2.2. GEOMETRIJSKA VJEROJATNOST

DEFINICIJA I ODREĐIVANJE GEOMETRIJSKE VJEROJATNOSTI

2.2.1. SLUČAJAN POKUS S BESKONAČNIM VJEROJATNOSNIM PROSTOROM

- Promatramo slučajni pokus: *izbor realnoga broja iz segmenta* $[0, 1]$.
- U ovom je slučaju prostor elementarnih događaja beskonačan skup $[0, 1]$, pa vjerojatnost izbora bilo kojega broja ne možemo računati koristeći klasični (diskretni) vjerojatnosni model.
- Zbog toga je potrebno definirati funkciju vjerojatnosti i u takvim slučajevima.

2.2.2. MJERA U SKUPU $\mathbb{R}$

- Za *omeđene* i *izmjerive* skupove u standardnim euklidskim prostorima $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}^3$ dobro je definiran pojam *Lebesqueove mjere* skupa.
- Mi nećemo proučavati opću teoriju mjere, nego ćemo samo navesti potrebne rezultate.
- U prostoru $\mathbb{R}$ *Lebesqueova mjera* (kraće: *mjera*) nekoga njegovoga "karakterističnoga" podskupa (npr. $\langle a,\ b\rangle$, $\langle a,\ b]$, $[a,\ b\rangle$ i $[a,\ b]$) je *duljina* tog podskupa.
- Tako je mjera skupa $\{a\}$ jednaka 0, za svaki $a \in \mathbb{R}$.
- Mjera *svakoga* od intervala $\langle a,\ b\rangle$, $\langle a,\ b]$, $[a,\ b\rangle$ i $[a,\ b]$ jednaka je $b - a$. Mjera intervala oblika $\langle -\infty,\ a\rangle$ i $\langle b,\ +\infty\rangle$ jednaka je $+\infty$.
- Postoje podskupovi skupa $\mathbb{R}$ koji nemaju mjeru. Takav je npr. skup $[0,\ 1]\cap\mathbb{Q}$. Takve skupove nazivamo *neizmjerivima* i njih nećemo uzimati kao prostore elementarnih događaja.

2.2.3. MJERA U SKUPU $\mathbb{R}^2$

- Skup $\mathbb{R}^2$ možemo zamišljati kao "klasičnu" (dvodimenzionalnu) ravninu.
- U takvoj je ravnini *mjera* "tipičnih" podskupova (kvadrat, krug, trapez, ...) jednaka površini svakoga od njih.
- Npr. mjera skupa $[0,1]^2 := [0,1] \times [0,1]$ jednaka je 1.
- Postoje podskupovi skupa $\mathbb{R}^2$ čija je površina jednaka nuli. To su npr. sve pojedinačne točke, sve ravninske krivulje itd.
- Postoje podskupovi skupa $\mathbb{R}^2$ koji nemaju površinu. Takav je npr. skup $S = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{Q} \cap [0,1]\}$.

2.2.4. MJERA U SKUPU $\mathbb{R}^3$

- Skup $\mathbb{R}^3$ možemo zamišljati kao naš standardni (trodimenzionalni) prostor.
- U takvom je prostoru *mjera* nekoga njegovoga "tipičnoga" podskupa (kugla, prizma, piramida, stožac, valjak, ...) jednaka volumenu toga podskupa.
- Npr. mjera jedinične kugle jednaka je $\frac{4}{3} \cdot \pi$.
- Postoje podskupovi skupa $\mathbb{R}^3$ čiji je volumen jednak 0. To su npr. sve ravninske plohe.
- Postoje podskupovi skupa $\mathbb{R}^3$ koji nemaju volumen. To je npr. skup

$$S = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{Q} \cap [0,1]\}.$$

2.2.5. NAPOMENA

- Opći pojam površine u $\mathbb{R}^2$, odnosno volumena u $\mathbb{R}^3$, relativno je teško *definirati*. Definicija tih pojmova zahtijeva razmatranja koja prelaze okvire ovoga predmeta.
- Zbog toga ćemo u rješavanju zadataka promatrati samo podskupove "klasične" ravnine i "klasičnoga" trodimenzionalnoga prostora čije površine, odnosno volumene, možemo relativno jednostavno izračunati.

2.2.6. GEOMETRIJSKA VJEROJATNOST

- Ako su prostor elementarnih događaja $\mathbf{\Omega}$ i skup svih događaja povoljnih za neki događaj A *omeđeni* i *izmjerivi* podskupovi skupa $\mathbb{R}^n$ (tj. skupovi koji imaju mjeru), onda se vjerojatnost događaja A *definira* s:

$$P(A) := \frac{\text{mjera skupa } A}{\text{mjera skupa } \Omega}$$

- Može se pokazati da ovako definirana funkcija ima svojstva **P1.** – **P4.** iz prethodne točke, tj. da je P doista vjerojatnost.