1. Napišite (ako postoji) zatvorenu formulu za opći član niza $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ djelomičnih zbrojeva niza $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ako je:

a) $a_n = n$;

b) $a_n = \dfrac{1}{n}$;

c) $a_n = x^n$, za $x > 0$, ;

d) $a_n = \dfrac{1}{n^2 + n}$.

2. Za svaki niz $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ iz zadatka 1. odredite postoji li $\lim_n S_n$, odnosno je li pripadni red konvergentan.

3. Ispitajte konvergenciju sljedećih redova brojeva (nije potrebno računati zbrojeve redova):

a) $\sum\left(\dfrac{n+1}{2\cdot n+1}\right)^n$;

b) $\sum\dfrac{n^2}{2018^n}$;

c) $\sum\dfrac{n^{n-1}}{\sqrt{2018^n}}$;

d) $\sum\dfrac{2018^n}{n^{2018}}$;

e) $\sum\dfrac{2\cdot n-1}{2^{\frac{n}{2}}}$;

f) $\sum\dfrac{n+2018}{\sqrt[3]{2018^n}}$

g) $\sum\dfrac{1}{(3\cdot n-2)\cdot(3\cdot n+1)}$;

h) $\sum\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$;

i) $\sum(-1)^{\frac{n\cdot(n-1)}{2}}\cdot\left(\dfrac{n}{2018\cdot n-1}\right)^n$;

j) $\sum\dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$.

4. Neka je $p\in\mathbb{R}$ proizvoljan, ali fiksiran. Ispitajte konvergenciju *Dirichletova* (ili *hiperharmonijskoga*) *reda* $\sum\dfrac{1}{n^p}$ u zavisnosti o $p\in\mathbb{R}$.

5. Koristeći pogodnu usporedbu ispitajte konvergenciju sljedećih redova:

a) $\sum \frac{\cos n}{2^n}$;

b) $\sum \frac{(-1)^n \sin n}{n^2}$;

c) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2}{n \cdot \ln^3 n}$;

d) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\ln n + 1}{(n \cdot \ln n)^3}$.

6. Odredite sve $x \in \mathbb{R}$ za koje je zbroj reda R jednak 2 ako je:

a) $R = \sum_{n=0}^{+\infty} \cos^n x$;

b) $R = \sum_{n=0}^{+\infty} \sin^n (\pi \cdot x)$;

c) $R = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot \cos^n (2 \cdot x)$;

d) $R = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot \sin^n \frac{x}{2}$.

7. Može li se divergencija harmonijskoga reda dokazati koristeći:

a) Cauchyjev kriterij;
b) D'Alembertov kriterij;
c) Raabeov kriterij;
d) Cauchyjev integralni kriterij?

Obrazložite svoje odgovore.

RJEŠENJA ZADATAKA

1.

a) $S_n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$;

b) Ne postoji zatvorena formula za S_n.

c) $S_n = \sum_{k=1}^{n} x^k = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$;

d) $S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$.

2.

a) $\lim_n S_n = \lim_n \frac{n \cdot (n+1)}{2} = +\infty \Rightarrow$ red divergira.

b) Red divergira.

c) Ako je $|x| < 1$, zbroj reda je $S = \frac{1}{1-x}$ i red tada konvergira.

U suprotnom, zbroj reda je $S = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$ i red tada divergira.

d) $\lim_n S_n = \lim_n \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1 \Rightarrow$ zbroj reda je 1 i red konvergira.

3.

a) $\lim_n \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_n \frac{n+1}{2 \cdot n+1} = \frac{1}{2} \Rightarrow$ konvergira;

b) $\lim_n \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_n \frac{\left(\sqrt[n]{n}\right)^2}{2018} = \frac{1}{2018} \Rightarrow$ konvergira;

c) $\lim_n \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_n \frac{n}{\sqrt[n]{n} \cdot \sqrt{2018}} = +\infty \Rightarrow$ divergira;

d) $\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_n 2018 \cdot \left(\lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n}\right)^{2018} = 2018 \Rightarrow$ divergira;

e) $\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_n \frac{\frac{2 \cdot n+1}{2^{\frac{n+1}{2}}}}{\frac{2 \cdot n-1}{2^{\frac{n}{2}}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \lim_n \frac{2 \cdot n+1}{2 \cdot n-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow$ konvergira;

f) $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{n+2019}{2018^{\frac{n+1}{3}}}}{\frac{n+2018}{2018^{\frac{n}{3}}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2018}} \cdot \lim_{n\to+\infty} \frac{n+2019}{n+2018} = \frac{1}{\sqrt[3]{2018}} \Rightarrow$ konvergira;

g) $\lim_n \left[n \cdot \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right)\right] = \lim_n \left[n \cdot \left(1 - \frac{3 \cdot n-2}{3 \cdot n+4}\right)\right] = 6 \Rightarrow$ konvergira;

h) $\lim_n |a_n| = \lim_n \frac{1}{n} = 0 \Rightarrow$ konvergira;

i) $\lim\limits_n \sqrt[n]{|a_n|} = \lim\limits_n \dfrac{n}{2018\cdot n-1} = \dfrac{1}{2018} \Rightarrow$ konvergira;

j) $\lim\limits_n |a_n| = \lim\limits_n \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0 \Rightarrow$ konvergira.

4. Ako je $p<0$, onda je $\lim\limits_n \dfrac{1}{n^p} = \lim\limits_n n^{-p} = +\infty$, pa primjenom nužnoga uvjeta konvergencije reda zaključujemo da u ovom slučaju red divergira.

Ako je $p \ge 0$, onda je funkcija $f(x) = \dfrac{1}{x^p}$ strogo pozitivna, neprekidna i monotono padajuća na intervalu $\left[1,+\infty\right\rangle$. Primijenimo Cauchyjev integralni kriterij, pa dobijemo:

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^p} = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{\mathrm{d}x}{x^p} = \lim_{b\to+\infty} \left[\frac{x^{1-p}}{1-p}\right]_1^b = \lim_{b\to+\infty} \frac{b^{1-p}-1}{1-p}.$$

Ova granična vrijednost postoji ako i samo ako postoji $\lim\limits_{b\to+\infty} b^{1-p}$, odnosno ako i samo ako je $1-p<0$, odnosno ako i samo ako je $p>1$. Tako zaključujemo da zadani red konvergira ako i samo ako je $p>1$, a divergira ako i samo ako je $p \le 1$.

5.

a) $\left(\dfrac{\cos n}{2^n} \le \dfrac{1}{2^n}\right) \wedge \left(\sum \dfrac{1}{2^n} \text{ konvergira}\right) \Rightarrow \left(\sum \dfrac{\cos n}{2^n} \text{ konvergira}\right)$;

b) $\left[\dfrac{(-1)^n \cdot \sin n}{n^2} \le \dfrac{1}{n^2}\right] \wedge \left(\sum \dfrac{1}{n^2} \text{ konvergira}\right) \Rightarrow \left(\sum \dfrac{(-1)^n \cdot \sin n}{n^2} \text{ konvergira}\right)$;

c) $\left[f(n) = \dfrac{2}{n\cdot \ln^3 n} \text{ je strogo pozitivna, monotono padajuća i neprekidna na } \left[3,+\infty\right\rangle\right] \wedge$

$\left(\displaystyle\int_3^{+\infty} \dfrac{2\cdot \mathrm{d}x}{x\cdot \ln^3 x} = \dfrac{2}{\ln^2 3}\right) \Rightarrow \left(\sum \dfrac{2}{n\cdot \ln^3 n} \text{ konvergira}\right)$;

d) $\left[f(n) = \dfrac{\ln n + 1}{(n\cdot \ln n)^3} \text{ je strogo pozitivna, monotono padajuća i neprekidna na } \left[3,+\infty\right\rangle\right]$

$\wedge \left(\displaystyle\int_3^{+\infty} \dfrac{\ln x + 1}{(x\cdot \ln x)^3}\cdot \mathrm{d}x = \dfrac{1}{18\cdot \ln^2 3}\right) \Rightarrow \left(\sum \dfrac{\ln n + 1}{(n\cdot \ln n)^3} \text{ konvergira}\right)$.

6.

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \cos^n x = 1 + \cos x + \cos^2 x + \cos^3 x + \ldots = \dfrac{1}{1-\cos x} \Rightarrow \dfrac{1}{1-\cos x} = 2 \Rightarrow$

$x_k = \pm\dfrac{\pi}{3} + k\cdot 2\cdot \pi,\ k \in \mathbb{Z}$;

b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \sin^n(\pi\cdot x) = 1 + \sin(\pi\cdot x) + \sin^2(\pi\cdot x) + \sin^3(\pi\cdot x) + \ldots = \dfrac{1}{1-\sin(\pi\cdot x)}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{1-\sin(\pi\cdot x)} = 2 \Rightarrow x_k = \dfrac{12\cdot k + 1}{6},\ x_l = \dfrac{12\cdot l + 5}{6},\ k, l \in \mathbb{Z}$;

c) $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\cdot\cos^n(2\cdot x)=1-\cos x+\cos^2(2\cdot x)-\cos^3(2\cdot x)+\ldots=\frac{1}{1+\cos(2\cdot x)}\Rightarrow$

$\frac{1}{1+\cos(2\cdot x)}=2\Rightarrow x_k=\pm\frac{\pi}{3}+k\cdot\pi,\ k\in\mathbb{Z};$

d) $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\cdot\sin^n\frac{x}{2}=1-\sin\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}-\sin^3\frac{x}{2}+\ldots=\frac{1}{1+\sin\frac{x}{2}}\Rightarrow\frac{1}{1+\sin\frac{x}{2}}=2$

$\Rightarrow x_k=\frac{\pi\cdot(12\cdot k-1)}{3},\ x_l=\frac{\pi\cdot(12\cdot l+7)}{3},\ k,l\in\mathbb{Z}.$

7.

a) $\lim_n\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_n\frac{1}{\sqrt[n]{n}}=1\Rightarrow$ nema odluke;

b) $\lim_n\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_n\frac{n}{n+1}=1\Rightarrow$ nema odluke;

c) $\lim_n\left[n\cdot\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)\right]=\lim_n\frac{n}{n+1}=1\Rightarrow$ nema odluke;

d) Funkcija $f(x)=\frac{1}{x}$ je strogo pozitivna, strogo padajuća i neprekidna na $[1,+\infty\rangle$.

Stoga zadani red i integral $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}\cdot\mathrm{d}x$ istodobno ili konvergiraju ili divergiraju.

Budući da je $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}\cdot\mathrm{d}x=\lim_{b\to+\infty}\left(\int_1^b\frac{1}{x}\cdot\mathrm{d}x\right)=\lim_{b\to+\infty}(\ln b)=+\infty$, zadani red divergira.