2.2. GEOMETRIJSKA VJEROJATNOST

DEFINICIJA I ODREĐIVANJE GEOMETRIJSKE VJEROJATNOSTI

2.2.1. SLUČAJAN POKUS S BESKONAČNIM VJEROJATNOSNIM PROSTOROM

- Promatramo slučajni pokus: *izbor realnoga broja iz segmenta* $[0, 1]$.
- U ovom je slučaju prostor elementarnih događaja beskonačan skup $[0, 1]$, pa vjerojatnost izbora bilo kojega broja ne možemo računati koristeći klasični (diskretni) vjerojatnosni model.
- Zbog toga je potrebno definirati funkciju vjerojatnosti i u takvim slučajevima.

2.2.2. MJERA U SKUPU $\mathbb{R}$

- Za *omeđene* i *izmjerive* skupove u standardnim euklidskim prostorima $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}^3$ dobro je definiran pojam *Lebesqueove mjere* skupa.
- Mi nećemo proučavati opću teoriju mjere, nego ćemo samo navesti potrebne rezultate.
- U prostoru $\mathbb{R}$ *Lebesqueova mjera* (kraće: *mjera*) nekoga njegovoga "karakterističnoga" podskupa (npr. $\langle a, b\rangle$, $\langle a, b]$, $[a, b\rangle$ i $[a, b]$) je *duljina* tog podskupa.
- Tako je mjera skupa $\{a\}$ jednaka 0, za svaki $a \in \mathbb{R}$.
- Mjera *svakoga* od intervala $\langle a, b\rangle$, $\langle a, b]$, $[a, b\rangle$ i $[a, b]$ jednaka je $b - a$. Mjera intervala oblika $\langle -\infty, a\rangle$ i $\langle b, +\infty\rangle$ jednaka je $+\infty$.
- Postoje podskupovi skupa $\mathbb{R}$ koji nemaju mjeru. Takav je npr. skup $[0, 1]\cap\mathbb{Q}$. Takve skupove nazivamo *neizmjerivima* i njih nećemo uzimati kao prostore elementarnih događaja.

2.2.3. MJERA U SKUPU $\mathbb{R}^2$

- Skup $\mathbb{R}^2$ možemo zamišljati kao "klasičnu" (dvodimenzionalnu) ravninu.
- U takvoj je ravnini *mjera* "tipičnih" podskupova (kvadrat, krug, trapez, ...) jednaka površini svakoga od njih.
- Npr. mjera skupa $[0,1]^2 := [0,1] \times [0,1]$ jednaka je 1.
- Postoje podskupovi skupa $\mathbb{R}^2$ čija je površina jednaka nuli. To su npr. bilo koja točka u ravnini, sve ravninske krivulje itd.
- Postoje podskupovi skupa $\mathbb{R}^2$ koji nemaju površinu. Takav je npr. skup $S = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{Q} \cap [0,1]\}$.

2.2.4. MJERA U SKUPU $\mathbb{R}^3$

- Skup $\mathbb{R}^3$ možemo zamišljati kao naš standardni (trodimenzionalni) prostor.
- U takvom je prostoru *mjera* nekoga njegovoga "tipičnoga" podskupa (kugla, prizma, piramida, stožac, valjak, ...) jednaka volumenu toga podskupa.
- Npr. mjera jedinične kugle jednaka je $\frac{4}{3}\cdot\pi$.
- Postoje podskupovi skupa $\mathbb{R}^3$ čiji je volumen jednak 0. To su npr. sve ravninske plohe.
- Postoje podskupovi skupa $\mathbb{R}^3$ koji nemaju volumen. To je npr. skup

$$S=\{(x,y,z): x,y,z\in\mathbb{Q}\cap[0,1]\}.$$

2.2.5. NAPOMENA

- Opći pojam površine u $\mathbb{R}^2$, odnosno volumena u $\mathbb{R}^3$, relativno je teško *definirati*. Definicija tih pojmova zahtijeva razmatranja koja prelaze okvire ovoga predmeta.
- Zbog toga ćemo u rješavanju zadataka promatrati samo podskupove "klasične" ravnine i "klasičnoga" trodimenzionalnoga prostora čije površine, odnosno volumene, možemo relativno jednostavno izračunati.

2.2.6. GEOMETRIJSKA VJEROJATNOST

- Ako su prostor elementarnih događaja $\mathbf{\Omega}$ i skup svih događaja povoljnih za neki događaj A *omeđeni* i *izmjerivi* podskupovi skupa $\mathbb{R}^n$ (tj. skupovi koji imaju mjeru), onda se vjerojatnost događaja A *definira* s:

$$P(A) := \frac{\text{mjera skupa } A}{\text{mjera skupa } \Omega}$$

- Može se pokazati da ovako definirana funkcija ima svojstva P1. – P4. iz prethodne točke, tj. da je P doista vjerojatnost.

1. Iz segmenta [–2, 6] na slučajan način biramo točno jedan realan broj. Izračunajte vjerojatnost da izabrani broj:

a) nije strogo negativan;
b) nije strogo veći od 3;
c) nije strogo manji od –1 i strogo veći od 1.

Rješenje: Primijetimo da je

$$\Omega = [-2, 6],$$

pa je mjera skupa Ω jednaka duljini segmenta $[-2,\ 6]$. Ta duljina jednaka je

$$6-(-2)=8,$$

pa je $m(\Omega) = 8$.

a) Skup svih povoljnih ishoda je $A=[0,\ 6]$. Njegova mjera jednaka je

$$m(A)=6-0=6.$$

Zbog toga je tražena vjerojatnost jednaka:

$$P(A)=\frac{m(A)}{m(\Omega)}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}=0.75.$$

b) Skup svih povoljnih ishoda je $B=[-2,\ 3]$. Njegova mjera jednaka je

$$m(B)=3-(-2)=5.$$

Zbog toga je tražena vjerojatnost jednaka:

$$P(B)=\frac{m(B)}{m(\Omega)}=\frac{5}{8}=0.625.$$

c) Skup svih povoljnih ishoda je $C=[-1,\ 1]$. Njegova mjera jednaka je

$$m(C)=1-(-1)=2.$$

Zbog toga je tražena vjerojatnost jednaka:

$$P(C)=\frac{m(C)}{m(\Omega)}=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}=0.25.$$

2. Na slučajan način biramo točno jedan broj iz intervala $[0, 2\cdot\pi\rangle$. Izračunajte vjerojatnost da će kosinus izabranoga broja biti strogo veći od $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Rješenje: Skup svih mogućih ishoda je $\Omega = [0, 2\cdot\pi\rangle$. Njegova je mjera jednaka:

$$m(\Omega) = 2\cdot\pi - 0 = 2\cdot\pi.$$

Odredimo skup svih povoljnih ishoda A.

Skup svih rješenja nejednadžbe $\cos x > \frac{\sqrt{3}}{2}$ na intervalu $[0, 2\cdot\pi\rangle$ je

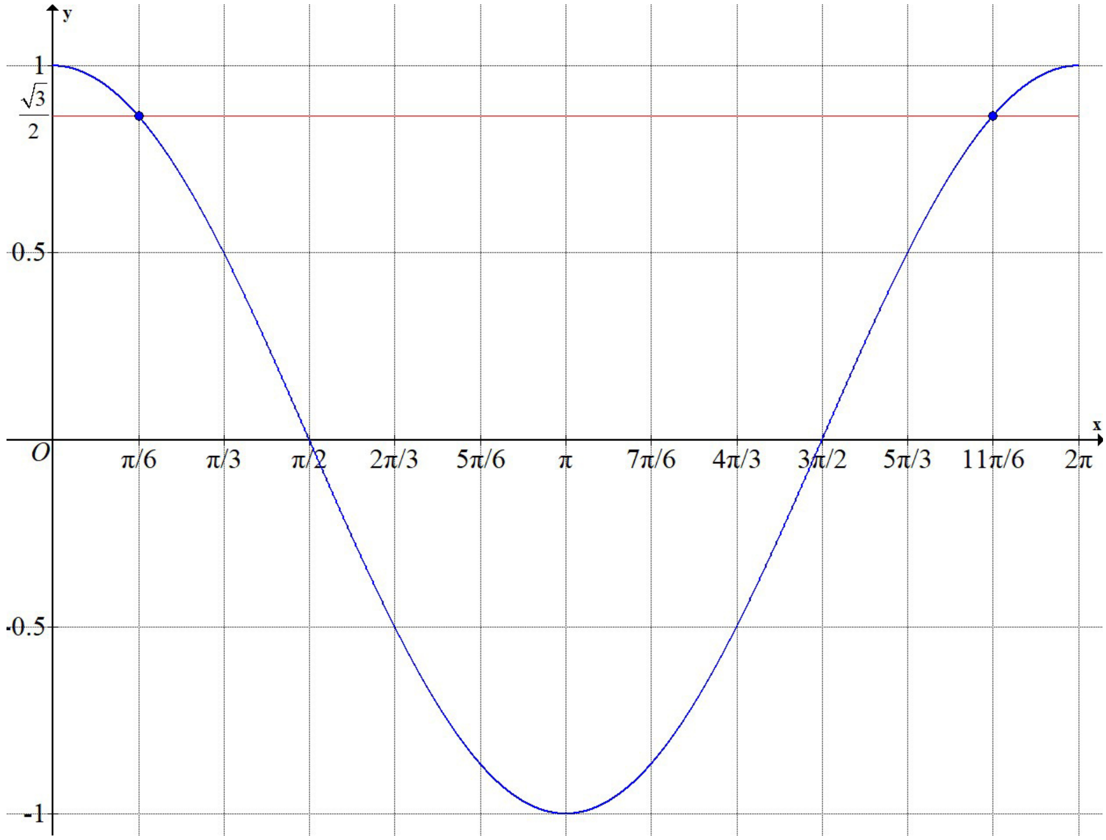
$$A = \left[0, \frac{\pi}{6}\right\rangle \cup \left\langle \frac{11}{6}\cdot\pi, 2\cdot\pi\right\rangle$$

(vidjeti sliku 1.) Njegova je mjera jednaka:

$$\begin{aligned} m(A) &= \left(\frac{\pi}{6} - 0\right) + \left(2\cdot\pi - \frac{11}{6}\cdot\pi\right) = \\ &= \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = \\ &= \frac{2}{6}\cdot\pi = \\ &= \frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

Zbog toga je tražena vjerojatnost jednaka:

$$\begin{aligned} p &= \frac{m(A)}{m(\Omega)} = \\ &= \frac{\frac{\pi}{3}}{2\cdot\pi} = \\ &= \frac{1}{6} = \\ &= 0.1\dot{6}. \end{aligned}$$


y
1
$\frac{\sqrt{3}}{2}$
0.5
-0.5
-1
x
O
π/6
π/3
π/2
2π/3
5π/6
π
7π/6
4π/3
3π/2
5π/3
11π/6
2π

Slika 1.

3. Slučajno i nezavisno biramo dva (realna) broja iz segmenta $[0,3]$. Izračunajte vjerojatnost da je razlika prvoga i drugoga izabranoga broja strogo manja od 1.

Rješenje: Neka su x i y redom prvi, odnosno drugi izabrani broj. Budući da je poredak brojeva bitan, njih shvaćamo kao uređeni par (x, y). Svaki od tih brojeva pripada skupu $[0,3]$, pa (x, y) pripada skupu $[0,3]\times[0,3]=[0,3]^2$. Dakle, skup svih mogućih ishoda je

$$\Omega=[0,3]^2.$$

Razlika prvoga i drugoga broja treba biti strogo manja od 1. To znači da je $x-y<1$. Dakle, skup svih povoljnih događaja je

$$A=\left\{(x,y)\in[0,\ 3]^2 : x-y<1\right\}.$$

Zbog toga je tražena vjerojatnost jednaka:

$$\begin{aligned} p&=\frac{m(A)}{m(\Omega)}=\\ &=\frac{m(A)}{(3-0)\cdot(3-0)}=\\ &=\frac{m(A)}{3^2}=\\ &=\frac{m(A)}{9}. \end{aligned}$$

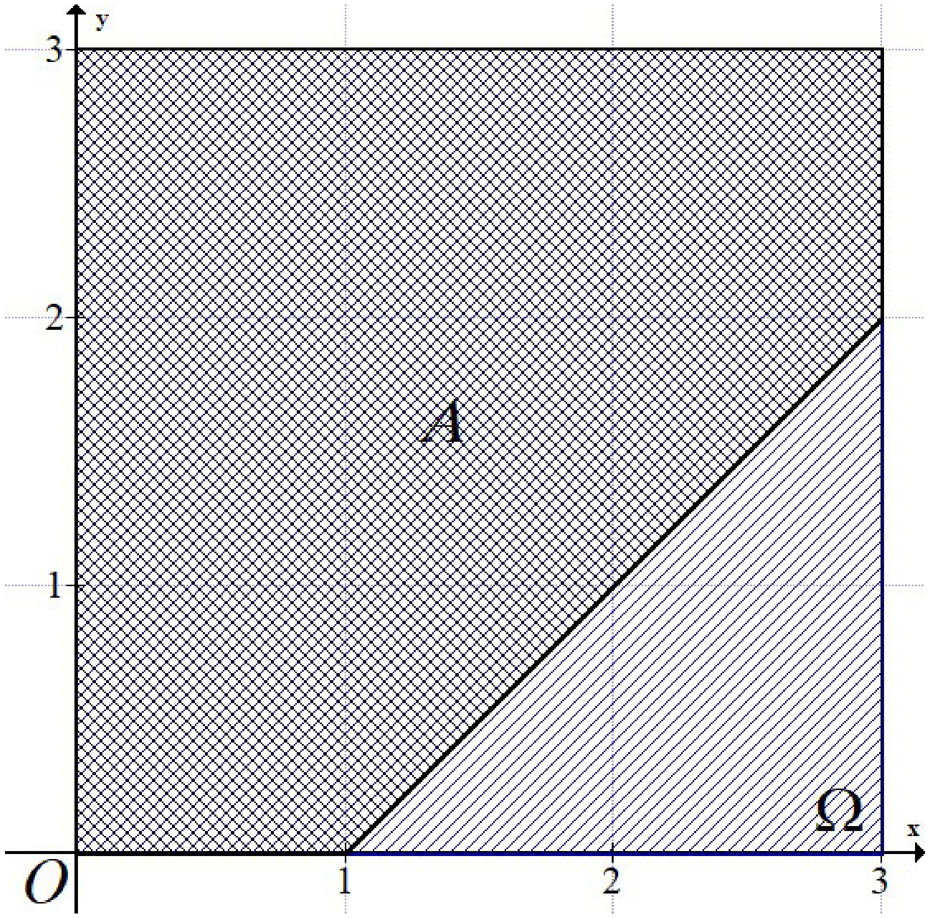
Preostaje odrediti $m(A)$, odnosno površinu skupa A. Prikažimo taj skup u pravokutnom koordinatnom sustavu u ravnini. Primijetimo da je skup svih točaka u ravnini čije koordinate zadovoljavaju jednakost $x-y=1$ zapravo pravac $y=x-1$. Dobivamo sliku 2.

Očito je

$$\begin{aligned} m(A)&=3\cdot 3-\frac{2\cdot 2}{2}=\\ &=9-2=\\ &=7, \end{aligned}$$

pa je tražena vjerojatnost jednaka

$$p=\frac{7}{9}=0.\dot{7}.$$



Slika 2.

4. Iz skupa $S = (-1,\ 1] \times [0,\ 4)$ na slučajan način biramo točno jednu točku (x, y).

a) Izračunajte vjerojatnost da za koordinate izabrane točke vrijedi nejednakost $y > x^2 + 2$.

b) Bismo li dobili isti rezultat u svakom od sljedećih slučajeva:

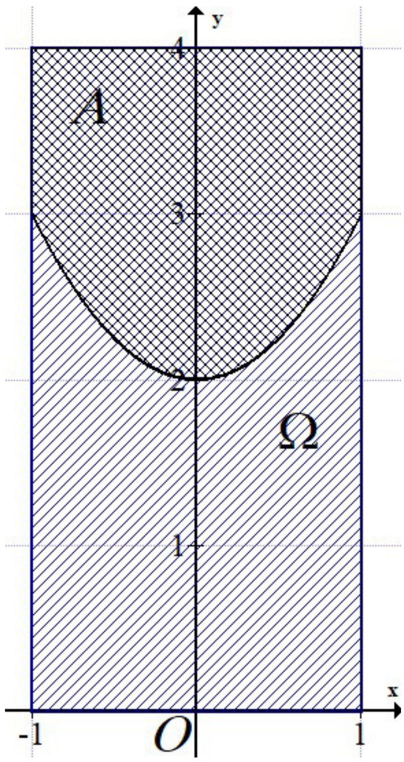
- $S = \langle -1,1 \rangle \times \langle 0,4 \rangle$;
- $S = [-1,\ 1) \times (0,\ 4]$;
- $S = [-1,\ 1] \times [0,\ 4]$;
- $y \geq x^2 + 2$.

Precizno obrazložite svoje odgovore.

Rješenje: Označimo

$$A := \{ y > x^2 + 2 : x \in (-1,1],\ y \in [0,4) \}.$$

Vidjeti sliku 3.



Slika 3.

Iz navedene slike odmah slijedi:

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)} =$$
$$= \frac{2 \cdot 4 - \int\limits_{-1}^{1} (x^2 + 2) \cdot \mathrm{d}x}{2 \cdot 4} =$$
$$= \frac{2 \cdot 4 - 2 \cdot \int\limits_{0}^{1} (x^2 + 2) \cdot \mathrm{d}x}{2 \cdot 4} =$$
$$= \frac{4 - \left(\frac{1}{3} \cdot x^3 + 2 \cdot x\right)\Big|_0^1}{4} =$$
$$= \frac{4 - \left(\frac{1}{3} + 2 - 0\right)}{4} =$$
$$= \frac{4 - \frac{7}{3}}{4} =$$
$$= \frac{5}{12} \approx 0.41667.$$

Pravci $x = -1$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 4$ i krivulja $y = x^2 + 2$ su skupovi površine nula. Zbog toga bismo isti rezultat dobili i u svakom od podslučajeva navedenih u ostatku zadatka.

5. Izračunajte vjerojatnost da slučajno odabrana točka kocke pripada kocki upisanoj:

a) sferi;

b) kugli.

Rješenje: U ovom zadatku je Ω zadana kocka. Neka je $a > 0$ duljina osnovnoga brida kocke. Tada je volumen kocke jednak $V = a^3$ kub. jed. Zbog toga je

$$m(\Omega) = a^3.$$

a) Sfera (kuglina površina) je ravninska ploha. Prema razmatranju iz točke 2.2.4., njezin je volumen jednak 0. Označimo li

$$A = \{\text{odabrana točka pripada sferi upisanoj u kocku}\},$$

zaključujemo da je $m(A) = 0$. Zbog toga je tražena vjerojatnost jednaka 0.

b) Polumjer *bilo kojoj* kocki upisane kugle jednak je polovici njezina osnovnoga brida. Dakle, $r = \frac{a}{2}$, pa je volumen kocki upisane kugle jednak:

$$\begin{aligned} V &= \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi = \\ &= \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^3 \cdot \pi = \\ &= \frac{a^3}{6} \cdot \pi. \end{aligned}$$

Označimo li

$$B := \{\text{odabrana točka pripada kocki upisanoj kugli}\},$$

zaključujemo da je

$$m(B) = \frac{a^3}{6} \cdot \pi.$$

Zbog toga je tražena vjerojatnost jednaka

$$\begin{aligned} P(B) &= \frac{m(B)}{m(\Omega)} = \\ &= \frac{\pi}{6} \approx 0.5236. \end{aligned}$$

6. Amadea i Bartolomeo su se dogovorili da će se sastati na Trgu bana Josipa Jelačića („ispod konja“) između 18 i 19 sati. Osoba koja dođe prva čeka najviše 10 minuta, a potom odlazi. Pretpostavimo da će oboje doći nezavisno jedno o drugom. Izračunajte vjerojatnost da će se njih dvoje sastati.

Rješenje: Neka su a i b redom vrijeme Amadeina, odnosno Bartolomeova dolaska na trg. Vremenu dolaska svake osobe bijektivno pridružimo neki realan broj iz segmenta $[0,60]$. Naime, prema podacima iz zadatka, vrijeme dolaska svake osobe je oblika: 18 sati x minuta, pri čemu je $x \in [0,60]$. Zbog toga bez smanjenja općenitosti za skup elementarnih događaja možemo uzeti:

$$\Omega = \{(a,b) : a,b \in [0,60]\}.$$

Pokažimo najprije da je događaj

$$B_1 = \{\text{Amadea i Bartolomeo su istovremeno stigli na trg}\}$$

nemoguć. U tu svrhu uočimo da vrijedi jednakost

$$B_1 = \{(l,b) \in \Omega : b = l\}$$

(u smislu jednakosti skupova).

Krivulja $K \ldots b = l$ je pravac (simetrala I. i III. kvadranta). Površina toga pravca jednaka nuli. Skup B_1 je dio krivulje K unutar skupa Ω, pa je i njegova površina jednaka nuli. Zbog toga je

$$P(B_1) = 0.$$

To znači da je događaj B_1 nemoguć, što smo i željeli pokazati.

Budući da je događaj istovremena dolaska obiju osoba nemoguć, zaključujemo da točno jedna osoba mora prva doći na trg. Pretpostavimo najprije da će prva doći Amadea. To znači da vrijedi nejednakost $b > a$. Prema podacima iz zadatka, u ovom će se slučaju Amadea i Bartolomeo sastati ako vrijedi nejednakost

$$0 \le b \le a + 10.$$

Pretpostavimo sada da će prvi doći Bartolomeo. To znači da vrijedi nejednakost $a > b$. U ovom će se slučaju Amadea i Bartolomeo sastati ako vrijedi nejednakost

$$0 \le a \le b + 10.$$

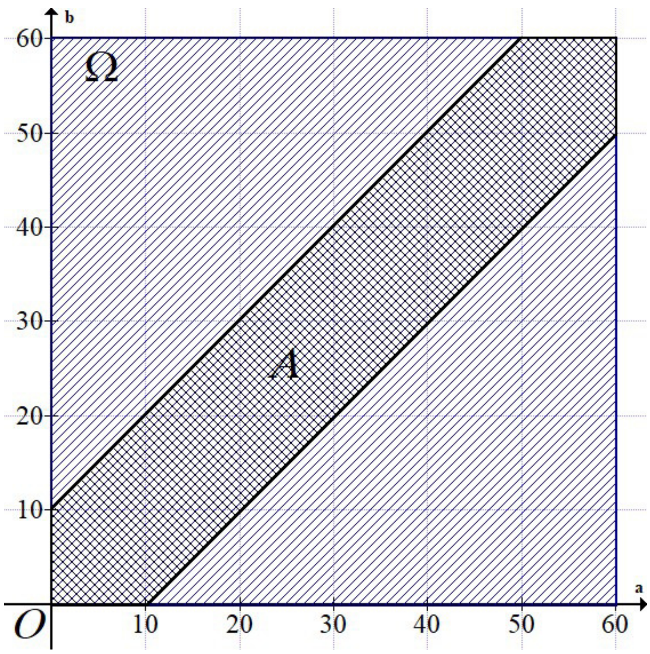
Dakle, Amadea i Bartolomeo će se sastati ako i samo ako vrijedi ili nejednakost $0 \le b \le a+10$ ili nejednakost $0 \le a \le b+10$. Te dvije nejednakosti možemo objediniti u nejednakost

$$|a-b| \le 10.$$

Označimo skup svih povoljnih događaja s A, pa je:

$$A = \{(a,b) \in \Omega : |a-b| \le 10\}.$$

Skicirajmo skupove Ω i A u pravokutnom koordinatnom sustavu u ravnini. Dobivamo sliku 4.



Slika 4.

Izračunajmo mjere (tj. površine) skiciranih skupova. Mjera skupa Ω jednaka je:

$$m(\Omega) = 60^2 = 3600 \text{ kv. jed.}$$

Mjera skupa A jednaka je:

$$\begin{aligned} m(A) &= 60^2 - 2 \cdot \frac{50 \cdot 50}{2} = \\ &= 60^2 - 50^2 = \\ &= 3600 - 2500 = \\ &= 1100 \text{ kv. jed.} \end{aligned}$$

Dakle, tražena vjerojatnost je jednaka:

$$P(A)=\frac{m(A)}{m(\Omega)}=$$
$$=\frac{1100}{3600}=$$
$$=\frac{11}{36}.$$

Primijetimo da je $p<\frac{1}{2}$, što znači da je vjerojatnost da se Amadea i Bartolomeo neće sastati strogo veća od vjerojatnosti sastanka.