

2. REDOVI

2.2. NUMERIČKI REDOVI. KRITERIJI KONVERGENCIJE REDOVA.

2.2.1. POJAM NUMERIČKOGA REDA

- Neka je $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ niz realnih brojeva. (*Podsjetnik: Niz realnih brojeva je bilo koja funkcija $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$.*)
- Niz $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definiran rekurzivno s:
- $s_1 = a_1, s_n = s_{n-1} + a_n$, za $n \geq 2$
- nazivamo *niz djelomičnih (parcijalnih) suma* niza $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- Opći $(n - \text{ti})$ član toga niza jednak je zbroju prvih n članova niza $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- Uređeni par $((a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (s_n)_{n \in \mathbb{N}})$ naziva se **numerički red (ili red brojeva)**.
- Svaki numerički red je jednoznačno određen zadavanjem *općega* člana niza $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

2.2.2. POJAM KONVERGENTNOGA REDA

- Kao i svaki drugi niz, tako i niz parcijalnih suma $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ili ima ili nema svoju graničnu vrijednost (limes).
- Ako niz $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ima graničnu vrijednost i ta je vrijednost jednaka $s \in \mathbb{R}$, kažemo da pripadni red $\sum a_n$ *konvergira* ka s i formalno pišemo:
- $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = s$.
- Sukladno ovoj oznaci, broj s nazivamo *zbroj* ili *suma reda*.
- Ako niz $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nema graničnu vrijednost, kažemo da pripadni red *divergira*.

2.2.3. KRITERIJI KONVERGENCIJE REDA

- Ispitivanje konvergencije redova u općem je slučaju relativno teško jer najčešće ne znamo formulu za opći član niza parcijalnih suma.
- Zbog toga se postavlja pitanje: *Može li se (i, ako može, kako) utvrditi je li red konvergentan isključivo na temelju formule za opći član polaznoga niza $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$?*
- Opći kriterij za ispitivanje konvergencije *bilo kojega* reda danas nije poznat, ali su poznati određeni kriteriji prema kojima se za relativnu većinu redova može utvrditi jesu li konvergentni ili nisu (ali **niti jedan** kriterij ne određuje pripadni zbroj reda u slučaju da red konvergira)

2.2.4. KRITERIJI KONVERGENCIJE REDA

- **Kriterij 1.** (*nužan uvjet konvergencije reda*) Ako red konvergira, onda vrijedi $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$.
- Za primjenu je značajnija ekvivalentna tvrdnja:
- **Kriterij 2.** Ako vrijedi $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = A \neq 0$, red je divergentan.
- *Pravilo:* Prigodom ispitivanja konvergencije reda najprije se **mora** odrediti limes polaznoga niza.
- Ako je taj limes različit od nule, red je divergentan (i ispitivanje je gotovo).
- Ako je taj limes jednak nuli, red može biti ili konvergentan ili divergentan (pa treba nastaviti ispitivanje prema drugim kriterijima).

2.2.4. KRITERIJI KONVERGENCIJE REDA

- Četiri najčešće korištena kriterija za ispitivanje konvergencije redova su *Cauchyjev*, *D'Alembertov*, *Leibnizov* i *Raabeov*.
- Cauchyjev kriterij: Ako niz $\sqrt[n]{|a_n|}$ konvergira ka $r \in \mathbb{R}$, onda vrijedi:
 - ako je $r < 1$, red $\sum a_n$ je konvergentan;
 - ako je $r > 1$, red $\sum a_n$ je divergentan;
 - ako je $r = 1$, nema odluke.
- Ovaj kriterij podesno je primijeniti ako je opći član polaznoga niza n – ta potencija nekoga izraza.

2.2.4. KRITERIJI KONVERGENCIJE REDA

- D'Alembertov kriterij: Ako niz $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ konvergira ka $r \in \mathbb{R}$, onda vrijedi:
 - ako je $r < 1$, red $\sum a_n$ je konvergentan;
 - ako je $r > 1$, red $\sum a_n$ je divergentan;
 - ako je $r = 1$, nema odluke.
- Ovaj kriterij je najjednostavniji za praktičnu primjenu.
- Leibnizov kriterij: Ako niz $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ strogo pozitivnih realnih brojeva strogo pada i konvergira k nuli, onda je *alternirajući red* $\sum (-1)^n \cdot a_n$ članova s promjenjivim predznacima konvergentan.

2.2.4. KRITERIJI KONVERGENCIJE REDA

- Raabeov kriterij: Ako niz $n \cdot \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$ konvergira ka $r \in \mathbb{R}$, onda vrijedi:
 - ako je $r > 1$, tada red $\sum a_n$ konvergira;
 - ako je $r < 1$, tada red $\sum a_n$ divergira;
 - za $r = 1$ nema odluke.
- Raabeov kriterij se najčešće primjenjuje u slučajevima u kojima D'Alembertov kriterij ne daje odluku.

2.2.5. KRITERIJ USPOREDBE

- U općem slučaju konvergencija reda može se ispitati tako da se zadani red usporedi ili s (hiper)harmonijskim ili s geometrijskim redom.
- Vrijedi sljedeći kriterij:
- *Ako su $\sum a_n$ i $\sum b_n$ redovi s pozitivnim članovima takvi da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $a_n \leq b_n$, onda:*
- *ako $\sum b_n$ konvergira, onda i $\sum a_n$ konvergira;*
- *ako $\sum a_n$ divergira, onda i $\sum b_n$ divergira.*

2.2.5. KRITERIJ USPOREDBE

- Korisna su i sljedeća dva kriterija:
- **Kriterij 1.** (*Cauchyjev integralni kriterij*) Neka je opći član reda određen strogo pozitivnom, monotonno padajućom i neprekidnom funkcijom f . Tada red $\sum a_n$ i nepravilni integral $\int_a^{+\infty} f(x) \cdot dx$ istodobno ili konvergiraju ili divergiraju.
- **Kriterij 2.** Ako konvergira red $\sum |a_n|$, onda konvergira i red $\sum a_n$. (Obrat ne vrijedi.)
- Kriterij 2. podesno je primijeniti umjesto Leibnizova kriterija pri ispitivanju konvergencije alternirajućih redova.