1. Iz segmenta [–2, 6] na slučajan način biramo točno jedan realan broj. Izračunajte vjerojatnost da izabrani broj:

a) nije strogo negativan;
b) nije strogo veći od 3;
c) nije strogo manji od –1 i strogo veći od 1.

2. Na slučajan način biramo točno jedan broj iz intervala $\left[0, 2\cdot\pi\right\rangle$. Izračunajte vjerojatnost da će kosinus izabranoga broja biti strogo veći od $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

3. Slučajno i nezavisno biramo dva broja iz segmenta $[0,\ 3]$. Izračunajte vjerojatnost da je razlika prvoga i drugoga izabranoga broja strogo manja od 1.

4. Iz skupa $S = (-1,\ 1]\times[0,\ 4)$ na slučajan način biramo točno jednu točku (x, y).

a) Izračunajte vjerojatnost da za koordinate izabrane točke vrijedi nejednakost $y > x^2 + 2$.

b) Bismo li dobili isti rezultat u svakom od sljedećih slučajeva:

- $S = \langle -1,1\rangle\times\langle 0,4\rangle$;
- $S = [-1,\ 1)\times(0,\ 4]$;
- $S = [-1,\ 1]\times[0,\ 4]$;
- $y \geq x^2 + 2$.

Precizno obrazložite svoje odgovore.

5. Izračunajte vjerojatnost da slučajno odabrana točka kocke pripada kocki upisanoj:

a) sferi;
b) kugli.

6. Lidija i Bruno su se dogovorili da će se sastati na Trgu bana Josipa Jelačića („ispod konja“) između 18 i 19 sati. Osoba koja dođe prva čeka najviše 10 minuta, a potom odlazi. Pretpostavimo da će oboje doći nezavisno jedno o drugom. Izračunajte vjerojatnost da će se njih dvoje sastati.

Rezultati zadataka

1. Primijetimo da je $\Omega = [-2,\ 6]$, pa je mjera skupa Ω jednaka duljini segmenta $[-2,\ 6]$. Ta duljina jednaka je $6-(-2)=8$, pa je $m(\Omega) = 8$.

a) Skup svih povoljnih ishoda je $A=[0,\ 6]$. Njegova mjera jednaka je $m(A)=6-0=6$. Zbog toga je tražena vjerojatnost jednaka:

$$P(A)=\frac{m(A)}{m(\Omega)}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}=0.75\,.$$

b) Skup svih povoljnih ishoda je $B=[-2,\ 3]$. Njegova mjera jednaka je $m(B)=3-(-2)=5$. Zbog toga je tražena vjerojatnost jednaka:

$$P(B)=\frac{m(B)}{m(\Omega)}=\frac{5}{8}=0.625\,.$$

c) Skup svih povoljnih ishoda je $C=[-1,\ 1]$. Njegova mjera jednaka je $m(C) = 2$. Zbog toga je tražena vjerojatnost jednaka:

$$P(C)=\frac{m(C)}{m(\Omega)}=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}=0.25\,.$$

2. Skup svih mogućih ishoda je $\Omega=[0, 2\cdot\pi\rangle$. Njegova je mjera jednaka:

$$m(\Omega)=2\cdot\pi-0=2\cdot\pi.$$

Odredimo skup svih povoljnih ishoda A. Skup svih rješenja nejednadžbe $\cos x>\frac{\sqrt{3}}{2}$ na intervalu $[0, 2\cdot\pi\rangle$ je $A=\left[0,\frac{\pi}{6}\right\rangle\cup\left\langle\frac{11}{6}\cdot\pi, 2\cdot\pi\right]$. Njegova je mjera jednaka:

$$m(A)=\left(\frac{\pi}{6}-0\right)+\left(2\cdot\pi-\frac{11}{6}\cdot\pi\right)=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}=\frac{2}{6}\cdot\pi=\frac{\pi}{3}.$$

Zbog toga je tražena vjerojatnost jednaka:

$$p=\frac{m(A)}{m(\Omega)}=\frac{\frac{\pi}{3}}{2\cdot\pi}=\frac{1}{6}=0.1\dot{6}.$$

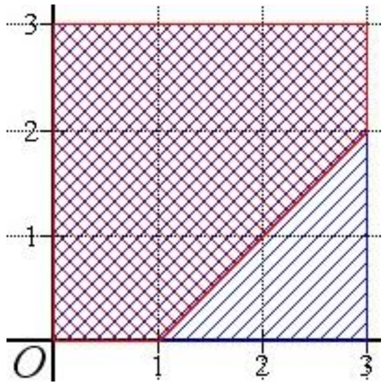
3. Neka su x i y redom prvi, odnosno drugi izabrani broj. Budući da je poredak brojeva bitan, njih shvaćamo kao uređeni par (x, y). Svaki od tih brojeva pripada skupu $[0,\ 3]$, pa (x, y) pripada skupu $[0,3]\times[0,3]=[0,\ 3]^2$. Dakle, skup svih mogućih ishoda je $\Omega=[0,\ 3]^2$.

Razlika prvoga i drugoga broja treba biti strogo manja od 1. To znači da je $x-y<1$. Dakle, skup svih povoljnih događaja je $A=\left\{(x, y)\in[0,\ 3]^2 : x-y<1\right\}$.

Zbog toga je tražena vjerojatnost jednaka:

$$p = \frac{m(A)}{m(\Omega)} = \frac{m(A)}{(3-0)\cdot(3-0)} = \frac{m(A)}{3^2} = \frac{m(A)}{9}.$$

Preostaje odrediti $m(A)$, odnosno površinu skupa A. Prikažimo taj skup u pravokutnom koordinatnom sustavu u ravnini. Primijetimo da je skup svih točaka u ravnini čije koordinate zadovoljavaju jednakost $x-y=1$ zapravo pravac $y=x-1$. Dobivamo sliku 1.



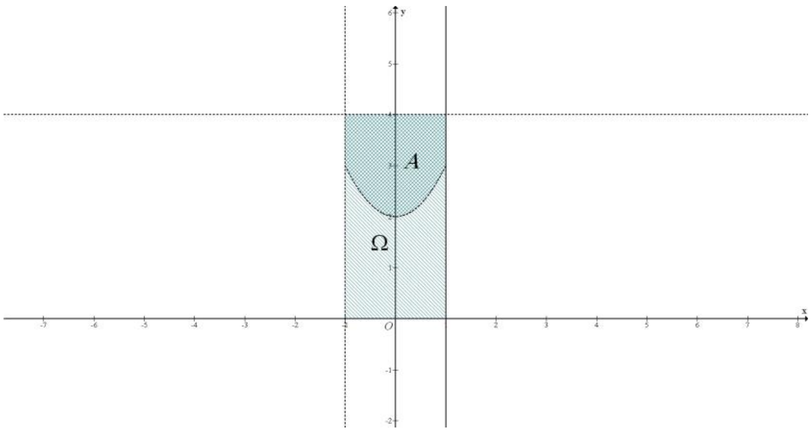
Slika 1.

Očito je

$$m(A) = 3\cdot 3 - \frac{2\cdot 2}{2} = 9-2 = 7,$$

pa je tražena vjerojatnost jednaka $p = \frac{7}{9} = 0.\dot{7}$.

4. Označimo $A := \{y > x^2+2 : x \in \langle -1, 1], y \in [0,4\rangle\}$. Vidjeti sliku 2.



Slika 2.

Iz navedene slike odmah slijedi

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)} = \frac{2\cdot 4 - \int_{-1}^{1}(x^2+2)\cdot \mathrm{d}x}{2\cdot 4} = \frac{5}{12} \approx 0.41667.$$

Pravci $x=-1,\ x=1,\ y=0,\ y=4$ i krivulja $y=x^2+2$ su skupovi površine nula. Zbog toga bismo navedeni rezultat dobili i u svakom od podslučajeva navedenih u ostatku zadatka.

5. U ovom zadatku je Ω zadana kocka. Neka je $a \geq 0$ duljina osnovnoga brida kocke. Tada je volumen kocke jednak $V=a^3$ kub. jed. Zbog toga je

$$m(\Omega)=a^3 .$$

a) Sfera (kuglina površina) je ravninska ploha. Prema razmatranju iz točke 2.2.4., njezin je volumen jednak 0. Označimo li A = {odabrana točka pripada sferi upisanoj u kocku}, zaključujemo da je $m(A) = 0$. Zbog toga je tražena vjerojatnost jednaka 0.

b) Polumjer *bilo kojoj* kocki upisane kugle jednak je polovici njezina osnovnoga brida. Dakle, $r=\dfrac{a}{2}$, pa je volumen kocki upisane kugle jednak $V=\dfrac{4}{3}\cdot r^3\cdot\pi=\dfrac{a^3}{6}\cdot\pi$.

Označimo li B := {odabrana točka pripada kocki upisanoj kugli}, zaključujemo da je $m(B)=\dfrac{a^3}{6}\cdot\pi$. Zbog toga je tražena vjerojatnost jednaka

$$P(A)=\frac{m(A)}{m(\Omega)}=\frac{\pi}{6}\approx 0.5236.$$

6. Neka su l i b redom vrijeme Lidijina, odnosno Brunina dolaska na trg. Vremenu dolaska svake osobe bijektivno pridružimo neki realan broj iz segmenta $[0,60]$. Naime, prema podacima iz zadatka, vrijeme dolaska svake osobe je oblika: 18 sati x minuta, pri čemu je $x\in[0,60]$. Zbog toga bez smanjenja općenitosti za skup elementarnih događaja možemo uzeti:

$$\Omega=\{(l,b): l,b\in[0,60]\} .$$

Pokažimo najprije da je događaj $B_1=\{\text{Bruno i Lidija su istovremeno stigli na trg}\}$ nemoguć. U tu svrhu uočimo da vrijedi jednakost $B_1=\{(l,b)\in\Omega : b=l\}$ (u smislu jednakosti skupova). Krivulja $K\ldots b=l$ je pravac (simetrala I. i III. kvadranta). Površina toga pravca jednaka nuli. Skup B_1 je dio krivulje K unutar skupa Ω, pa je i njegova površina jednaka nuli. Zbog toga je $p_{B_1}=0$. To znači da je događaj B_1 nemoguć, što smo i željeli pokazati.

Budući da je događaj istovremenoga dolaska obiju osoba nemoguć, zaključujemo da točno jedna osoba mora prva doći na trg. Pretpostavimo najprije da će prva doći Lidija. To znači da vrijedi nejednakost $b>l$. Prema podacima iz zadatka, u ovom će se slučaju Lidija i Bruno sastati ako vrijedi nejednakost $b\leq l+10$.

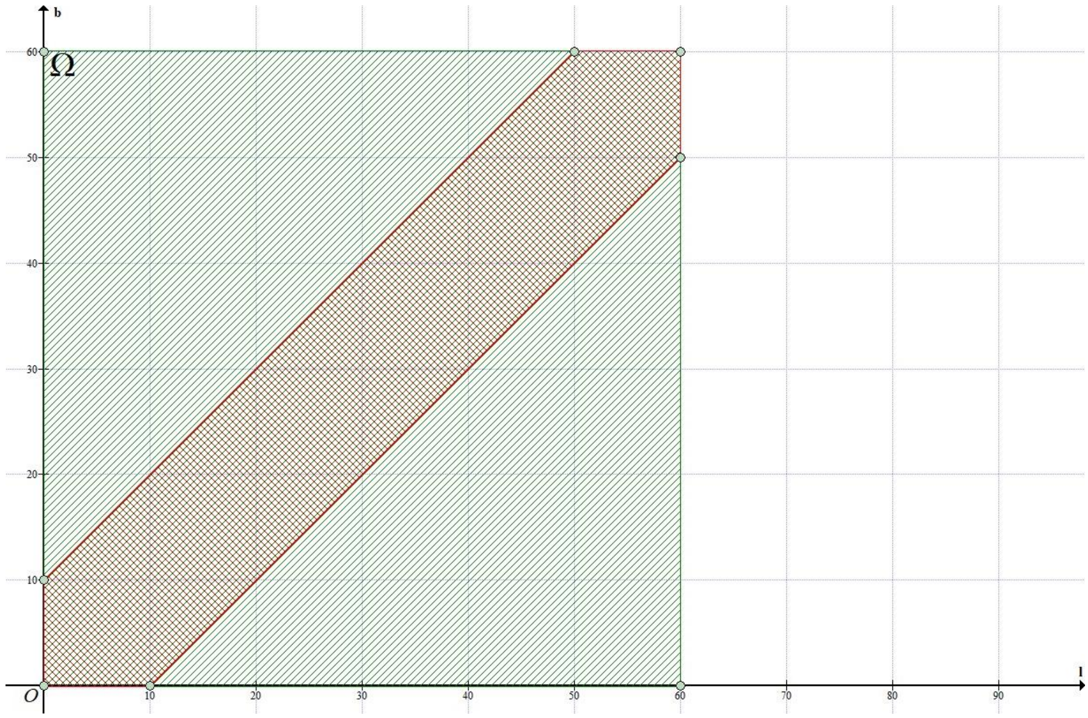
Pretpostavimo sada da će prvi doći Bruno. To znači da vrijedi nejednakost $l>b$. U ovom će se slučaju Lidija i Bruno sastati ako vrijedi nejednakost $l\leq b+10$, odnosno (ekvivalentna) nejednakost $b\geq l-20$.

Dakle, Lidija i Bruno će se sastati ako i samo ako vrijedi ili nejednakost $b\leq l+10$ ili nejednakost $b\geq l-10$. Te dvije nejednakosti možemo objediniti u nejednakost $l-10\leq b\leq l+10$.

Označimo skup svih povoljnih događaja s A, pa je:

$$A = \{(l,b) \in \Omega : l - 10 \le b \le l + 10\}.$$

Skicirajmo skupove Ω i A u pravokutnom koordinatnom sustavu u ravnini. Dobivamo sliku 3.



Slika 3.

Izračunajmo površine skiciranih skupova. Površina skupa Ω jednaka je:

$$P(\Omega) = 60^2 = 3600 \text{ kv. jed.}$$

Površina skupa A jednaka je:

$$P(A) = 60^2 - 2 \cdot \frac{50 \cdot 50}{2} = 60^2 - 50^2 = 3600 - 2500 = 1100 \text{ kv. jed.}$$

Dakle, tražena vjerojatnost je jednaka:

$$p_A = \frac{P(A)}{P(\Omega)} = \frac{1100}{3600} = \frac{11}{36}.$$

Primijetimo da je $p < \frac{1}{2}$, što znači da je vjerojatnost da se Lidija i Bruno neće sastati strogo veća od vjerojatnosti sastanka.