2. REDOVI

2.2. NUMERIČKI REDOVI. KRITERIJI KONVERGENCIJE REDOVA.

2.2.1. POJAM NUMERIČKOGA REDA

- Neka je $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz realnih brojeva.
- (*Podsjetnik*: Niz realnih brojeva je bilo koja funkcija $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.)
- Niz $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiran rekurzivno s:
- $s_1 = a_1$, $s_n = s_{n-1} + a_n$, za $n \geq 2$
- nazivamo **niz djelomičnih zbrojeva** (ili *niz parcijalnih suma*) niza $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- Opći (n – ti) član toga niza jednak je zbroju prvih n članova niza $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- Uređeni par $((a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (s_n)_{n\in\mathbb{N}})$ naziva se **red** realnih brojeva ili, kraće i nepreciznije, **numerički red**.
- Svaki numerički red je jednoznačno određen zadavanjem *općega* člana niza $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2.2.2. POJAM KONVERGENTNOGA REDA

- Kao i svaki drugi niz, tako i niz djelomičnih zbrojeva $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ili ima ili nema svoju graničnu vrijednost (limes).
- Ako niz $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ima graničnu vrijednost i ta je vrijednost jednaka "konkretnom" broju $s\in\mathbb{R}$, kažemo da red $\sum a_n$ **konvergira** ka broju s.
- Formalno pišemo: $\sum_n a_n = s$.
- Sukladno ovoj oznaci, broj s nazivamo **zbroj** ili *suma* reda.
- Ako niz $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nema graničnu vrijednost, kažemo da pripadni red *divergira*.

2.2.3. KRITERIJI KONVERGENCIJE REDA

- Ispitivanje konvergencije numeričkih redova u općem je slučaju relativno teško jer najčešće ne znamo formulu za opći član niza djelomičnih zbrojeva.
- Zbog toga se postavlja pitanje:
- *Može li se* (i, ako može, kako) *utvrditi je li numerički red konvergentan* ***isključivo*** *na temelju formule za opći član polaznoga niza* $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$?
- Opći kriterij za ispitivanje konvergencije *bilo kojega* numeričkoga reda danas nije poznat.
- Poznati su određeni kriteriji prema kojima se za relativnu većinu numeričkih redova može utvrditi jesu li konvergentni ili nisu (ali *nijedan* kriterij ne određuje pripadni zbroj reda u slučaju da red konvergira).

2.2.4. KRITERIJI KONVERGENCIJE REDA

- Kriterij 1. (*nužan uvjet konvergencije numeričkoga reda*) Ako red konvergira, onda vrijedi $\lim_n a_n = 0$.
- Za primjenu je značajnija ekvivalentna tvrdnja:
- Kriterij 2. Ako vrijedi $\lim_n a_n = A \neq 0$,
- numerički red je divergentan.
- *Pravilo*: Prigodom ispitivanja konvergencije numeričkoga reda najprije treba odrediti graničnu vrijednost polaznoga niza.
- Ako je ta vrijednost različita od nule, red je divergentan (i ispitivanje konvergencije reda time završava).
- Ako je ta vrijednost jednaka nuli, red može biti ili konvergentan ili divergentan, pa treba nastaviti ispitivanje prema drugim kriterijima.

2.2.4. KRITERIJI KONVERGENCIJE REDA

- Četiri najčešće korištena kriterija za ispitivanje konvergencije redova su *Cauchyjev*, *D'Alembertov*, *Leibnizov* i *Raabeov*.
- Cauchyjev kriterij: Ako je $\lim_n \sqrt[n]{|a_n|} = r \in \mathbb{R}$, onda vrijedi:
- ako je $r < 1$, red $\sum a_n$ je konvergentan;
- ako je $r > 1$, red $\sum a_n$ je divergentan;
- ako je $r = 1$, nema odluke.
- Ovaj kriterij podesno je primijeniti ako je opći član polaznoga niza *n*- ta potencija nekoga izraza.

2.2.4. KRITERIJI KONVERGENCIJE REDA

- D'Alembertov kriterij: Ako je $\lim_{n} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = r \in \mathbb{R}$,
- onda vrijedi:
- ako je $r < 1$, red $\sum a_n$ je konvergentan;
- ako je $r > 1$, red $\sum a_n$ je divergentan;
- ako je $r = 1$, nema odluke.
- Ovaj kriterij je najjednostavniji za praktičnu primjenu.
- Leibnizov kriterij: Ako niz $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *strogo pozitivnih* realnih brojeva strogo pada i ima graničnu vrijednost 0, onda je alternirajući red $\sum (-1)^n \cdot a_n$ (čiji članovi pravilno mijenjaju predznak) konvergentan.

2.2.4. KRITERIJI KONVERGENCIJE REDA

- Raabeov kriterij: Ako je $\lim_n \left(n \cdot \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n} \right) \right) = r \in \mathbb{R}$,
- onda vrijedi:
- ako je $r > 1$, tada red $\sum a_n$ konvergira;
- ako je $r < 1$, tada red $\sum a_n$ divergira;
- za $r = 1$ nema odluke.
- Raabeov kriterij se najčešće primjenjuje u slučajevima u kojima D'Alembertov kriterij ne daje odluku.

2.2.5. KRITERIJ USPOREDBE

- U općem slučaju konvergencija reda može se ispitati tako da se zadani red usporedi ili s (hiper)harmonijskim ili s geometrijskim redom.
- Vrijedi sljedeći kriterij:
- *Ako su* $\sum a_n$ i $\sum b_n$ *redovi s pozitivnim članovima takvi da za gotovo sve* $n \in \mathbb{N}$ *vrijedi* $a_n \leq b_n$*, onda:*
- *ako* $\sum b_n$ *konvergira, onda i* $\sum a_n$ *konvergira*;
- *ako* $\sum a_n$ *divergira, onda i* $\sum b_n$ *divergira.*

2.2.5. KRITERIJ USPOREDBE

- Korisna su i sljedeća dva kriterija:
- **Kriterij 1.** (*Cauchyjev integralni kriterij*) Neka je opći član reda određen *strogo pozitivnom, monotono padajućom* i *neprekidnom* funkcijom *f*. Tada red
- $\sum a_n$ i nepravi integral $\int_a^{+\infty} f(x) \cdot \mathrm{d}x$ istodobno ili konvergiraju ili divergiraju.
- **Kriterij 2.** Ako konvergira red $\sum |a_n|$, onda konvergira i red $\sum a_n$. (Obrat ne vrijedi.)
- Kriterij 2. podesno je primijeniti umjesto Leibnizova kriterija pri ispitivanju konvergencije alternirajućih redova.

1. Napišite (ako postoji) zatvorenu formulu za opći član niza $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ djelomičnih zbrojeva niza $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ako je:

a) $a_n = n$;

Rješenje: Traženu formulu odredit ćemo metodom teleskopiranja. Prema definiciji niza S_n, vrijedi:

$$\begin{aligned}
&S_1 = a_1 = 1,\\
&S_2 = S_1 + a_2 = S_1 + 2,\\
&S_3 = S_2 + a_3 = S_2 + 3,\\
&\vdots\\
&S_n = S_{n-1} + a_n = S_{n-1} + n.
\end{aligned}$$

Odatle zbrajanjem zasebno lijevih i zasebno desnih strana, te poništavanjem istih članova na različitim stranama, dobivamo:

$$\begin{aligned}
S_n &= 1 + 2 + 3 + \ldots + n =\\
&= \frac{n\cdot(n+1)}{2}.
\end{aligned}$$

(Posljednja formula je posljedica činjenice da je niz $1, 2, \ldots, n$ konačan aritmetički niz kojemu je prvi član jednak 1, a posljednji član i ukupan broj svih članova jednaki n. Zbroj tih članova računamo tako da ukupan broj članova (n) podijelimo s 2, pa dobivenih količnik pomnožimo sa zbrojem prvoga i posljednjega člana $(1+n)$.)

b) $a_n = \frac{1}{n}$;

Rješenje: Analogno kao u **a**) podzadatku dobivamo:

$$\begin{aligned} S_1 &= a_1 = 1, \\ S_2 &= S_1 + a_2 = \\ &= S_1 + \frac{1}{2} \\ S_3 &= S_2 + a_3 = \\ &= S_2 + \frac{1}{3}, \\ &\vdots \\ S_n &= S_{n-1} + a_n = \\ &= S_{n-1} + \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Zbrajanjem tih jednakosti dobivamo:

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}.$$

Može se pokazati da **ne** postoji zatvorena formula za n-ti član ovoga niza.

c) $a_n = x^n$, za $x > 0$, $x \neq 1$;

Rješenje: Potpuno analogno kao u prethodnim podzadacima dobivamo:

$$S_n = x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n.$$

Ovdje je riječ o zbroju prvih n članova konačnoga geometrijskoga niza kojemu su prvi član (S_1) i količnik (q) jednaki x. Zbroj tih članova je:

$$\begin{aligned} Z &= S_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = \\ &= x \cdot \frac{x^n - 1}{x - 1} = \quad . \\ &= \frac{x^{n+1} - x}{x - 1} \end{aligned}$$

d) $a_n = \dfrac{1}{n^2+n}$.

Rješenje: Rastavimo na parcijalne razlomke opći član niza a_n. Primijetimo najprije da vrijedi identitet:

$$n^2 + n = n \cdot (n+1), \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Zbog toga tražimo $A, B \in \mathbb{R}$ takve da vrijedi rastav:

$$\frac{1}{n^2+n} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1}.$$

Odatle množenjem sa n^2+n dobivamo:

$$1 = A \cdot (n+1) + B \cdot n.$$

Uvrštavanjem $n=-1$ dobijemo $B=-1$, a uvrštavanjem $n=0$ dobijemo $A=1$. To smijemo napraviti jer gornja jednakost – kao jednakost polinoma – mora vrijediti za svaki $n \in \mathbb{R}$ (iako se u zadatku pretpostavlja da je $n \in \mathbb{N}$). Tako smo dobili:

$$\frac{1}{n^2+n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Ponovno primijenimo metodu teleskopiranja. Dobivamo:

$$\begin{aligned}
S_1 &= a_1 = \\
&= \frac{1}{1} - \frac{1}{1+1} = \\
&= 1 - \frac{1}{2}, \\
S_2 &= S_1 + a_2 = \\
&= S_1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2+1} = \\
&= S_1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3}, \\
S_3 &= S_2 + a_3 = \\
&= S_2 + \frac{1}{3} - \frac{1}{3+1} = \\
&= S_2 + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}, \\
&\vdots \\
S_n &= S_{n-1} + a_n = \\
&= S_{n-1} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.
\end{aligned}$$

Zbrajanjem tih jednakosti, osim članova $S_1, S_2, S_3, ..., S_{n-1}$, ponište se i svi članovi $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n}$. Tako preostaje:

$$S_n = 1 - \frac{1}{n+1} = \\ = \frac{(n+1)-1}{n+1} = \\ = \frac{n}{n+1}.$$

Napomena 1. Niz a_n iz **b)** podzadatka nazivamo **harmonijski niz**. Red $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ nazivamo **harmonijski red.** Njega treba dobro zapamtiti jer ćemo ga često koristiti u rješavanju zadataka.

Napomena 2. Izvedimo formulu za zbroj prvih n članova aritmetičkoga niza korištenu u rješenju **a)** podzadatka. Pretpostavimo da je aritmetički niz zadan svojim prvim članom a_1 i razlikom d. Tada je opći član toga niza dan formulom:

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Za svaki $k = 1, 2, ..., n$ odredimo zbroj $a_k + a_{n-k+1}$. Koristeći gornju formulu dobivamo:

$$\begin{aligned} a_k + a_{n-k+1} &= \left(a_1 + (k-1) \cdot d\right) + \left(a_1 + ((n-k+1)-1) \cdot d\right) = \\ &= \left(a_1 + (k-1) \cdot d\right) + \left(a_1 + (n-k) \cdot d\right) = \\ &= a_1 + k \cdot d - d + a_1 + n \cdot d - k \cdot d = \\ &= a_1 + \left(a_1 + (n-1) \cdot d\right) = \\ &= a_1 + a_n. \end{aligned}$$

To posebno znači da su zbrojevi

$$\begin{aligned} &a_2 + a_{n-2+1} = a_2 + a_{n-1}, \\ &a_3 + a_{n-3+1} = a_3 + a_{n-2}, \\ &... \end{aligned}$$

međusobno jednaki i jednaki $a_1 + a_n$. Tako sada napišemo:

$$\begin{aligned} S &= a_1 + a_2 + ... + a_n, \\ S &= a_n + a_{n-1} + ... + a_1, \end{aligned}$$

pa zbrojimo zasebno lijeve i zasebno desne strane ovih jednakosti koristeći pravila komutativnosti i asocijativnosti za zbrajanje realnih brojeva:

$$\begin{aligned}2\cdot S &= (a_1+a_n)+(a_2+a_{n-1})+\ldots+(a_n+a_1)=\\ &= \text{(prema dokazanoj jednakosti)} =\\ &= n\cdot(a_1+a_n).\end{aligned}$$

Odatle izravno slijedi:

$$S=\frac{n}{2}\cdot(a_1+a_n),$$

što smo i željeli dokazati.

Napomena 3. Izvedimo formulu za zbroj prvih n članova geometrijskoga niza kojemu je prvi član g_1, a količnik q. Opći član toga niza je:

$$g_n=g_1\cdot q^{n-1},\ \forall n\in\mathbb{N}.$$

Neka je

$$\begin{aligned}S_n &= g_1+g_2+g_3+\ldots+g_n=\\ &= g_1+g_1\cdot q+g_1\cdot q^2+\ldots+g_1\cdot q^{n-1}.\end{aligned}$$

Ako je $q=1$, onda imamo konstantan niz $g_1, g_1, \ldots, g_1$ čiji je zbroj $n\cdot g_1$.

Ako je $q\notin\{0,1\}$, onda pomnožimo gornju jednakost s q. Dobivamo:

$$q\cdot S_n=g_1\cdot q+g_1\cdot q^2+g_1\cdot q^3+\ldots+g_1\cdot q^n.$$

Od te jednakosti oduzmimo jednakost

$$S_n=g_1+g_1\cdot q+g_1\cdot q^2+\ldots+g_1\cdot q^{n-1}$$

tako da zasebno oduzmemo lijeve, a zasebno desne strane. Pri oduzimanju se ponište svi članovi na desnoj strani osim g_1 i $g_1\cdot q^n$. Dobivamo:

$$\begin{aligned}&q\cdot S_n-q=g_1\cdot q^n-g_1,\\ &(q-1)\cdot S_n=g_1\cdot\left(q^n-1\right).\end{aligned}$$

Odatle lagano slijedi:

$$S_n=g_1\cdot\frac{q^n-1}{q-1}.$$

2. Za svaki niz $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ iz rješenja zadatka 1. odredite postoji li $\lim_n S_n$, odnosno je li pripadni red konvergentan.

Rješenje: **a)** Očito je

$$\begin{aligned}\lim_n S_n &= \lim_n \frac{n\cdot(n+1)}{2} = \\ &= \left\{\frac{+\infty\cdot+\infty}{2}\right\} = \\ &= +\infty.\end{aligned}$$

Dakle, dobiveni red je divergentan (i divergira u $+\infty$).

b) Ne znamo zatvorenu formulu za opći član niza S_n, pa ne možemo postupiti analogno kao u **a)** podzadatku. Međutim, možemo se poslužiti sljedećom dosjetkom. Pretpostavimo da je harmonijski red konvergentan i neka je njegov zbroj jednak *S*. Tada na zbrajanje članova reda možemo primijeniti uobičajena svojstva komutativnosti i asocijativnosti. (Za divergentne redove ta svojstva općenito ne vrijede.) Također, primijetimo da vrijedi nejednakost:

$$\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1},\ \forall n\in\mathbb{N},$$

koja izravno slijedi dijeljenjem obje strane očite nejednakosti

$$n+1>n,\ \forall n\in\mathbb{N},$$

strogo pozitivnim brojem $n\cdot(n+1)$. Koristeći tu nejednakost dobivamo:

$$\begin{aligned}S &= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\ldots = \\ &= \left(1+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\ldots > \\ &> \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+\ldots = \\ &= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots = \\ &= S,\end{aligned}$$

što je proturječje. Pretpostavka je bila pogrešna, tj. harmonijski red divergira (i divergira u $+\infty$.)

c) U ovom podzadatku treba se prisjetiti osnovnoga svojstva eksponencijalne funkcije:

$$\lim_n \left(q^n\right) = \begin{cases} +\infty, \text{ ako je } |q| > 1 \\ 0, \text{ ako je } 0 < |q| < 1. \end{cases}$$

Zbog toga

$$\lim_n S_n = \lim_n \left(g_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \right)$$

postoji ako i samo ako je $0 < |q| < 1$. U tom je slučaju ta granična vrijednost jednaka:

$$\lim_n S_n = g_1 \cdot \left(\frac{0-1}{q-1} \right) =$$
$$= \frac{g_1}{1-q}.$$

Dakle, zadani red konvergira ako i samo ako je $0 < |q| < 1$ i u tom je slučaju njegov zbroj jednak

$$S = \frac{g_1}{1-q}.$$

d) U ovom podzadatku odmah imamo:

$$\lim S_n = \lim_n \left(1 - \frac{1}{\underbrace{n+1}_{\to +\infty}} \right) =$$
$$= 1 - 0 =$$
$$= 1.$$

Dakle, zadani red je konvergentan i zbroj mu je jednak 1.

Napomena 4. Rezultate podzadataka 2. **b**) i **c**) treba dobro zapamtiti jer ćemo ih često koristiti u zadacima. Dakle, **harmonijski red je divergentan, a geometrijski red je konvergentan ako i samo ako je apsolutna vrijednost njegova količnika strogo manja od 1**.

Napomena 5. Često se pogrešno tvrdi da divergencija nekoga reda realnih brojeva povlači da je granična vrijednost pripadnoga niza djelomičnih zbrojeva $+\infty$. Naime, red može biti divergentan, a da pritom ne divergira u $+\infty$. Takav je npr. red $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n$ čiji je niz djelomičnih zbrojeva $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiran pravilom

$$S_n = \begin{cases} 1, & \text{za parne } n, \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

$\lim\limits_n (S_n)$ ne postoji jer niz S_n ima točno dva različita gomilišta: 0 i 1. Međutim, očito ne vrijedi $\lim\limits_n (S_n) = +\infty$.

3. Odredite sve $x \in \mathbb{R}$ za koje je zbroj reda:

a) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (\sin x)^n$ jednak 1;

Rješenje: Zadani red je geometrijski red kojemu je

$$g_1 = q = \sin x .$$

Zbroj toga reda jednak je

$$S = \frac{\sin x}{1 - \sin x} .$$

Prema zahtjevu zadatka, taj zbroj mora biti jednak 1, pa dobivamo jednadžbu

$$\frac{\sin x}{1 - \sin x} = 1.$$

Množenjem s $1 - \sin x$ i sređivanjem izraza slijedi

$$\sin x = \frac{1}{2}.$$

Odatle zaključujemo da vrijedi nejednakost

$$0 < |\sin x| < 1 ,$$

tj. da smo smjeli primijeniti formulu za izračun zbroja konvergentnoga geometrijskoga reda. Preostaje zaključiti da je skup svih rješenja jednadžbe $\sin x = \frac{1}{2}$

$$S = \left\{ \frac{\pi}{6} + 2 \cdot k \cdot \pi : k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{5}{6} \cdot \pi + 2 \cdot k \cdot \pi : k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

b) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} (\cos x)^n$ jednak –1.

Rješenje: U ovom slučaju imamo geometrijski red kojemu su

$$g_1 = \cos x,$$
$$q = -\cos x.$$

Njegov je zbroj jednak

$$S = \frac{\cos x}{1+\cos x}.$$

Taj zbroj mora biti jednak –1, pa dobivamo jednadžbu

$$\frac{\cos x}{1+\cos x} = -1.$$

Množenjem s $1+\cos x$ i sređivanjem izraza slijedi

$$\cos x = \frac{-1}{2}.$$

Odatle zaključujemo da vrijedi nejednakost

$$0 < |-\cos x| = |\cos x| < 1,$$

tj. da smo smjeli primijeniti formulu za izračun zbroja konvergentnoga geometrijskoga reda. Preostaje zaključiti da je skup svih rješenja jednadžbe $\cos x = \frac{-1}{2}$

$$S = \left\{ \frac{2}{3} \cdot \pi + 2 \cdot k \cdot \pi : k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{4}{3} \cdot \pi + 2 \cdot k \cdot \pi : k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

4. Dokažite *nužan uvjet konvergencije reda*: Ako red $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ konvergira, onda je $\lim_n (a_n) = 0.$

Rješenje: Pretpostavimo da red $\sum a_n$ konvergira. To znači da njegov niz djelomičnih zbrojeva $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira i da je njegova granična vrijednost jednaka „konkretnom" broju $S \in \mathbb{R}$. Promotrimo rekurziju kojom je definiran niz $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$S_n = S_{n-1} + a_n, \ \forall n \in \mathbb{N}, \ n \geq 2.$$

Odavde je

$$a_n = S_n - S_{n-1}.$$

Sa graničnom vrijednošću „napadnemo" obje strane ove jednakosti. Znamo da je $\lim_n (S_n) = S$. No, onda je i $\lim_n (S_{n-1}) = S$ jer je riječ o istom nizu. Dakle, postoje obje granične vrijednosti na desnoj strani gornje jednakosti, pa smijemo primijeniti osnovno svojstvo graničnih vrijednosti

$$\lim_n (b_n - c_n) = \lim_n (b_n) - \lim_n (c_n).$$

Tako odmah slijedi:

$$\begin{aligned}\lim_n (a_n) &= \lim_n (S_n - S_{n-1}) = \\ &= \lim_n (S_n) - \lim_n (S_{n-1}) = \\ &= S - S = \\ &= 0,\end{aligned}$$

što smo i tvrdili.

Napomena 6. Nužan uvjet konvergencije reda korisnije je zapamtiti u obliku:

Ako je $\lim_n (a_n) = L \neq 0,$ *onda red divergira.*

Dakle, **divergencija** reda može se utvrditi (samo) određivanjem granične vrijednosti polaznoga niza (ako je to moguće).

Ako je $\lim_n (a_n) = 0$, ne znamo ništa ni o konvergenciji, ni o divergenciji reda. Npr. pokazali smo da je red $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ divergentan. Kasnije ćemo pokazati da red $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergira.

No, očito je

$$\lim_n\left(\frac{1}{n}\right)=\lim_n\left(\frac{1}{n^2}\right)=0.$$

5. Ispitajte konvergenciju reda $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(n+1)^2}{n^2+n+1}$. Sve svoje tvrdnje precizno obrazložite.

Rješenje: Označimo

$$a_n=\frac{(n+1)^2}{n^2+n+1}.$$

Odredimo $\lim_n(a_n)$. Imamo redom:

$$\begin{aligned}\lim_n(a_n)&=\lim_n\left(\frac{(n+1)^2}{n^2+n+1}\right)=\\&=\lim_n\left(\frac{n^2+2\cdot n+1}{n^2+n+1}\right)=\\&=\lim_n\left(\frac{1+2\cdot\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}\right)=\\&=\frac{1+0+0}{1+0+0}=\\&=1,\end{aligned}$$

pa primjenom ekvivalentne formulacije nužnoga uvjeta konvergencije reda iz Napomene 6. zaključujemo da zadani red divergira.

6. Primjenom Cauchyjeva kriterija dokažite konvergenciju sljedećih redova:

a) $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{n}{2\cdot n+1}\right)^n$;

Rješenje: Za svaki od zadanih redova najprije ćemo provjeriti jesu li gotovo svi njegovi članovi strogo pozitivni (tj. sadrži li polazni niz konačno mnogo strogo negativnih članova). To ćemo učiniti kako bismo izbjegli računanje s apsolutnom vrijednošću pod korijenom. Potom ćemo odrediti

$$r := \lim_n\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right).$$

Ako je $r<1$, polazni red konvergira.

Ako je $r>1$, polazni red divergira.

Ako je $r=1$, ne možemo donijeti odluku o konvergenciji, pa moramo primijeniti neki drugi kriterij.

Očito vrijede nejednakosti

$$\left.\begin{array}{l} n>0, \\ 2\cdot n+1>0 \end{array}\right\} \forall n\in\mathbb{N}.$$

Dakle, ne moramo računati s apsolutnom vrijednošću. Zbog toga imamo:

$$\begin{aligned} r &= \lim_n \sqrt[n]{\left(\frac{n}{2\cdot n+1}\right)^n} = \\ &= \lim_n\left(\frac{n}{2\cdot n+1}\right) = \\ &= \lim_n\left(\frac{1}{2+\frac{1}{n}}\right) = \\ &= \frac{1}{2+0} = \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Dakle, zadani red je konvergentan, što je i trebalo dokazati.

b) $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\cdot\left(\frac{n+1}{2\cdot n-1}\right)^n$;

Rješenje: Očito vrijede nejednakosti:

$$\left.\begin{aligned} n+1>0, \\ 2\cdot n-1>0 \end{aligned}\right\}\forall n\in\mathbb{N}.$$

Međutim, svaki neparni član reda je strogo negativan jer je $(-1)^n=-1$ ako i samo ako je n neparan cijeli broj. Zbog toga formalno moramo primijeniti apsolutnu vrijednost kako bismo „neutralizirali“ negativne predznake neparnih članova reda. Imamo redom:

$$\begin{aligned} r &= \lim_n \sqrt[n]{\left|(-1)^n\cdot\left(\frac{n+1}{2\cdot n-1}\right)^n\right|}= \\ &= \lim_n \sqrt[n]{\underbrace{\left|(-1)^n\right|}_{=1}\cdot\left|\left(\frac{n+1}{2\cdot n-1}\right)^n\right|}= \\ &= \lim_n \sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{2\cdot n-1}\right)^n}= \\ &= \lim_n\left(\frac{n+1}{2\cdot n-1}\right)= \\ &= \lim_n\left(\frac{1+\frac{1}{n}}{2-\frac{1}{n}}\right)= \\ &= \frac{1+0}{2-0}= \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Dakle, zadani red je konvergentan, što je i trebalo dokazati.

c) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{2024}}{2024^n}$.

Rješenje: U ovom ćemo zadatku iskoristiti jednakost

$$\lim_n \left(\sqrt[n]{n}\right) = 1.$$

Primijetimo da vrijede nejednakosti:

$$\left.\begin{array}{l} n^{2024} > 0, \\ 2024^n > 1 \end{array}\right\} \forall n \in \mathbb{N}.$$

Zbog toga ne trebamo primijeniti apsolutnu vrijednost. Tako imamo redom:

$$\begin{aligned} r &= \lim_n \left(\sqrt[n]{\frac{n^{2024}}{2024^n}} \right) = \\ &= \lim_n \left(\frac{\sqrt[n]{n^{2024}}}{\sqrt[n]{2024^n}} \right) = \\ &= \lim_n \left(\frac{\left(\sqrt[n]{n}\right)^{2024}}{2024} \right) = \\ &= \frac{1^{2024}}{2024} = \\ &= \frac{1}{2024}. \end{aligned}$$

Dakle, zadani red je konvergentan, što je i trebalo dokazati.

7. Primjenom D'Alembertova kriterija ispitajte konvergenciju sljedećih redova:

a) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+2}{2^n}$

Rješenje: Najprije ćemo utvrditi radi li se o redu čiji su svi članovi strogo pozitivni racionalni brojevi. Pokaže li se ta tvrdnja točnom, onda pri ispitivanju konvergencije ne moramo koristiti apsolutne vrijednosti, tj. možemo računati

$$r := \lim_n \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} \right),$$

te primijeniti zaključivanje potpuno analogno onome kod primjene Cauchyjeva kriterija.

U ovom zadatku je

$$a_n = \frac{n+2}{2^n} > 0, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Tada je

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{(n+1)+2}{2^{n+1}} = \\ &= \frac{n+3}{2^{n+1}}. \end{aligned}$$

Tako sada imamo:

$$\begin{aligned} r &= \lim_n \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} \right) = \\ &= \lim_n \left(\frac{\frac{n+3}{2^{n+1}}}{\frac{n+2}{2^n}} \right) = \\ &= \lim_n \left(\frac{\frac{n+3}{2^n \cdot 2}}{\frac{n+2}{2^n}} \right) = \\ &= \lim_n \left(\frac{\frac{n+3}{2}}{\frac{n+2}{1}} \right) = \end{aligned}$$

$$= \lim_n \left(\frac{n+3}{2 \cdot (n+2)} \right) =$$

$$= \lim_n \left(\frac{1+\frac{3}{n}}{2 \cdot \left(1+\frac{2}{n}\right)} \right) =$$

$$= \frac{1+0}{2 \cdot (1+0)} =$$

$$= \frac{1}{2}.$$

Dakle, zadani red je konvergentan.

b) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n!)^2}{(2\cdot n)!}$;

Rješenje: U ovom zadatku je

$$a_n = \frac{(n!)^2}{(2\cdot n)!} > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Tada je

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{((n+1)!)^2}{(2\cdot(n+1))!} = \\ &= \frac{((n+1)!)^2}{(2\cdot n+2)!}. \end{aligned}$$

Iskoristimo identitete

$$\left.\begin{aligned} &(n+1)! = (n+1)\cdot n! \\ &(2\cdot n+2)! = (2\cdot n+2)\cdot(2\cdot n+1)\cdot(2\cdot n)! \end{aligned}\right\} \forall n \in \mathbb{N},$$

pa dobijemo:

$$\begin{aligned} r &= \lim_n \left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \\ &= \lim_n \left(\frac{\frac{((n+1)!)^2}{(2\cdot n+2)!}}{\frac{(n!)^2}{(2\cdot n)!}}\right) = \\ &= \lim_n \left(\frac{((n+1)!)^2}{(n!)^2}\cdot\frac{(2\cdot n)!}{(2\cdot n+2)!}\right) = \\ &= \lim_n \left(\left(\frac{(n+1)!}{n!}\right)^2\cdot\frac{(2\cdot n)!}{(2\cdot n+2)!}\right) = \\ &= \lim_n \left(\left(\frac{(n+1)\cdot n!}{n!}\right)^2\cdot\frac{(2\cdot n)!}{(2\cdot n+2)\cdot(2\cdot n+1)\cdot(2\cdot n)!}\right) = \\ &= \lim_n \left((n+1)^2\cdot\frac{1}{(2\cdot n+2)\cdot(2\cdot n+1)}\right) = \\ &= \lim_n \left(\frac{n^2+2\cdot n+1}{4\cdot n^2+6\cdot n+2}\right) = \end{aligned}$$

$$= \lim_{n} \left(\frac{1 + 2 \cdot \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}{4 + 6 \cdot \frac{1}{n} + 2 \cdot \frac{1}{n^2}} \right) =$$
$$= \frac{1 + 2 \cdot 0 + 0}{4 + 6 \cdot 0 + 2 \cdot 0} =$$
$$= \frac{1}{4}.$$

Dakle, zadani red je konvergentan.

c) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n}{n!}$.

Rješenje: U ovom zadatku je

$$a_n = \frac{n^n}{n!}.$$

Zbog toga je

$$a_{n+1} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Iskoristimo identitete

$$\left.\begin{aligned} (n+1)^{n+1} &= (n+1)^n \cdot (n+1), \\ (n+1)! &= (n+1)\cdot n! \end{aligned}\right\} \forall n \in \mathbb{N},$$

$$\lim_n \left(1 + \frac{a}{n}\right) = \mathrm{e}^a,\ \forall a \in \mathbb{R},$$

pa redom imamo:

$$\begin{aligned} r &= \lim_n \left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \\ &= \lim_n \left(\frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}}\right) = \\ &= \lim_n \left(\frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} \cdot \frac{n!}{(n+1)!}\right) = \\ &= \lim_n \left(\frac{(n+1)^n \cdot (n+1)}{n^n} \cdot \frac{n!}{(n+1)!}\right) = \\ &= \lim_n \left(\frac{(n+1)^n}{n^n} \cdot \frac{(n+1)\cdot n!}{(n+1)!}\right) = \\ &= \lim_n \left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot \frac{(n+1)!}{(n+1)!}\right) = \\ &= \lim_n \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right) = \\ &= \mathrm{e}^1 = \mathrm{e}. \end{aligned}$$

Budući da je $\mathrm{e} > 1$, zadani red divergira.

8. Primjenom Raabeova kriterija dokažite konvergenciju sljedećih redova:

a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + 2 \cdot n}$;

Rješenje: Najprije uočimo da su brojnik i nazivnik strogo pozitivni. Zbog toga pri rješavanju ne moramo primijeniti apsolutne vrijednosti. Izračunat ćemo

$$r := \lim_n \left(n \cdot \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n} \right) \right).$$

Ako je $r > 1$, zadani red konvergira.

Ako je $r < 1$, zadani red divergira.

Ako je $r = 1$, ne možemo donijeti odluku o konvergenciji, pa moramo primijeniti neki drugi kriterij.

Točan zbroj ovoga reda možemo odrediti analogno kao u zadacima 1. d) i 2. d). Međutim, zadatak ne traži izračunavanje zbroja reda, nego samo dokazivanje konvergencije. U ovom je slučaju

$$a_n = \frac{1}{n^2 + 2 \cdot n}.$$

Zbog toga je

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{1}{(n+1)^2 + 2 \cdot (n+1)} = \\ &= \frac{1}{n^2 + 2 \cdot n + 1 + 2 \cdot n + 2} = \\ &= \frac{1}{n^2 + 4 \cdot n + 3}. \end{aligned}$$

Tako redom imamo:

$$\begin{aligned} r &:= \lim_n \left(n \cdot \left(1 - \frac{\frac{1}{n^2 + 4 \cdot n + 3}}{\frac{1}{n^2 + 2 \cdot n}} \right) \right) = \\ &= \lim_n \left(n \cdot \left(1 - \frac{n^2 + 2 \cdot n}{n^2 + 4 \cdot n + 3} \right) \right) = \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{n} \left(n \cdot \left(\frac{n^2 + 4 \cdot n + 3 - \left(n^2 + 2 \cdot n\right)}{n^2 + 4 \cdot n + 3} \right) \right) = \\
&= \lim_{n} \left(n \cdot \left(\frac{2 \cdot n + 3}{n^2 + 4 \cdot n + 3} \right) \right) = \\
&= \lim_{n} \left(\frac{2 \cdot n^2 + 3 \cdot n}{n^2 + 4 \cdot n + 3} \right) = \\
&= \lim_{n} \left(\frac{2 + 3 \cdot \frac{1}{n}}{1 + 4 \cdot \frac{1}{n} + 3 \cdot \frac{1}{n^2}} \right) = \\
&= \frac{2 + 3 \cdot 0}{1 + 4 \cdot 0 + 3 \cdot 0} = \\
&= 2.
\end{aligned}
$$

Dakle, zadani red je konvergentan.

Koristeći rastav općega člana reda na parcijalne razlomke pokušajte dokazati da je njegov zbroj jednak $\frac{3}{4}$.

b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(3 \cdot n-2) \cdot (3 \cdot n+1)}$;

Rješenje: U ovome je zadatku

$$a_n = \frac{1}{(3 \cdot n-2) \cdot (3 \cdot n+1)} > 0, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Tada je:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{1}{(3 \cdot (n+1)-2) \cdot (3 \cdot (n+1)+1)} = \\ &= \frac{1}{(3 \cdot n+1) \cdot (3 \cdot n+4)}. \end{aligned}$$

Tako redom imamo:

$$\begin{aligned} r &:= \lim_n \left(n \cdot \left(1 - \frac{\frac{1}{(3 \cdot n+1) \cdot (3 \cdot n+4)}}{\frac{1}{(3 \cdot n-2) \cdot (3 \cdot n+1)}} \right) \right) = \\ &= \lim_n \left(n \cdot \left(1 - \frac{3 \cdot n-2}{3 \cdot n+4} \right) \right) = \\ &= \lim_n \left(n \cdot \left(\frac{3 \cdot n+4-(3 \cdot n-2)}{3 \cdot n+4} \right) \right) = \\ &= \lim_n \left(n \cdot \left(\frac{6}{3 \cdot n+4} \right) \right) = \\ &= \lim_n \left(\frac{6 \cdot n}{3 \cdot n+4} \right) = \\ &= \lim_n \left(\frac{6}{3+4 \cdot \frac{1}{n}} \right) = \\ &= \frac{6}{3+4 \cdot 0} = \\ &= 2. \end{aligned}$$

Dakle, zadani red je konvergentan. Pokušajte dokazati da je njegov zbroj jednak $\frac{1}{3}$.

(*Uputa*: Primijenite postupak iz zadataka 1. **d**) i 2. **d**).)

9. Primjenom Leibnizova kriterija dokažite konvergenciju sljedećih redova:

a) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}$;

Rješenje: Članovi zadanoga reda pravilno alterniraju: svaki neparni član je negativan, a svaki parni član je pozitivan. Dakle, možemo primijeniti Leibnizov kriterij.

Lako vidimo da je funkcija

$$f_1(x)=\frac{1}{x}$$

strogo padajuća na skupu $\mathbb{N}$, pa slijedi da je niz $\frac{1}{n}$ strogo padajući. Očito je

$$\lim_n\left(\frac{1}{n}\right)=0,$$

pa su ispunjene sve pretpostavke konvergencije reda prema Leibnizovu kriteriju. Odatle slijedi tvrdnja. Može se pokazati da je zbroj zadanoga reda jednak ln 2.

b) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\ln(n+5)}$;

Rješenje: Članovi zadanoga reda pravilno alterniraju: svaki neparni član je pozitivan, a svaki parni član je negativan. Dakle, možemo primijeniti Leibnizov kriterij.

Niz

$$a_n=\frac{1}{\ln(n+5)}$$

je strogo padajući niz strogo pozitivnih realnih brojeva. (Obrazložite!) Očito je

$$\lim_n\left(\frac{1}{\ln(n+5)}\right)=\left\{\frac{1}{+\infty}\right\}=0,$$

pa su ispunjene sve pretpostavke konvergencije reda prema Leibnizovu kriteriju. Dakle, zadani red je konvergentan. Egzaktnu vrijednost njegova zbroja je nemoguće izračunati. Drugim riječima, možemo odrediti isključivo približnu vrijednost toga zbroja.

10. Neka je $p \in \mathbb{R}$ proizvoljan, ali fiksiran. Ispitajte konvergenciju *Dirichletova* (ili *hiperharmonijskoga*) *reda* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$ u zavisnosti o $p \in \mathbb{R}$.

Rješenje: Ako je $p < 0$, onda je

$$\lim_n \left(\frac{1}{n^p} \right) = \lim_n \left(n^{-p} \right) = +\infty .$$

Primjenom nužnoga uvjeta konvergencije reda zaključujemo da u ovom slučaju red divergira.

Ako je $p \geq 0$, onda je funkcija

$$f(x) = \frac{1}{x^p}$$

strogo pozitivna, neprekidna i monotono padajuća na intervalu $[1, +\infty\rangle$. Zbog toga možemo primijeniti Cauchyjev integralni kriterij.

Što kaže taj kriterij? Konvergenciju zadanoga reda uspoređujemo s konvergencijom nepravoga integrala $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} \cdot \mathrm{d}x$. Podintegralna funkcija jednaka je općemu članu reda do na oznaku nezavisne varijable (tj. podintegralna funkcija i opći član reda razlikuju se jedino u oznaci nezavisne varijable: podintegralna funkcija je u varijabli *x*, a opći član reda u varijabli *n*). Ispitamo konvergenciju napisanoga nepravoga integrala, pa zaključimo: ako taj integral konvergira, onda i zadani red konvergira. Ako taj integral divergira, onda i zadani red divergira.

Dakle, odredimo nepravi integral

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} \cdot \mathrm{d}x .$$

Imamo redom:

$$I = \lim_{b \to +\infty} \left(\int_1^b \frac{\mathrm{d}x}{x^p} \right) =$$

$$= \lim_{b \to +\infty} \left(\frac{x^{1-p}}{1-p} \right) \Bigg|_1^b =$$

$$= \lim_{b \to +\infty} \left(\frac{b^{1-p}}{1-p} - \frac{1^{1-p}}{1-p} \right) =$$

$$= \lim_{b\to+\infty}\left(\frac{b^{1-p}-1}{1-p}\right).$$

Ova granična vrijednost postoji ako i samo ako postoji $\lim_{b\to+\infty}\left(b^{1-p}\right)$ i ako je $1-p \neq 0$. Granična vrijednost eksponencijalne funkcije (kad baza teži u beskonačnost) postoji i jednaka je nuli ako i samo ako je eksponent te funkcije strogo manji od 0. Odatle slijedi

$$1-p<0,$$

odnosno

$$p<1.$$

Tada su

$$\lim_{b\to+\infty}\left(b^{1-p}\right)=0,$$
$$1-p\neq 0,$$

pa slijedi:

$$I=\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{b^{1-p}-1}{1-p}\right)=$$
$$=\frac{0-1}{1-p}=$$
$$=\frac{1}{p-1}.$$

Dakle, nepravi integral konvergira ako i samo ako je $p>1$, a divergira ako i samo ako je $p\leq 1$. To znači da isto svojstvo ima i zadani red.

Zaključimo: zadani red konvergira ako i samo ako je $p>1$, a divergira ako i samo ako je $p\leq 1$.

Napomena 7. Naziv *hiperharmonijski red* potječe od činjenice da je zadani red svojevrsno poopćenje harmonijskoga reda $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$. Taj red dobivamo za $p=1$. Tako se divergencija harmonijskoga reda može dokazati i koristeći Cauchyjev integralni kriterij.

11. Koristeći pogodni kriterij usporedbe ispitajte konvergenciju sljedećih redova:

a) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos n}{2^n}$;

Rješenje: Primijetimo da vrijedi nejednakost

$$-1 < \cos n \le 1, \ \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

Podijelimo li ovu nejednakost sa strogo pozitivnim brojem 2^n, znakovi nejednakosti neće se promijeniti. Tako ćemo dobiti:

$$(-1) \cdot \frac{1}{2^n} < \frac{\cos n}{2^n} \le \frac{1}{2^n},$$
$$(-1) \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} < \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos n}{2^n} \le \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n}.$$

Red $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n}$ je geometrijski red u kojemu su

$$g_1 = 1, \ q = \frac{1}{2}.$$

Njegov je zbroj jednak

$$Z = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2.$$

Tako zaključujemo da je

$$(-1) \cdot 2 < \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos n}{2^n} \le 2,$$

tj. da je zbroj zadanoga reda neki realan broj iz intervala $\langle -2, 2]$. Dakle, zadani red konvergira.

b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cdot \sin n}{n^2}$;

Rješenje: Analogno kao i u prethodnom podzadatku, primijetimo da vrijedi nejednakost

$$-1 < \sin n < 1, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Vrijednost izraza $(-1)^n$ je jednaka ili –1 ili 1. (Kad nastupa koji slučaj?) Ako broj iz intervala $\langle -1, 1 \rangle$ pomnožimo s –1 ili 1, dobit ćemo opet neki broj iz toga intervala. Zbog toga je

$$-1 < (-1)^n \cdot \sin n < 1, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Podijelimo li ovu nejednakost sa strogo pozitivnim brojem n^2, znakovi nejednakosti neće se promijeniti. Tako dobijemo:

$$(-1) \cdot \frac{1}{n^2} < \frac{(-1)^n \cdot \sin n}{n^2} < \frac{1}{n^2},$$

$$(-1) \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} < \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cdot \sin n}{n^2} < \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Red $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ je Dirichletov red u slučaju $p = 2$. Prema zadatku 10., taj red konvergira jer je $p = 2 > 1$.

Neka je $Z \in \mathbb{R}$ zbroj reda $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$. Iz gornje nejednakosti zaključujemo da je zbroj zadanoga reda neki realan broj iz intervala $\langle -Z, Z \rangle$. Dakle, zadani red konvergira.

12. Neka su $p \in \mathbb{R}$ i $\alpha > 0,\ \beta \neq 0$ konstante. Ispitajte konvergenciju reda $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\beta}{n^p + \alpha}$. Sve svoje tvrdnje precizno obrazložite.

(*Uputa*: Koristite rješenje zadatka 10.)

Rješenje: Uočimo da je, zbog jednakosti

$$\frac{\beta}{n^p + \alpha} = \beta \cdot \frac{1}{n^p + \alpha},$$

dovoljno ispitati konvergenciju reda

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p + \alpha}.$$

Razlikovat ćemo dva slučaja:

a) $p > 1$. Prema pretpostavci je $\alpha > 0$, pa zaključujemo da je

$$n^p + \alpha > n^p > 0.$$

Odavde invertiranjem slijedi:

$$0 < \frac{1}{n^p + \alpha} < \frac{1}{n^p},$$
$$0 < \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p + \alpha} < \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}.$$

Prema pretpostavci je $p \in \mathbb{R},\ p > 1$, pa je red $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$ konvergentan Dirichletov red. Prema kriteriju usporedbe slijedi da je $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p + \alpha}$ konvergentan red, pa je i zadani red konvergentan.

b) $p \leq 1$. Prema pretpostavci je $\alpha > 0$, pa zaključujemo da postoji barem jedan $k \in \mathbb{N}$ takav da je

$$0 < n^p + \alpha < k \cdot n^p.$$

(Za k možemo uzeti bilo koji prirodan broj jednak ili veći od $\left\lceil 1 - \frac{\alpha}{n^p} \right\rceil$.)

Odavde invertiranjem dobivamo:

$$0 < \frac{1}{k \cdot n^p} = \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{n^p} < \frac{1}{n^p + \alpha},$$

$$0 < \frac{1}{k} \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p} < \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p + \alpha}.$$

Prema pretpostavci je $p \in \mathbb{R}$, $p \leq 1$, pa je red $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$ divergentan Dirichletov red. To znači da je i red $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p + \alpha}$ divergentan, otkuda slijedi da je i zadani red divergentan.

Zaključak: Za *sve* $\alpha, \beta > 0$ polazni red konvergira ako i samo ako je $p > 1$, a divergira ako i samo ako je $p \leq 1$. (Usporedite s rezultatom zadatka 10.)

Napomena 8. Namjerno smo pretpostavili $\alpha > 0$ kako bismo osigurali da je opći član reda definiran za svaki $n \in \mathbb{N}$. Međutim, može se pokazati da rezultat zadatka 13. vrijedi i u takvim slučajevima (uz eventualno „smanjenje“ domene „izbacivanjem“ prirodnih brojeva za koje nazivnik općega člana reda nije definiran).