# 2. REDOVI

## 2.2. NUMERIČKI REDOVI.

## KRITERIJI KONVERGENCIJE REDOVA.

# 2.2.1. POJAM NUMERIČKOGA REDA

- Neka je $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz realnih brojeva.
- (*Podsjetnik*: **Niz** realnih brojeva je bilo koja funkcija $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.)
- Niz $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiran rekurzivno s:
- $s_1 = a_1$, $s_n = s_{n-1} + a_n$, za $n \geq 2$
- nazivamo **niz djelomičnih zbrojeva** (ili *niz parcijalnih suma*) niza $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- Opći ($n$ – ti) član toga niza jednak je zbroju prvih $n$ članova niza $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- Uređeni par $((a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (s_n)_{n\in\mathbb{N}})$ naziva se **red realnih brojeva** ili, kraće i nepreciznije, **numerički red**.
- Svaki numerički red je jednoznačno određen zadavanjem *općega* člana niza $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

# 2.2.2. POJAM KONVERGENTNOGA REDA

- Kao i svaki drugi niz, tako i niz djelomičnih zbrojeva $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ili ima ili nema svoju graničnu vrijednost (limes).
- Ako niz $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ima graničnu vrijednost i ta je vrijednost jednaka" konkretnom" broju $s\in\mathbb{R}$, kažemo da red $\sum a_n$ **konvergira** ka broju $s$.
- Formalno pišemo: $\sum_k a_k = s$ .
- Sukladno ovoj oznaci, broj $s$ nazivamo **zbroj** ili *suma* **reda**.
- Ako niz $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nema graničnu vrijednost, kažemo da pripadni red *divergira*.

# 2.2.3. KRITERIJI KONVERGENCIJE REDA

- Ispitivanje konvergencije numeričkih redova u općem je slučaju relativno teško jer najčešće ne znamo formulu za opći član niza djelomičnih zbrojeva.
- Zbog toga se postavlja pitanje:
- *Može li se* (i, ako može, kako) *utvrditi je li numerički red konvergentan* ***isključivo*** *na temelju formule za opći član polaznoga niza* $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$?
- Opći kriterij za ispitivanje konvergencije *bilo kojega* numeričkoga reda danas nije poznat.
- Poznati su određeni kriteriji prema kojima se za relativnu većinu numeričkih redova može utvrditi jesu li konvergentni ili nisu (ali *nijedan* kriterij ne određuje pripadni zbroj reda u slučaju da red konvergira).

# 2.2.4. KRITERIJI KONVERGENCIJE REDA

- **Kriterij 1.** (*nužan uvjet konvergencije numeričkoga reda*) Ako red konvergira, onda vrijedi $\lim_n a_n = 0$ .
- Za primjenu je značajnija ekvivalentna tvrdnja:
- **Kriterij 2.** Ako vrijedi $\lim_n a_n = A \neq 0$ , numerički red je divergentan.
- *Pravilo*: Prigodom ispitivanja konvergencije numeričkoga reda najprije treba odrediti graničnu vrijednost polaznoga niza.
- Ako je ta vrijednost različita od nule, red je divergentan (i ispitivanje konvergencije reda time završava).
- Ako je ta vrijednost jednaka nuli, red može biti ili konvergentan ili divergentan, pa treba nastaviti ispitivanje prema drugim kriterijima.

# 2.2.4. KRITERIJI KONVERGENCIJE REDA

- Četiri najčešće korištena kriterija za ispitivanje konvergencije redova su *Cauchyjev*, *D'Alembertov*, *Leibnizov* i *Raabeov*.
- **Cauchyjev kriterij**: Ako je $\lim_{n} \sqrt[n]{|a_n|} = r \in \mathbb{R}$, onda vrijedi:
- ako je $r < 1$, red $\sum a_n$ je konvergentan;
- ako je $r > 1$, red $\sum a_n$ je divergentan;
- ako je $r = 1$, nema odluke.
- Ovaj kriterij podesno je primijeniti ako je opći član polaznoga niza $n$- ta potencija nekoga izraza.

# 2.2.4. KRITERIJI KONVERGENCIJE REDA

- **D'Alembertov kriterij**: Ako je $\lim_n \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = r \in \mathbb{R}$ , onda vrijedi:
- ako je $r < 1$, red $\sum a_n$ je konvergentan;
- ako je $r > 1$, red $\sum a_n$ je divergentan;
- ako je $r = 1$, nema odluke.
- Ovaj kriterij je najjednostavniji za praktičnu primjenu.
- **Leibnizov kriterij**: Ako niz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *strogo pozitivnih* realnih brojeva strogo pada i ima graničnu vrijednost 0, onda je **alternirajući red** $\sum(-1)^n \cdot a_n$ (čiji članovi pravilno mijenjaju predznak) konvergentan.

# 2.2.4. KRITERIJI KONVERGENCIJE REDA

- **Raabeov kriterij**: Ako je $\lim_n \left( n \cdot \left( 1 - \frac{a_{n+1}}{a_n} \right) \right) = r \in \mathbb{R}$ , onda vrijedi:
- ako je $r > 1$, tada red $\sum a_n$ konvergira;
- ako je $r < 1$, tada red $\sum a_n$ divergira;
- za $r = 1$ nema odluke.
- Raabeov kriterij se najčešće primjenjuje u slučajevima u kojima D'Alembertov kriterij ne daje odluku.

# 2.2.5. KRITERIJ USPOREDBE

- U općem slučaju konvergencija reda može se ispitati tako da se zadani red usporedi ili s (hiper)harmonijskim ili s geometrijskim redom.
- Vrijedi sljedeći kriterij:
- *Ako su* $\sum a_n$ i $\sum b_n$ *redovi s pozitivnim članovima takvi da za gotovo sve* $n \in \mathbb{N}$ *vrijedi* $a_n \leq b_n$, *onda:*
- *ako* $\sum b_n$ *konvergira, onda i* $\sum a_n$ *konvergira*;
- *ako* $\sum a_n$ *divergira, onda i* $\sum b_n$ *divergira.*

# 2.2.5. KRITERIJ USPOREDBE

- Korisna su i sljedeća dva kriterija:
- **Kriterij 1.** (*Cauchyjev integralni kriterij*) Neka je opći član reda određen *strogo pozitivnom, monotono padajućom* i *neprekidnom* funkcijom *f*. Tada red
- $\sum a_n$ i nepravi integral $\int_a^{+\infty} f(x) \cdot \mathrm{d}x$ istodobno ili konvergiraju ili divergiraju.
- **Kriterij 2.** Ako konvergira red $\sum |a_n|$, onda konvergira i red $\sum a_n$. (Obrat ne vrijedi.)
- Kriterij 2. podesno je primijeniti umjesto Leibnizova kriterija pri ispitivanju konvergencije alternirajućih redova.