 TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU POLYTECHNICUM ZAGABIENSE	KATEDRA ZA ZAJEDNIČKE PREDMETE	Matematika 2 (preddiplomski stručni studij elektrotehnike)	2.2. Numerički redovi. Kriteriji konvergencije redova. - zadaci
--	--------------------------------------	---	--

1. Napišite (ako postoji) zatvorenu formulu za opći član niza $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ djelomičnih zbrojeva niza $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ako je:

a) $a_n = n$;

b) $a_n = \frac{1}{n}$;

c) $a_n = x^n$;

d) $a_n = \frac{1}{n \cdot (n+1)}$.

2. Za svaki niz $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ iz 1. zadatka odredite postoji li $\lim_n S_n$, odnosno je li pripadni red konvergentan.

3. Ispitajte konvergenciju sljedećih redova brojeva (nije potrebno računati zbrojeve redova):

a) $\sum \left(\frac{n+1}{2 \cdot n+1} \right)^n$;

b) $\sum \frac{n^2}{2017^n}$;

c) $\sum \frac{n^{n-1}}{\sqrt{2017^n}}$;

d) $\sum \frac{2017^n}{n^{2017}}$;

e) $\sum \frac{2 \cdot n - 1}{2^{\frac{n}{2}}}$;

f) $\sum \frac{n + 2017}{\sqrt[3]{2017^n}}$


g) $\sum \frac{1}{(3 \cdot n - 2) \cdot (3 \cdot n + 1)}$;

h) $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}$;

i) $\sum (-1)^{\frac{n \cdot (n-1)}{2}} \cdot \left(\frac{n}{2017 \cdot n - 1} \right)^n$;

j) $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$.

4. Neka je $p \in \mathbb{R}$. Ispitajte konvergenciju *Dirichletova* (ili *hiperharmonijskoga*) reda $\sum \frac{1}{n^p}$.

 TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU POLYTECHNICUM ZAGABIENSE	KATEDRA ZA ZAJEDNIČKE PREDMETE	Matematika 2 (preddiplomski stručni studij elektrotehnike)	2.2. Numerički redovi. Kriteriji konvergencije redova. - zadaci
--	---	---	--

5. Koristeći pogodnu usporedbu ispitajte konvergenciju sljedećih redova:

a) $\sum \frac{\cos n}{2^n};$

b) $\sum \frac{(-1)^n \sin n}{n^2};$

c) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2}{n \cdot \ln^3 n};$

d) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\ln n + 1}{(n \cdot \ln n)^3}.$

6. Odredite sve $x \in \mathbb{R}$ za koje je zbroj reda R jednak 2 ako je:

a) $R = \sum_{n=0}^{+\infty} \cos^n x;$

b) $R = \sum_{n=0}^{+\infty} \sin^n(\pi \cdot x);$

c) $R = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot \cos^n(2 \cdot x);$

d) $R = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot \sin^n \frac{x}{2}.$

7. Može li se divergencija harmonijskoga reda dokazati koristeći:

- a) Cauchyjev kriterij;
- b) D'Alembertov kriterij;
- c) Raabeov kriterij;
- d) Cauchyjev integralni kriterij?

Obrazložite svoje odgovore.

RJEŠENJA ZADATAKA

1.

a) $S_n = \sum_{k=1}^n k = \frac{n \cdot (n+1)}{2};$

b) Ne postoji zatvorena formula za S_n .

c) $S_n = \sum_{k=1}^n x^k = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1};$

d) $S_n = 1 - \frac{1}{n+1}.$

2.

a) $\lim_n S_n = \lim_n \frac{n \cdot (n+1)}{2} = +\infty \Rightarrow$ red divergira.

b) Red divergira.

c) Ako je $|x| < 1$, zbroj reda je $S = \frac{1}{1-x}$ i red tada konvergira.

U suprotnom, zbroj reda je $S = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$ i red tada divergira.

d) $\lim_n S_n = \lim_n \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1 \Rightarrow$ zbroj reda je 1 i red konvergira.

3.

a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{2 \cdot n+1} = \frac{1}{2} \Rightarrow$ konvergira;

b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt[n]{n})^2}{2017} = \frac{1}{2017} \Rightarrow$ konvergira;


c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n} \cdot \sqrt{2017}} = +\infty \Rightarrow$ divergira;

d) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2017 \cdot \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{n}\right)^{2017} = 2017 \Rightarrow$ divergira;

e) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2 \cdot n+1}{2^{\frac{n+1}{2}}}}{\frac{2 \cdot n-1}{2^{\frac{n}{2}}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2 \cdot n+1}{2 \cdot n-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow$ konvergira;

f) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{n+2018}{2017^{\frac{n+1}{3}}}}{\frac{n+2017}{2017^{\frac{n}{3}}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2017}} \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+2018}{n+2017} = \frac{1}{\sqrt[3]{2017}} \Rightarrow$ konvergira;

g) $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \cdot \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} n \cdot \left(1 - \frac{3 \cdot n-2}{3 \cdot n+4}\right) = 6 \Rightarrow$ konvergira;

 TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU POLYTECHNICUM ZAGABIENSE	KATEDRA ZA ZAJEDNIČKE PREDMETE	Matematika 2 (preddiplomski stručni studij elektrotehnike)	2.2. Numerički redovi. Kriteriji konvergencije redova. - zadaci
--	---	---	--

$$\text{h) } \lim_{n \rightarrow +\infty} |a_n| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0 \Rightarrow \text{konvergira};$$

$$\text{i) } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{2017 \cdot n - 1} = \frac{1}{2017} \Rightarrow \text{konvergira};$$

$$\text{j) } \lim_{n \rightarrow +\infty} |a_n| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0 \Rightarrow \text{konvergira}.$$

4. Imamo redom:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \cdot \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} n \cdot \left[1 - \frac{n^p}{(n+1)^p} \right] = \lim_{n \rightarrow +\infty} n \cdot \frac{(n+1)^p - n^p}{(n+1)^p} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{k=0}^{+\infty} \binom{p}{k+1} \cdot n^{p-k}}{\sum_{k=0}^{+\infty} \binom{p}{k} \cdot n^{p-k}} = p.$$

Stoga Dirichletov red konvergira za $p > 1$. Za $p = 1$ dobivamo harmonijski red koji divergira, pa prema Raabeovu kriteriju slijedi da za $p \leq 1$ Dirichletov red divergira.

5.

$$\text{a) } \left(\frac{\cos n}{2^n} \leq \frac{1}{2^n} \right) \wedge \left(\sum \frac{1}{2^n} \text{ konvergira} \right) \Rightarrow \left(\sum \frac{\cos n}{2^n} \text{ konvergira} \right);$$

$$\text{b) } \left[\frac{(-1)^n \cdot \sin n}{n^2} \leq \frac{1}{n^2} \right] \wedge \left(\sum \frac{1}{n^2} \text{ konvergira} \right) \Rightarrow \left(\sum \frac{(-1)^n \cdot \sin n}{n^2} \text{ konvergira} \right);$$

$$\text{c) } \left[f(n) = \frac{2}{n \cdot \ln^3 n} \text{ je strogo pozitivna, monotono padajuća i neprekidna na } [3, +\infty) \right] \wedge \left(\int_3^{+\infty} \frac{2 \cdot dx}{x \cdot \ln^3 x} = \frac{2}{\ln^2 3} \right) \Rightarrow \left(\sum \frac{2}{n \cdot \ln^3 n} \text{ konvergira} \right);$$

$$\text{d) } \left[f(n) = \frac{\ln n + 1}{(n \cdot \ln n)^3} \text{ je strogo pozitivna, monotono padajuća i neprekidna na } [3, +\infty) \right] \wedge \left(\int_3^{+\infty} \frac{\ln x + 1}{(x \cdot \ln x)^3} \cdot dx = \frac{1}{18 \cdot \ln^2 3} \right) \Rightarrow \left(\sum \frac{\ln n + 1}{(n \cdot \ln n)^3} \text{ konvergira} \right).$$


6.

$$\text{a) } \sum_{n=0}^{+\infty} \cos^n x = 1 + \cos x + \cos^2 x + \cos^3 x + \dots = \frac{1}{1 - \cos x} \Rightarrow \frac{1}{1 - \cos x} = 2 \Rightarrow$$

$$x_k = \pm \frac{\pi}{3} + k \cdot 2 \cdot \pi, \quad k \in \mathbb{Z};$$

$$\text{b) } \sum_{n=0}^{+\infty} \sin^n(\pi \cdot x) = 1 + \sin(\pi \cdot x) + \sin^2(\pi \cdot x) + \sin^3(\pi \cdot x) + \dots = \frac{1}{1 - \sin(\pi \cdot x)}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1 - \sin(\pi \cdot x)} = 2 \Rightarrow x_k = \frac{12 \cdot k + 1}{6}, \quad x_l = \frac{12 \cdot l + 5}{6}, \quad k, l \in \mathbb{Z};$$

 TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU POLYTECHNICUM ZAGABIENSE	KATEDRA ZA ZAJEDNIČKE PREDMETE	Matematika 2 (preddiplomski stručni studij elektrotehnike)	2.2. Numerički redovi. Kriteriji konvergencije redova. - zadaci
--	---	---	--

$$\text{c) } \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot \cos^n(2 \cdot x) = 1 - \cos x + \cos^2(2 \cdot x) - \cos^3(2 \cdot x) + \dots = \frac{1}{1 + \cos(2 \cdot x)} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{1 + \cos(2 \cdot x)} = 2 \Rightarrow x_k = \pm \frac{\pi}{3} + k \cdot \pi, \quad k \in \mathbb{Z};$$

$$\text{d) } \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot \sin^n \frac{x}{2} = 1 - \sin \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2} - \sin^3 \frac{x}{2} + \dots = \frac{1}{1 + \sin \frac{x}{2}} \Rightarrow \frac{1}{1 + \sin \frac{x}{2}} = 2$$

$$\Rightarrow x_k = \frac{\pi \cdot (12 \cdot k - 1)}{3}, \quad x_l = \frac{\pi \cdot (12 \cdot l + 7)}{3}, \quad k, l \in \mathbb{Z}.$$

7.

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1 \Rightarrow \text{nema odluke};$$

$$\text{b) } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+1} = 1 \Rightarrow \text{nema odluke};$$

$$\text{c) } \lim_{n \rightarrow +\infty} n \cdot \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+1} = 1 \Rightarrow \text{nema odluke};$$

d) Lako se pokaže da je realna funkcija $f(x) = \frac{1}{x}$ strogo pozitivna, strogo padajuća i neprekidna

na $[1, +\infty)$. Stoga zadani red i integral $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} \cdot dx$ istodobno ili konvergiraju ili divergiraju.

Budući da je $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} \cdot dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\int_1^b \frac{1}{x} \cdot dx \right) = \lim_{b \rightarrow +\infty} (\ln b) = +\infty$, zadani red divergira.