

2. OSNOVE DISKRETNE TEORIJE VJEROJATNOSTI

2.1. SLUČAJNI POKUS.
ELEMENTARNI DOGAĐAJI I DOGAĐAJI.
KLASIČNA DEFINICIJA VJEROJATNOSTI.

2.1.1. SLUČAJNI POKUS

- Svaki *pokus* čiji ishod nije unaprijed određen (pod uvjetima u kojima se pokus provodi) nazivamo *slučajni pokus*.
- Primjeri slučajnih pokusa:
- nemamještena nogometna utakmica u 1. kolu HNL;
- ukupno trajanje rada nekoga uređaja sve do pojave prvoga kvara (zaokruženo na najbliži cijeli broj sati);
- rođenje (točno jednoga) djeteta (bez prethodnoga korištenja ultrazvuka koji otkriva spol djeteta);
- izvlačenje u jednom kolu igre LOTO 7/35;
- prosidba;
- bacanje simetričnoga novčića;
- bacanje simetrične igraće kocke.

2.1.1. SLUČAJNI POKUS

- Primjeri ne-slučajnih ili *determinističkih* pokusa čiji su rezultati jednoznačno određeni uz uvjete pod kojima se provodi pokus:
- zagrijavanje vode na 100°C ;
- prinošenje upaljene šibice suhom listu papira;
- okomiti hitac (uvis ili prema dolje);
- izlazak na ispit iz *Vjerojatnosti i statistike* bez prethodnoga učenja gradiva.

2.1.2. ELEMENTARNI DOGAĐAJI

- Svaki pojedini ishod slučajnoga pokusa zovemo *elementarni događaj* i označavamo s ω .
- Skup svih elementarnih događaja označavamo s Ω i nazivamo *prostor elementarnih događaja*.
- Prostor elementarnih događaja Ω ima svojstva:
- *Nikoja dva elementa nisu međusobno jednaka.*
- *Svaka izvedba slučajnoga pokusa kao ishod ima točno jedan element skupa Ω .*
- Zavisno o vrsti slučajnoga pokusa, skup Ω može biti *konačan ili beskonačan*.

2.1.3. ALGEBRA DOGAĐAJA

- Neka je Ω prostor elementarnih događaja.
- Promatramo skup (preciznije, *familiju*) \mathcal{F} podskupova skupa Ω koji ima sljedeća svojstva:
 - $\emptyset \in \mathcal{F}$;
 - $\Omega \in \mathcal{F}$;
 - $(A, B \in \mathcal{F}) \Rightarrow (A \cup B \in \mathcal{F})$;
 - $(A \in \mathcal{F}) \Rightarrow (A^C \in \mathcal{F})$.
- Familiju \mathcal{F} nazivamo *algebra događaja*.
- Elemente familije \mathcal{F} nazivamo *događaji*.

2.1.4. DOGAĐAJI

- Kao standardnu algebru događaja uzimamo *partitivni skup* skupa Ω , odnosno skup čiji su elementi svi podskupovi skupa Ω .
- Taj skup označavamo s $\mathcal{P}(\Omega)$.
- Tako intuitivno možemo reći da je *događaj* bilo koji podskup skupa Ω .
- Ako je Ω konačan skup, onda je svaki podskup skupa Ω ujedno i događaj (tj. vrijedi ekvivalencija: *biti događaj* \Leftrightarrow *biti podskup skupa Ω*).
- Ako je Ω beskonačan skup, gornja ekvivalencija ne mora vrijediti (tj. mogu postojati pravi podskupovi skupa Ω koji nisu događaji).

2.1.5. OPERACIJE S DOGAĐAJIMA

- Uobičajene operacije sa skupovima i njihovi rezultati ovdje imaju svoja “posebna imena”.
- Skup Ω (kao element familije \mathcal{F}) nazivamo *siguran događaj*. Taj će se događaj ostvariti pri *bilo kojem* izvođenju slučajnoga pokusa.
- **Oprez:** Razlikujte Ω kao prostor elementarnih događaja i Ω kao događaj!
- Prazan skup \emptyset (kao element familije \mathcal{F}) nazivamo *nemoguć događaj*. Taj se događaj neće ostvariti ni u jednom izvođenju slučajnoga pokusa.

2.1.5. OPERACIJE S DOGAĐAJIMA

- Događaj $A \cup B$, gdje su $A, B \in \mathcal{F}$, naziva se *zbroj događaja A i B*, te se označava s $A + B$.
- Taj će se događaj ostvariti pri izvedbi slučajnoga pokusa ako i samo ako se pri izvedbi toga pokusa ostvari barem jedan od događaja A i B .
- Događaj $A \cap B$, gdje su $A, B \in \mathcal{F}$, naziva se *umnožak događaja A i B*, te se označava s $A \cdot B$.
- Taj će se događaj ostvariti pri izvedbi slučajnoga pokusa ako i samo ako se pri izvedbi toga pokusa *istodobno* ostvare događaj A i događaj B .

2.1.5. OPERACIJE S DOGAĐAJIMA

- Ako vrijedi inkluzija $A \subset B$, onda kažemo da događaj A *povlači* događaj B .
- To znači da će se događaj B dogoditi ako se dogodio događaj A .
- Događaj $A \setminus B$ naziva se *razlika događaja* A i B . On se označava s $A - B$.
- Taj će se događaj dogoditi ako se dogodio događaj A , a nije se dogodio događaj B .
- Događaj $\Omega \setminus A$ nazivamo *događaj suprotan događaju* A i označavamo s A^C ili $-A$.
- Taj će se događaj dogoditi ako se nije dogodio događaj A .

2.1.5. OPERACIJE S DOGAĐAJIMA

- Ako vrijedi jednakost $A = B$, kažemo da su događaji A i B *jednaki*.
- Ako vrijedi jednakost $A \cap B = \emptyset$ (tj. ako su A i B disjunktni kao skupovi), kažemo da su događaji A i B *disjunktni* ili da se događaji A i B *međusobno isključuju*.
- To znači da će se događaj A dogoditi ako i samo ako se neće dogoditi događaj B .
- Bilo koja dva *elementarna* događaja se uvijek međusobno isključuju.

2.1.6. VJEROJATNOST

- Neka su Ω prostor elementarnih događaja i \mathcal{F} pripadna algebra događaja (npr. $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$).
- Svako preslikavanje $P : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ koje ima svojstva:
- **P1.** $P(\emptyset) = 0$;
- **P2.** $P(\Omega) = 1$;
- **P3.** $(A \subset B) \Rightarrow (P(A) \leq P(B))$ (tzv. svojstvo *monotonosti*)
- **P4.** $(A \cdot B = \emptyset) \Rightarrow (P(A + B) = P(A) + P(B))$ (tzv. svojstvo *aditivnosti*)
- naziva se *vjerojatnost* (na algebri događaja \mathcal{F}).
- Realan broj $P(A)$ nazivamo *vjerojatnost događaja A*.
- Uređenu trojku (Ω, \mathcal{F}, P) nazivamo *vjerojatnosni prostor*.
- Ako je Ω konačan skup, riječ je o *konačnom vjerojatnosnom prostoru*.
- Ako je Ω beskonačan skup, riječ je o *beskonačnom vjerojatnosnom prostoru*.

2.1.7. SVOJSTVA VJEROJATNOSTI

- **1.** Za bilo koja dva događaja $A, B \in \mathcal{F}$ vrijedi:
- $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B)$
- **2.** Za bilo koji događaj $A \in \mathcal{F}$ vrijedi:
- $P(A^C) = 1 - P(A).$
- **3.** Ako je Ω konačan vjerojatnosni prostor, tj. ako je $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ za neki $n \in \mathbb{N}$, onda je:

$$\begin{cases} P(\omega_i) \geq 0, \forall i \in [n]; \\ \sum_{i=1}^n P(\omega_i) = 1. \end{cases}$$

2.1.8. KLASIČAN VJEROJATNOSNI PROSTOR

- Neka je $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ *konačan* prostor elementarnih događaja.
- U većini slučajnih pokusa razumno je pretpostaviti da su svi *elementarni* događaji *jednako vjerojatni*, tj. da vrijedi jednakost:
 - $P(\omega_1) = \dots = P(\omega_n).$
- Budući da prema svojstvu 3. iz 2.1.7. za proizvoljnu vjerojatnost mora vrijediti jednakost $\sum_{i=1}^n P(\omega_i) = 1$, lako dobivamo:

$$P(\omega_i) = \frac{1}{n}, \quad \forall i \in [n].$$

2.1.8. KLASIČAN VJEROJATNOSNI PROSTOR

- Na taj je način funkcija P definirana na skupu Ω . Preostaje proširiti je na algebru \mathcal{F} .
- Svi elementi algebre \mathcal{F} su *konačni* skupovi (jer je Ω konačan skup).
- Zbog toga za svaki $A \in \mathcal{F}$ postoji jedinstveni $m \in \mathbb{N}$ takav da je $\text{card}(A) = m$.
- Tako za svaki $A \in \mathcal{F}$ definiramo:

$$P(A) := \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{m}{n}$$

2.1.8. KLASIČAN VJEROJATNOSNI PROSTOR

- Nije teško provjeriti da ovako definirana funkcija P ima svojstva **P1.** – **P4.**, tj. da je funkcija P vjerojatnost.
- Ovako dobivenu uređenu trojku (Ω, \mathcal{F}, P) nazivamo *klasičan (konačan) vjerojatnosni prostor*.
- Osnovna prednost ovakvoga definiranja funkcije P jest što za izračunavanje vjerojatnosti *svakoga* elementa A algebre \mathcal{F} ne moramo znati od *kojih* se točno elementarnih događaja sastoji događaj A , nego samo od *koliko* se točno elementarnih događaja sastoji događaj A .
- Zbog toga će nam u rješavanju zadataka s vjerojatnostima korisno poslužiti ranije naučene tehnike iz kombinatorike.

2.1.8. KLASIČAN VJEROJATNOSNI PROSTOR

- U terminologiji klasičnoga vjerojatnosnog prostora svaki element skupa Ω naziva se *mogući ishod*.
- Svaki element događaja A naziva se *povoljan ishod*.
- Zbog toga formula za računanje vjerojatnosti događaja A možemo izreći i ovako:

$$P(A) = \frac{\text{ukupan broj povoljnih ishoda}}{\text{ukupan broj mogućih ishoda}}.$$

2.1.9. NAPOMENA

- U rješavanju zadataka korisno je primijeniti sljedeće skupovne jednakosti:

1. $A - B = A \cdot B^C.$

2. $(A^C)^C = A.$

3. $(A + B)^C = A^C \cdot B^C.$

4. $(A \cdot B)^C = A^C + B^C.$

5. $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C.$

6. $(A + B) \cdot (A + C) = A + B \cdot C.$

2.1.9. NAPOMENA

- U rješavanju zadataka korisno je primijeniti i sljedeće jednakosti:

$$\mathbf{1.} \quad P(A + B) = P(A) + P(A^C \cdot B).$$

$$\mathbf{2.} \quad P(A) = P(A \cdot B) + P(A \cdot B^C).$$

$$\mathbf{3.} \quad P(A + B + C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cdot B) - P(A \cdot C) - P(B \cdot C) + P(A \cdot B \cdot C).$$