Zadatak 1. Napišite (ako postoji) zatvorenu formulu za opći član niza $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ djelomičnih zbrojeva niza $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ako je:

a) $a_n = n$;

b) $a_n = \frac{1}{n}$;

c) $a_n = x^n$, za $x > 0$,

d) $a_n = \frac{1}{n^2+n}$.

Rješenje: **a)** Traženu formulu odredit ćemo metodom teleskopiranja. Prema definiciji niza S_n, vrijedi:

$$\begin{aligned}
&S_1 = a_1 = 1,\\
&S_2 = S_1 + a_2 = S_1 + 2,\\
&S_3 = S_2 + a_3 = S_2 + 3,\\
&\vdots\\
&S_n = S_{n-1} + a_n = S_{n-1} + n.
\end{aligned}$$

Odatle zbrajanjem zasebno lijevih i zasebno desnih strana, te poništavanjem istih članova na različitim stranama, dobivamo:

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n\cdot(n+1)}{2}.$$

(Posljednja formula je posljedica činjenice da je niz 1, 2, 3, …, n konačan aritmetički niz kojemu je prvi član jednak 1, a posljednji član i ukupan broj svih članova jednaki n. Zbroj tih članova računamo tako da ukupan broj članova (n) podijelimo s 2, pa dobivenih količnik pomnožimo sa zbrojem prvoga i posljednjega člana ($1 + n$).)

b) Analogno kao u **a)** podzadatku dobivamo:

$$\begin{aligned}
&S_1 = a_1 = 1,\\
&S_2 = S_1 + a_2 = S_1 + \frac{1}{2}\\
&S_3 = S_2 + a_3 = S_2 + \frac{1}{3},\\
&\vdots\\
&S_n = S_{n-1} + a_n = S_{n-1} + \frac{1}{n}.
\end{aligned}$$

Zbrajanjem tih jednakosti dobivamo:

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}.$$

Može se pokazati da **ne** postoji zatvorena formula za n-ti član ovoga niza.

c) Potpuno analogno kao u prethodnim podzadacima dobivamo:

$$S_n = x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n.$$

Ovdje je riječ o zbroju prvih n članova konačnoga geometrijskoga niza kojemu su prvi član i količnik (q) jednaki x. Zbroj tih članova je:

$$Z = S_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = x \cdot \frac{x^n - 1}{x - 1} = \frac{x^{n+1} - x}{x - 1}.$$

d) Rastavimo na parcijalne razlomke opći član niza a_n. Primijetimo najprije da vrijedi identitet:

$$n^2 + n = n \cdot (n+1).$$

Zbog toga tražimo $A, B \in \mathbb{R}$ takve da vrijedi rastav:

$$\frac{1}{n^2 + n} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1}.$$

Odatle množenjem sa $n^2 + n$ dobivamo:

$$1 = A \cdot (n+1) + B \cdot n.$$

Uvrštavanjem $n = -1$ dobijemo $B = -1$, a uvrštavanjem $n = 0$ dobijemo $A = 1$. To smijemo napraviti jer gornja jednakost – kao jednakost polinoma – mora vrijediti za svaki $n \in \mathbb{R}$ (iako se u zadatku pretpostavlja da je $n \in \mathbb{N}$). Tako smo dobili:

$$\frac{1}{n^2 + n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Ponovno primijenimo metodu teleskopiranja. Dobivamo:

$$\begin{aligned}
S_1 &= a_1 = \frac{1}{1} - \frac{1}{1+1} = 1 - \frac{1}{2}, \\
S_2 &= S_1 + a_2 = S_1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2+1} = S_1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3}, \\
S_3 &= S_2 + a_3 = S_2 + S_1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{3+1} = S_2 + \frac{1}{3} - \frac{1}{4},
\end{aligned}$$

$$\vdots$$

$$S_n = S_{n-1} + a_n = S_{n-1} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Zbrajanjem tih jednakosti, osim članova $S_1, S_2, S_3, \ldots, S_{n-1}$, ponište se i svi članovi $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}$. Tako preostaje:

$$S_n = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{(n+1)-1}{n+1} = \frac{n}{n+1}.$$

Napomena 1. Niz a_n iz **b)** podzadatka nazivamo **harmonijski niz**. Red $\sum \frac{1}{n}$ nazivamo **harmonijski red.** Njega treba dobro zapamtiti jer ćemo ga često koristiti u rješavanju zadataka.

Napomena 2. Izvedimo formulu za zbroj prvih n članova aritmetičkoga niza korištenu u rješenju **a)** podzadatka. Pretpostavimo da je aritmetički niz zadan svojim prvim članom a_1 i razlikom d. Tada je opći član toga niza dan formulom:

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Za svaki $k = 1, 2, \ldots, n$ odredimo zbroj $a_k + a_{n-k+1}$. Koristeći gornju formulu dobivamo:

$$\begin{aligned} a_k + a_{n-k+1} &= \left(a_1 + (k-1) \cdot d\right) + \left(a_1 + ((n-k+1)-1) \cdot d\right) = \left(a_1 + (k-1) \cdot d\right) + \left(a_1 + (n-k) \cdot d\right) = \\ &= a_1 + k \cdot d - d + a_1 + n \cdot d - k \cdot d = a_1 + \left(a_1 + (n-1) \cdot d\right) = a_1 + a_n. \end{aligned}$$

To posebno znači da su zbrojevi $a_2 + a_{n-2+1} = a_2 + a_{n-1}$, $a_3 + a_{n-3+1} = a_3 + a_{n-2}$ itd. međusobno jednaki i jednaki $a_1 + a_n$. Tako sada napišemo:

$$\begin{aligned} S &= a_1 + a_2 + \ldots + a_n, \\ S &= a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1, \end{aligned}$$

pa zbrojimo zasebno lijeve i zasebno desne strane ovih jednakosti koristeći pravila komutativnosti i asocijativnosti za zbrajanje realnih brojeva:

$$2 \cdot S = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \ldots + (a_n + a_1) = \text{(prema dokazanoj jednakosti)} = n \cdot (a_1 + a_n).$$

Odatle izravno slijedi:

$$S = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n),$$

što smo i željeli dokazati.

Napomena 3. Izvedimo formulu za zbroj prvih n članova geometrijskoga niza kojemu je prvi član g_1, a količnik q. Opći član toga geometrijskoga niza je:

$$g_n = g_1 \cdot q^{n-1},\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Neka je

$$S_n = g_1 + g_2 + g_3 + \ldots + g_n = g_1 + g_1 \cdot q + g_1 \cdot q^2 + \ldots + g_1 \cdot q^{n-1}.$$

Ako je $q = 0$, onda su svi članovi niza g_n jednaki nuli, pa je i njihov zbroj jednak 0.
Ako je $q = 1$, onda imamo konstantan niz $g_1, g_1, \ldots, g_1$ čiji je zbroj $n \cdot g_1$.
Ako je $q \notin \{0,1\}$, onda pomnožimo gornju jednakost s q. Dobivamo:

$$q \cdot S_n = g_1 \cdot q + g_1 \cdot q^2 + g_1 \cdot q^3 + \ldots + g_1 \cdot q^n.$$

Od te jednakosti oduzmimo jednakost $S_n = g_1 + g_1 \cdot q + g_1 \cdot q^2 + \ldots + g_1 \cdot q^{n-1}$ tako da zasebno oduzmemo lijeve, a zasebno desne strane. Pri oduzimanju se ponište svi članovi na desnoj strani osim g_1 i $g_1 \cdot q^n$. Dobivamo:

$$q \cdot S_n - q = g_1 \cdot q^n - g \Leftrightarrow (q-1) \cdot S_n = g \cdot \left(q^n - 1\right).$$

Odatle lagano slijedi:

$$S_n = g_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q-1}.$$

Zadatak 2. Za svaki niz $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ iz rješenja zadatka 1. odredite postoji li $\lim_n S_n$, odnosno je li pripadni red konvergentan.

Rješenje: **a)** Očito je $\lim_n S_n = \lim_n \frac{n \cdot (n+1)}{2} = \left\{ \frac{+\infty \cdot +\infty}{2} \right\} = +\infty$. Dakle, dobiveni red je divergentan (i divergira u $+\infty$).

b) Ne znamo zatvorenu formulu za opći član niza S_n, pa ne možemo postupiti analogno kao u **a)** podzadatku. Međutim, možemo se poslužiti sljedećom dosjetkom. Pretpostavimo da je harmonijski red konvergentan i neka je njegov zbroj jednak S. Tada na zbrajanje članova reda možemo primijeniti uobičajena svojstva komutativnosti i asocijativnosti. (Za divergentne redove ta svojstva općenito ne vrijede.) Također, primijetimo da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi nejednakost:

$$\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}.$$

koja izravno slijedi dijeljenjem obje strane očite nejednakosti

$$n+1>n$$

sa strogo pozitivnim brojem $n\cdot(n+1)$. Koristeći tu nejednakost dobivamo:

$$S=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\ldots=\left(1+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\ldots>$$
$$>\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+\ldots=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+..=S,$$

što je proturječje. Pretpostavka je bila pogrešna, tj. harmonijski red divergira.

c) U ovom podzadatku treba se prisjetiti osnovnoga svojstva eksponencijalne funkcije:

$$\lim_{n}\left(q^n\right)=\begin{cases}+\infty, \text{ ako je } |q|>1\\ 0, \text{ ako je } 0<|q|<1.\end{cases}$$

Zbog toga $\lim\limits_{n} S_n=\lim\limits_{n}\left(g_1\cdot\frac{q^n-1}{q-1}\right)$ postoji ako i samo ako je $0<|q|<1$. U tom je slučaju ta granična vrijednost jednaka:

$$\lim_{n} S_n=g_1\cdot\left(\frac{0-1}{q-1}\right)=\frac{g_1}{1-q}.$$

Dakle, zadani red konvergira ako i samo ako je $0<|q|<1$ i u tom je slučaju njegov zbroj jednak $S=\frac{g_1}{1-q}$.

d) U ovom podzadatku odmah imamo:

$$\lim S_n=\lim_{n}\left(1-\frac{1}{\underbrace{n+1}_{\to+\infty}}\right)=1-0=1.$$

Dakle, zadani red je konvergentan i zbroj mu je jednak 1.

Napomena 4. Rezultate podzadataka 2. b) i c) treba dobro zapamtiti jer ćemo ih često koristiti u zadacima. Dakle, **harmonijski red je divergentan, a geometrijski red je konvergentan ako i samo ako je apsolutna vrijednost njegova količnika strogo manja od 1**.

Napomena 5. Često se pogrešno tvrdi da divergencija nekoga reda realnih brojeva povlači da je granična vrijednost pripadnoga niza djelomičnih zbrojeva $+\infty$. Naime, red može biti divergentan, a da pritom ne divergira u $+\infty$. Takav je npr. red $\sum (-1)^n$ čiji je niz djelomičnih zbrojeva $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiran pravilom

$$S_n = \begin{cases} 1, & \text{za neparne } n, \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

$\lim\limits_n (S_n)$ ne postoji jer niz S_n ima točno dva različita gomilišta: 0 i 1. Međutim, očito ne vrijedi $\lim\limits_n (S_n) = +\infty$.

Zadatak 3. Odredite sve $x \in \mathbb{R}$ za koje je zbroj reda:

a) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (\sin x)^n$ jednak 1;

b) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} (\cos x)^n$ jednak –1.

Rješenje: **a)** Zadani red je geometrijski red kojemu je $g_1 = q = \sin x$. Zbroj toga reda jednak je $S = \dfrac{\sin x}{1-\sin x}$. Taj zbroj mora biti jednak 1, što znači da su brojnik i nazivnik realni brojevi različiti od nule i da ne moramo provjeravati vrijedi li nejednakost $0 < |\sin x| < 1$. Tako iz jednadžbe

$$\frac{\sin x}{1-\sin x} = 1$$

množenjem s $1-\sin x$ i sređivanjem izraza slijedi $\sin x = \dfrac{1}{2}$. Skup svih rješenja te jednadžbe je $S = \left\{ \dfrac{\pi}{6} + 2\cdot k\cdot\pi : k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \dfrac{5}{6}\cdot\pi + 2\cdot k\cdot\pi : k \in \mathbb{Z} \right\}$.

b) U ovom slučaju imamo geometrijski red kojemu su $g_1 = \cos x,\ q = -\cos x.$ Njegov je zbroj jednak $S = \dfrac{\cos x}{1+\cos x}$. Taj zbroj mora biti jednak –1, što znači da su brojnik i nazivnik realni brojevi različiti od nule i da ne moramo provjeravati vrijedi li nejednakost $0 < |\cos x| < 1$. Tako iz jednadžbe

$$\frac{\cos x}{1+\cos x} = -1$$

množenjem s $1+\cos x$ i sređivanjem izraza slijedi $\cos x=-\frac{1}{2}$. Skup svih rješenja te jednadžbe je $S=\left\{\frac{\pi}{3}+2\cdot k\cdot\pi : k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{5}{3}\cdot\pi+2\cdot k\cdot\pi : k\in\mathbb{Z}\right\}$

Zadatak 4. Dokažite *nužan uvjet konvergencije reda*: Ako red $\sum a_n$ konvergira, onda je $\lim_n(a_n)=0$.

Rješenje: Pretpostavimo da red $\sum a_n$ konvergira. To znači da njegov niz djelomičnih zbrojeva $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira i da je njegova granična vrijednost jednaka „konkretnom“ broju $S\in\mathbb{R}$. Promotrimo rekurziju kojom je definiran niz $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$S_n=S_{n-1}+a_n,\ \forall n\in\mathbb{N},\ n\geq 2.$$

Odavde je

$$a_n=S_n-S_{n-1}.$$

„Napadnemo“ s limesom obje strane ove jednakosti. Znamo da je $\lim_n(S_n)=S$. No, onda je i $\lim_n(S_{n-1})=S$ jer je riječ o istom nizu. Dakle, postoje obje granične vrijednosti na desnoj strani gornje jednakosti, pa smijemo primijeniti osnovno svojstvo graničnih vrijednosti $\lim_n(b_n-c_n)=\lim_n(b_n)-\lim_n(c_n)$. Tako odmah slijedi:

$$\lim_n(a_n)=\lim_n(S_n-S_{n-1})=\lim_n(S_n)-\lim_n(S_{n-1})=S-S=0,$$

što smo i tvrdili.

Napomena 6. Nužan uvjet konvergencije reda korisnije je zapamtiti u obliku:

Ako je $\lim_n(a_n)=L\neq 0,$ *onda red divergira.*

Dakle, **divergencija** reda može se utvrditi (samo) određivanjem granične vrijednosti polaznoga niza (ako je to moguće).

Ako je $\lim_n(a_n)=0$, ne znamo ništa ni o konvergenciji, ni o divergenciji reda. Npr. pokazali smo da je harmonijski red $\sum\frac{1}{n}$ divergentan. Kasnije ćemo pokazati da red $\sum\frac{1}{n^2}$ konvergira. No, očito je $\lim_n\left(\frac{1}{n}\right)=\lim_n\left(\frac{1}{n^2}\right)=0.$

Zadatak 5. Ispitajte konvergenciju reda $\sum \frac{(n+1)^2}{n^2+n+1}$. Sve svoje tvrdnje precizno obrazložite.

Rješenje: Označimo $a_n = \frac{(n+1)^2}{n^2+n+1}$. Odredimo $\lim_n (a_n)$. Imamo redom:

$$\lim_n (a_n) = \lim_n \left(\frac{(n+1)^2}{n^2+n+1} \right) = \lim_n \left(\frac{n^2+2\cdot n+1}{n^2+n+1} \right) = \lim_n \left(\frac{1+2\cdot\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}} \right) = \frac{1+0+0}{1+0+0} = 1,$$

pa primjenom ekvivalentne formulacije nužnoga uvjeta konvergencije reda iz Napomene 6. zaključujemo da zadani red divergira.

Zadatak 6. Primjenom Cauchyjeva kriterija dokažite konvergenciju sljedećih redova:

a) $\sum \left(\frac{n}{2\cdot n+1} \right)^n$;

b) $\sum (-1)^n \cdot \left(\frac{n+1}{2\cdot n-1} \right)^n$;

c) $\sum \frac{n^{2020}}{2020^n}$.

Rješenje: Za svaki od zadanih redova najprije ćemo provjeriti jesu li gotovo svi njegovi članovi strogo pozitivni (tj. sadrži li polazni niz konačno mnogo strogo negativnih članova). To ćemo učiniti kako bismo izbjegli računanje s apsolutnom vrijednošću pod korijenom. Potom ćemo odrediti $r := \lim_n \left(\sqrt[n]{|a_n|} \right)$. Ako je $r<1$, polazni red konvergira. Ako je $r>1$, polazni red divergira. Ako je $r=1$, ne možemo donijeti odluku o konvergenciji, pa moramo primijeniti neki drugi kriterij.

a) Za svaki $n \in \mathbb{N}$ očito vrijede nejednakosti $n>0$ i $2\cdot n+1>0$. Dakle, ne moramo računati s apsolutnom vrijednošću. Zbog toga imamo:

$$r = \lim_n \sqrt[n]{\left(\frac{n}{2\cdot n+1} \right)^n} = \lim_n \left(\frac{n}{2\cdot n+1} \right) = \lim_n \left(\frac{1}{2+\frac{1}{n}} \right) = \frac{1}{2+0} = \frac{1}{2}.$$

Dakle, zadani red je konvergentan, što je i trebalo dokazati.

b) Za svaki $n \in \mathbb{N}$ očito vrijede nejednakosti $n+1>0$ i $2 \cdot n-1>0$. Međutim, svaki neparni član reda je strogo negativan jer je $(-1)^n=-1$ ako i samo ako je n neparan cijeli broj. Zbog toga formalno moramo primijeniti apsolutnu vrijednost kako bismo „neutralizirali" negativne predznake neparnih članova reda. Imamo redom:

$$r=\lim_n \sqrt[n]{\left|(-1)^n \cdot \left(\frac{n+1}{2 \cdot n-1}\right)^n\right|}=\lim_n \sqrt[n]{\underbrace{\left|(-1)^n\right|}_{=1} \cdot \left|\left(\frac{n+1}{2 \cdot n-1}\right)^n\right|}=\lim_n \sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{2 \cdot n-1}\right)^n}=\lim_n\left(\frac{n+1}{2 \cdot n-1}\right)=$$

$$=\lim_n\left(\frac{1+\frac{1}{n}}{2-\frac{1}{n}}\right)=\frac{1+0}{2-0}=\frac{1}{2}.$$

Dakle, zadani red je konvergentan, što je i trebalo dokazati.

c) U ovom ćemo zadatku iskoristiti jednakost $\lim_n\left(\sqrt[n]{n}\right)=1$. Primijetimo da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijede nejednakosti $n^{2020}>0$ i $2020^n>1$. Zbog toga ne trebamo primijeniti apsolutnu vrijednost. Tako imamo redom:

$$r=\lim_n\left(\sqrt[n]{\frac{n^{2020}}{2020^n}}\right)=\lim_n\left(\frac{\sqrt[n]{n^{2020}}}{\sqrt[n]{2020^n}}\right)=\lim_n\left(\frac{\left(\sqrt[n]{n}\right)^{2020}}{2020}\right)=\frac{1^{2020}}{2020}=\frac{1}{2020}.$$

Dakle, zadani red je konvergentan, što je i trebalo dokazati.

Zadatak 7. Primjenom D'Alembertova kriterija ispitajte konvergenciju sljedećih redova:

a) $\sum \frac{n+2}{2^n}$;

b) $\sum \frac{(n!)^2}{(2 \cdot n)!}$;

c) $\sum \frac{n^n}{n!}$.

Rješenje: Uočimo da se u svim trima podzadacima radi o redovima čiji su svi članovi strogo pozitivni racionalni brojevi. Naime, svaki od triju brojnika, odnosno nazivnika je strogo veći od nule. Zbog toga pri ispitivanju konvergencije ne moramo koristiti apsolutne vrijednosti. U svakom ćemo zadatku izračunati $r := \lim_n \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} \right)$, te primijeniti zaključivanje potpuno analogno onome kod primjene Cauchyjeva kriterija.

a) U ovom zadatku je $a_n = \frac{n+2}{2^n}$. Zbog toga je $a_{n+1} = \frac{(n+1)+2}{2^{n+1}} = \frac{n+3}{2^{n+1}}$. Tako sada imamo:

$$r = \lim_n \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} \right) = \lim_n \left(\frac{\frac{n+3}{2^{n+1}}}{\frac{n+2}{2^n}} \right) = \lim_n \left(\frac{\frac{n+3}{2^n \cdot 2}}{\frac{n+2}{2^n}} \right) = \lim_n \left(\frac{\frac{n+3}{2}}{\frac{n+2}{1}} \right) = \lim_n \left(\frac{n+3}{2 \cdot (n+2)} \right) = \lim_n \left(\frac{1+\frac{3}{n}}{2 \cdot \left(1+\frac{2}{n}\right)} \right) = \frac{1+0}{2 \cdot (1+0)} = \frac{1}{2}.$$

Dakle, zadani red je konvergentan.

b) U ovom zadatku je $a_n = \frac{(n!)^2}{(2 \cdot n)!}$. Zbog toga je $a_{n+1} = \frac{((n+1)!)^2}{(2 \cdot (n+1))!} = \frac{((n+1)!)^2}{(2 \cdot n+2)!}$. Iskoristimo identitet $(2 \cdot n+2)! = (2 \cdot n+2) \cdot (2 \cdot n+1) \cdot (2 \cdot n)!$, pa dobijemo:

$$r = \lim_n \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} \right) = \lim_n \left(\frac{\frac{((n+1)!)^2}{(2 \cdot n+2)!}}{\frac{(n!)^2}{(2 \cdot n)!}} \right) = \lim_n \left(\frac{((n+1)!)^2}{(n!)^2} \cdot \frac{(2 \cdot n)!}{(2 \cdot n+2)!} \right) = \lim_n \left(\left(\frac{(n+1)!}{n!} \right)^2 \cdot \frac{(2 \cdot n)!}{(2 \cdot n+2)!} \right) =$$

$$= \lim_n \left(\left(\frac{(n+1) \cdot n!}{n!} \right)^2 \cdot \frac{(2 \cdot n)!}{(2 \cdot n+2) \cdot (2 \cdot n+1) \cdot (2 \cdot n)!} \right) = \lim_n \left((n+1)^2 \cdot \frac{1}{(2 \cdot n+2) \cdot (2 \cdot n+1)} \right) =$$

$$= \lim_n \left(\frac{n^2+2 \cdot n+1}{4 \cdot n^2+6 \cdot n+2} \right) = \lim_n \left(\frac{1+2 \cdot \frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{4+6 \cdot \frac{1}{n}+2 \cdot \frac{1}{n^2}} \right) = \frac{1+2 \cdot 0+0}{4+6 \cdot 0+2 \cdot 0} = \frac{1}{4}.$$

Dakle, zadani red je konvergentan.

c) U ovom zadatku je $a_n = \frac{n^n}{n!}$. Zbog toga je $a_{n+1} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}$. Tako redom imamo:

$$r = \lim_n \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} \right) = \lim_n \left(\frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}} \right) = \lim_n \left(\frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} \cdot \frac{n!}{(n+1)!} \right) = \lim_n \left(\frac{(n+1)^n \cdot (n+1)}{n^n} \cdot \frac{n!}{(n+1)!} \right) =$$

$$= \lim_n \left(\frac{(n+1)^n}{n^n} \cdot \frac{(n+1) \cdot n!}{(n+1)!} \right) = \lim_n \left(\left(\frac{n+1}{n} \right)^n \cdot \frac{(n+1)!}{(n+1)!} \right) = \lim_n \left(\left(1+\frac{1}{n} \right)^n \right) = e^1 = e.$$

Budući da je $e > 1$, zadani red divergira.

Zadatak 8. Primjenom Raabeova kriterija dokažite konvergenciju sljedećih redova:

a) $\sum \frac{1}{n^2+2\cdot n}$,

b) $\sum \frac{1}{(3\cdot n-2)\cdot(3\cdot n+1)}$.

Rješenje: Najprije uočimo da su brojnici i nazivnici obaju razlomaka strogo pozitivni. Zbog toga pri rješavanju ne moramo primijeniti apsolutne vrijednosti. Izračunat ćemo $r:=\lim_n \left(n\cdot\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)\right)$. Ako je $r>1$, zadani red konvergira. Ako je $r<1$, zadani red divergira. Ako je $r=1$, ne možemo donijeti odluku o konvergenciji, pa moramo primijeniti neki drugi kriterij.

a) Točan zbroj ovoga reda možemo odrediti analogno kao u zadacima **1**. d) i **2**. d). Međutim, zadatak ne traži izračunavanje zbroja reda, nego samo dokazivanje konvergencije. U ovom je slučaju $a_n=\frac{1}{n^2+2\cdot n}$. Zbog toga je $a_{n+1}=\frac{1}{(n+1)^2+2\cdot(n+1)}=$ $=\frac{1}{n^2+2\cdot n+1+2\cdot n+2}=\frac{1}{n^2+4\cdot n+3}$. Tako redom imamo:

$$r:=\lim_n\left(n\cdot\left(1-\frac{\frac{1}{n^2+4\cdot n+3}}{\frac{1}{n^2+2\cdot n}}\right)\right)=\lim_n\left(n\cdot\left(1-\frac{n^2+2\cdot n}{n^2+4\cdot n+3}\right)\right)=\lim_n\left(n\cdot\left(\frac{n^2+4\cdot n+3-\left(n^2+2\cdot n\right)}{n^2+4\cdot n+3}\right)\right)=$$

$$=\lim_n\left(n\cdot\left(\frac{2\cdot n+3}{n^2+4\cdot n+3}\right)\right)=\lim_n\left(\frac{2\cdot n^2+3\cdot n}{n^2+4\cdot n+3}\right)=\lim_n\left(\frac{2+3\cdot\frac{1}{n^2}}{1+4\cdot\frac{1}{n}+3\cdot\frac{1}{n^2}}\right)=\frac{2+3\cdot 0}{1+4\cdot 0+3\cdot 0}=2.$$

Dakle, zadani red je konvergentan. Pokušajte dokazati da je njegov zbroj jednak $\frac{3}{4}$.

b) U ovome je zadatku $a_n=\frac{1}{(3\cdot n-2)\cdot(3\cdot n+1)}$. Zbog toga je:

$$a_{n+1}=\frac{1}{(3\cdot(n+1)-2)\cdot(3\cdot(n+1)+1)}=\frac{1}{(3\cdot n+1)\cdot(3\cdot n+4)}.$$

Tako redom imamo:

$$r := \lim_n \left(n \cdot \left(1 - \frac{\frac{1}{(3 \cdot n+1) \cdot (3 \cdot n+4)}}{\frac{1}{(3 \cdot n-2) \cdot (3 \cdot n+1)}} \right) \right) = \lim_n \left(n \cdot \left(1 - \frac{3 \cdot n-2}{3 \cdot n+4} \right) \right) = \lim_n \left(n \cdot \left(\frac{3 \cdot n+4-(3 \cdot n-2)}{3 \cdot n+4} \right) \right) =$$

$$= \lim_n \left(n \cdot \left(\frac{6}{3 \cdot n+4} \right) \right) = \lim_n \left(\frac{6 \cdot n}{3 \cdot n+4} \right) = \lim_n \left(\frac{6}{3+4 \cdot \frac{1}{n}} \right) = \frac{6}{3+4 \cdot 0} = 2.$$

Dakle, zadani red je konvergentan. Pokušajte dokazati da je njegov zbroj jednak $\frac{1}{3}$.

(*Uputa*: Primijenite postupak iz zadataka 1. d) i 2. d).)

Zadatak 9. Primjenom Leibnizova kriterija dokažite konvergenciju sljedećih redova:

a) $\sum \frac{(-1)^n}{n}$;

b) $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{\ln(n+5)}$.

Rješenje: Najprije uočimo da su realne funkcije $f(x) = x$ i $g(x) = \ln(x+5)$ strogo rastuće na svojim prirodnim domenama (o kojim se skupovima radi?). Zbog toga su realne funkcije $f_1(x) = \frac{1}{x}$ i $g_1(x) = \frac{1}{\ln(x+5)}$ strogo padajuće na skupu $\mathbb{N}$ jer je taj skup podskup prirodnih domena tih dviju funkcija (koje su to prirodne domene?).

a) Članovi zadanoga reda pravilno alterniraju: svaki neparni član je negativan, a svaki parni član je pozitivan. Dakle, možemo primijeniti Leibnizov kriterij. Zaključili smo da je funkcija $f_1(x) = \frac{1}{x}$ strogo padajuća na skupu $\mathbb{N}$, što je ekvivalentno tvrdnji da je niz $\frac{1}{n}$ strogo padajući. Očito je $\lim_n \left(\frac{1}{n} \right) = 0$, pa su ispunjene sve pretpostavke konvergencije reda prema Leibnizovu kriteriju. Odatle slijedi tvrdnja. Može se pokazati da je zbroj zadanoga reda jednak ln 2.

b) Članovi zadanoga reda pravilno alterniraju: svaki neparni član je pozitivan, a svaki parni član je negativan. Dakle, možemo primijeniti Leibnizov kriterij. Zaključili smo da je funkcija $f_1(x) = \frac{1}{\ln(x+5)}$ strogo padajuća na skupu $\mathbb{N}$, što je ekvivalentno tvrdnji da je niz $\frac{1}{\ln(n+5)}$ strogo padajući. Očito je $\lim_n \left(\frac{1}{\ln(n+5)} \right) = \left\{ \frac{1}{+\infty} = 0 \right\}$, pa su ispunjene sve pretpostavke konvergencije reda prema Leibnizovu kriteriju. Dakle, zadani red je konvergentan. Njegov je zbroj nemoguće analitički izračunati.

Zadatak 10. Neka je $p \in \mathbb{R}$ proizvoljan, ali fiksiran. Ispitajte konvergenciju *Dirichletova* (ili *hiperharmonijskoga*) *reda* $\sum \frac{1}{n^p}$ u zavisnosti o $p \in \mathbb{R}$.

Rješenje: Ako je $p < 0$, onda je $\lim_n \left(\frac{1}{n^p}\right) = \lim_n \left(n^{-p}\right) = +\infty$. Primjenom nužnoga uvjeta konvergencije reda zaključujemo da u ovom slučaju red divergira.

Ako je $p \geq 0$, onda je funkcija $f(x) = \frac{1}{x^p}$ strogo pozitivna, neprekidna i monotono padajuća na intervalu $\left[1, +\infty\right\rangle$. Zbog toga možemo primijeniti Cauchyjev integralni kriterij. Što kaže taj kriterij? Konvergenciju zadanoga reda uspoređujemo s konvergencijom nepravoga integrala $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} \cdot \mathrm{d}x$. Podintegralna funkcija jednaka je općemu članu reda do na oznaku nezavisne varijable (tj. podintegralna funkcija i opći član reda razlikuju se jedino u oznaci nezavisne varijable: podintegralna funkcija je u varijabli *x*, a opći član reda u varijabli *n*). Ispitamo konvergenciju napisanoga nepravoga integrala, pa zaključimo: ako taj integral konvergira, onda i zadani red konvergira. Ako taj integral divergira, onda i zadani red divergira.

Dakle, odredimo nepravi integral $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} \cdot \mathrm{d}x$. Imamo redom:

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^p} = \lim_{b \to +\infty} \left(\int_1^b \frac{\mathrm{d}x}{x^p} \right) = \lim_{b \to +\infty} \left(\frac{x^{1-p}}{1-p} \right) \Bigg|_1^b = \lim_{b \to +\infty} \left(\frac{b^{1-p}}{1-p} - \frac{1^{1-p}}{1-p} \right) = \lim_{b \to +\infty} \left(\frac{b^{1-p} - 1}{1-p} \right).$$

Ova granična vrijednost postoji ako i samo ako postoji $\lim_{b \to +\infty} \left(b^{1-p}\right)$ i ako je $1 - p \neq 0$. Granična vrijednost eksponencijalne funkcije (kad baza teži u beskonačnost) postoji i jednaka je nuli ako i samo ako je eksponent te funkcije strogo manji od 0. Odatle slijedi $1 - p < 0$, odnosno $p < 1$. Tada su $\lim_{b \to +\infty} \left(b^{1-p}\right) = 0$ i $1 - p \neq 0$, pa slijedi:

$$I = \lim_{b \to +\infty} \left(\frac{b^{1-p} - 1}{1-p} \right) = \frac{0 - 1}{1 - p} = \frac{1}{p - 1}.$$

Dakle, nepravi integral konvergira ako i samo ako je $p > 1$, a divergira ako i samo ako je $p \leq 1$. To znači da isto svojstvo ima i zadani red. Zaključimo: zadani red konvergira ako i samo ako je $p > 1$, a divergira ako i samo ako je $p \leq 1$.

Napomena 7. Naziv *hiperharmonijski red* potječe od činjenice da je zadani red svojevrsno poopćenje harmonijskoga reda $\sum \frac{1}{n}$. Taj red dobivamo za $p=1$. Tako se divergencija harmonijskoga reda može dokazati i koristeći Cauchyjev integralni kriterij.

Zadatak 11. Koristeći pogodni kriterij usporedbe ispitajte konvergenciju sljedećih redova:

a) $\sum \frac{\cos n}{2^n}$;

b) $\sum \frac{(-1)^n \cdot \sin n}{n^2}$;

Rješenje: **a)** Primijetimo da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi nejednakost $-1 < \cos n < 1$. Podijelimo li ovu nejednakost sa strogo pozitivnim brojem 2^n, znakovi nejednakosti neće se promijeniti. Tako ćemo dobiti:

$$(-1) \cdot \frac{1}{2^n} < \frac{\cos n}{2^n} < \frac{1}{2^n} \Rightarrow (-1) \cdot \sum \frac{1}{2^n} < \sum \frac{\cos n}{2^n} < \sum \frac{1}{2^n}.$$

Red $\sum \frac{1}{2^n}$ je geometrijski red u kojemu je $g_1 = q = \frac{1}{2}$. Njegov je zbroj jednak $Z = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1$.

Tako zaključujemo da je $(-1) \cdot 1 < \sum \frac{\cos n}{2^n} < 1$, tj. da je zbroj zadanoga reda neki realan broj iz intervala $\langle -1, 1 \rangle$. Dakle, zadani red konvergira.

b) Analogno kao i u prethodnom podzadatku, primijetimo da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi nejednakost $-1 < \sin n < 1$. Vrijednost izraza $(-1)^n$ je jednaka ili -1 ili 1. (Kad nastupa koji slučaj?) Ako broj iz intervala $\langle -1, 1 \rangle$ pomnožimo s -1 ili 1, dobit ćemo opet neki broj iz toga intervala. Zbog toga je $-1 < (-1)^n \cdot \sin n < 1$. Podijelimo li ovu nejednakost sa strogo pozitivnim brojem n^2, znakovi nejednakosti neće se promijeniti. Tako dobijemo:

$$(-1) \cdot \frac{1}{n^2} < \frac{(-1)^n \cdot \sin n}{n^2} < \frac{1}{n^2} \Rightarrow (-1) \cdot \sum \frac{1}{n^2} < \sum \frac{(-1)^n \cdot \sin n}{n^2} < \sum \frac{1}{n^2}.$$

Red $\sum \frac{1}{n^2}$ je Dirichletov red u slučaju $p = 2$. Prema zadatku 10., taj red konvergira jer je $p = 2 > 1$. Neka je $Z \in \mathbb{R}$ zbroj toga reda. Iz gornje nejednakosti zaključujemo da je zbroj zadanoga reda neki realan broj iz intervala $\langle -Z, Z \rangle$. Dakle, zadani red konvergira.

Domaća zadaća

1. Odredite sve $x \in \mathbb{R}$ za koje je zbroj reda $\sum \sin^{2\cdot n} x$ jednak 3.

2. Odredite sve $x \in \mathbb{R}$ za koje je zbroj reda $\sum (-1)^{n+1} \cdot \cos^{2\cdot n} x$ jednak $\frac{1}{3}$.

3. Ispitajte konvergenciju sljedećih redova (nije potrebno računati zbroj reda):

a) $\sum \frac{1}{n!}$;

b) $\sum \frac{1}{n^n}$;

c) $\sum \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$;

d) $\sum \frac{1}{(\ln n)^n}$;

e) $\sum \frac{n^2}{2 \cdot n^2 + 1}$;

f) $\sum \frac{1}{2^n + 1}$;

g) $\sum \frac{490}{(5 \cdot n + 2)^3}$;

h) $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

Rezultati zadataka

1. *Uputa i rješenje*: Riječ je o geometrijskom redu u kojemu su $g_1 = q = \sin^2 x.$ Njegov je zbroj jednak $Z = \dfrac{\sin^2 x}{1-\sin^2 x} = \dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}^2 x.$ Tako iz jednadžbe $\mathrm{tg}^2 x = 3$ slijedi $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k\cdot\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$

2. *Uputa i rješenje*: Riječ je o geometrijskom redu u kojemu su $g_1 = \cos^2 x,\ q = -\cos^2 x.$ Njegov je zbroj jednak $Z = \dfrac{\cos^2 x}{1-(-\cos^2 x)} = \dfrac{\cos^2 x}{1+\cos^2 x}.$ Tako iz jednadžbe $\dfrac{\cos^2 x}{1+\cos^2 x} = \dfrac{1}{3}$ slijedi $\cos^2 x = \dfrac{1}{2}$, odnosno $\cos(2\cdot x) = 0,$ pa je $x = \dfrac{\pi}{4} + k\cdot\dfrac{\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}.$

3. **a)** *Uputa*: Primijenite D'Alembertov kriterij. Dobiva se $r = 0.$ Red konvergira.

b) *Uputa*: Primijenite D'Alembertov kriterij i iskoristite da je $\lim\limits_n\left(\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n\right) = \dfrac{1}{e}$. Dobiva se $r = 0.$ Red konvergira.

c) *Uputa i rješenje*: Prema definiciji reda, odnosno niza djelomičnih zbrojeva vrijedi:

$$S_n = \ln\left(\frac{1+1}{1}\right) + \ln\left(\frac{2+1}{2}\right) + \ln\left(\frac{3+1}{3}\right) + \ldots + \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln\left(\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{n+1}{n}\right) = \ln(n+1).$$

Očito je $\lim\limits_n(S_n) = +\infty$, pa zadani red divergira.

d) *Uputa*: Primijenite Cauchyjev kriterij. Dobiva se $r = 0$. Red konvergira.

e) *Uputa i rješenje*: Uočimo da je $\lim\limits_n\left(\dfrac{n^2}{2\cdot n^2+1}\right) = \dfrac{1}{2} \neq 0$, pa nije ispunjen nužan uvjet konvergencije. Dakle, zadani red divergira.

f) *Uputa*: Uočite da za svaki $n\in\mathbb{N}$ vrijedi nejednakost $2^n < 2^n + 1,$ otkuda je $0 < \dfrac{1}{2^n+1} < \dfrac{1}{2^n}$, odnosno $0 < \sum\dfrac{1}{2^n+1} < \sum\dfrac{1}{2^n} = 1.$ Red konvergira.

g) *Uputa*: Primijenite Cauchyjev integralni kriterij i odredite $I = \displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{490}{(5\cdot x+2)^3}\cdot\mathrm{d}x$ metodom zamjene. Dobiva se $I = 1$, pa zadani red konvergira.

h) *Uputa*: Primijenite Leibnizov kriterij. Red konvergira.