdot \underbrace{\ln 1}_{=0} - 1) - (a \cdot \ln a - a) \right) = \lim_{a \rightarrow 0^+} (a - 1) - \lim_{a \rightarrow 0^+} (a \cdot \ln a) = \\
 &= (\text{Tvrđnja 2.}) = 0 - 1 - 0 = -1.
 \end{aligned}$$

Primjenom metode djelomične integracije i Tvrđnje 2. dobivamo:

$$\begin{aligned}
 I_n &= \left| \begin{array}{ll} u = \ln^n x & v = x \\ du = n \cdot \ln^{n-1} x \cdot \frac{1}{x} \cdot dx & dv = dx \end{array} \right| = \left(x \cdot \ln^n x \right) \Big|_0^1 - \int_0^1 x \cdot n \cdot \ln^{n-1} x \cdot \frac{1}{x} \cdot dx = \\
 &= \lim_{a \rightarrow 0^+} \left(x \cdot \ln^n x \right) \Big|_a^1 - \int_0^1 x \cdot n \cdot \ln^{n-1} x \cdot \frac{1}{x} \cdot dx = \lim_{a \rightarrow 0^+} \left(1 \cdot \underbrace{\ln^n 1}_{=(\ln 1)^n=0^n=0} - a \cdot \ln^n a \right) \Big|_a^1 - \\
 &\quad - \int_0^1 n \cdot \ln^{n-1} x \cdot dx = - \lim_{a \rightarrow 0} (a \cdot \ln^n a) - n \cdot \int_0^1 \ln^{n-1} x \cdot dx = (\text{Tvrđnja 2.}) = \\
 &= 0 - n \cdot I_{n-1} = -n \cdot I_{n-1}.
 \end{aligned}$$

Primjenom metode teleskopiranja odavde slijedi:

$$I_n = (-1) \cdot (-2) \cdot (-3) \cdot \dots \cdot (-n) = (-1)^n \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n) = (-1)^n \cdot n!.$$