2.2.

POSEBNI TIPOVI MATRICA

2.2.1. SKUPOVI $\mathrm{M}_{r,s}(\mathbb{R})$ i $\mathrm{M}_{n}(\mathbb{R})$

- Neka su n, r, $s \in \mathbb{N}$.
- U radu s matricama koristimo sljedeće skupove:
- $M_{r,s}(\mathbb{R})$ = skup svih realnih matrica tipa (r, s).
- Taj skup ima beskonačno mnogo međusobno različitih elemenata.
- $M_n(\mathbb{R})$ = skup svih realnih matrica reda n.
- I taj skup ima beskonačno mnogo međusobno različitih elemenata.

2.2.2. NULMATRICA

- Nulmatrica tipa (r, s) je matrica čiji su svi elementi jednaki nuli. Npr.
- $A = [0\ 0]$ je nulmatrica tipa $(1, 2)$;
- $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ je nulmatrica reda 2 itd.
- Kad god nema zabune, nulmatricu označavamo s 0.

2.2.3. JEDINIČNA MATRICA

- Jedinična matrica reda n (oznaka: E_n) je matrica koja ima n redaka i n stupaca, te za čije elemente vrijedi:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ako je } i = j \\ 0, & \text{ako je } i \neq j \end{cases}, \text{ za sve dopustive } (i, j)$$

- Npr. $E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ je jedinična matrica reda 2, $E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
- je jedinična matrica reda 3 itd.
- Napomena: Kad god nema zabune, indeks n možemo izostaviti, odnosno jediničnu matricu označiti samo s E.

2.2.4. DIJAGONALNA MATRICA

- Neka je $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ matrica reda n.
- Definiramo njezinu **glavnu dijagonalu** kao uređenu n-torku $(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})$, a **sporednu dijagonalu** kao uređenu n-torku $(a_{n1}, a_{n-1,2}, \ldots, a_{1n})$.
- **Dijagonalna matrica reda n** je kvadratna matrica čiji su svi elementi izvan glavne dijagonale jednaki nuli (na elemente glavne dijagonale ne postavljamo nikakav zahtjev).
- Ekvivalentno, A je dijagonalna matrica ako i samo ako za sve dopustive (i, j) vrijedi:
- $(i \neq j) \Leftrightarrow (a_{ij} = 0)$.

2.2.4. DIJAGONALNA MATRICA

- Primjeri dijagonalnih matrica (različitih redova) su:

$$A=\begin{bmatrix}1\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix},\ D=\begin{bmatrix}-2023 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2024 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -2025\end{bmatrix}$$

- Napomena: Nulmatrica reda n i jedinična matrica reda n su također dijagonalne matrice.

2.2.5. GORNJA TROKUTASTA MATRICA

- Gornja trokutasta matrica reda n je kvadratna matrica čiji su svi elementi ispod glavne dijagonale jednaki nuli.
- Ekvivalentno: Matrica A reda n je gornja trokutasta ako i samo ako za sve dopustive (i, j) vrijedi:
- $(i > j) \Rightarrow (a_{ij} = 0)$.

2.2.5. GORNJA TROKUTASTA MATRICA

- Primjeri gornjih trokutastih matrica (različitih redova) su:

$$A = [2023],\ B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix},\ D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

- Napomena: Nulmatrica (bilo kojega tipa), jedinična matrica (bilo kojega reda) i bilo koja dijagonalna matrica su gornje trokutaste matrice.

2.2.6. DONJA TROKUTASTA MATRICA

- Donja trokutasta matrica reda n je kvadratna matrica čiji su svi elementi iznad glavne dijagonale jednaki nuli.
- Ekvivalentno: Matrica A reda n je donja trokutasta ako i samo ako za sve dopustive (i, j) vrijedi:
- $(i < j) \Rightarrow (a_{ij} = 0)$.

2.2.6. DONJA TROKUTASTA MATRICA

- Primjeri donjih trokutastih matrica (različitih redova) su:

$$A = [-2024],\ B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 4 & -5 & 6 \end{bmatrix},\ D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ -4 & 5 & 6 & 0 \\ -7 & 8 & -9 & 10 \end{bmatrix}$$

- Napomena: Nulmatrica (bilo kojega tipa), jedinična matrica (bilo kojega reda) i bilo koja dijagonalna matrica su donje trokutaste matrice.

2.2.7. TRANSPONIRANA MATRICA

- Neka je $A \in \mathrm{M}_{r,s}(\mathbb{R})$ bilo koja matrica.
- Matrica $B \in \mathrm{M}_{s,r}(\mathbb{R})$ je **matrica transponirana** matrici A ako za sve dopustive (i, j) vrijedi jednakost:
- $b_{ij} = a_{ji}$.
- Oznaka za transponiranu matricu: A^T (u računalnim programima: A').
- A^T jednostavno dobijemo tako da sve **retke** matrice A zapišemo kao **stupce** matrice A^T u istom poretku.

2.2.8. NAPOMENA

- Transponiranje matrica ima sljedeća svojstva:
- $(A^T)^T = A$, za svaku matricu A;
- $(A + B)^T = A^T + B^T$, za svake dvije matrice A i B koje su istoga tipa;
- $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$, za svake dvije ulančane matrice A i B.

2.2.9. SIMETRIČNA MATRICA

- Matrica A je **simetrična** ako i samo ako vrijedi jednakost:
- $A^T = A$, odnosno $A^T - A = 0$.
- Matrica A reda n je **antisimetrična** ako i samo ako vrijedi jednakost $A^T = -A$, odnosno $A^T + A = 0$.
- **Napomene:** 1.) Jedinična matrica (bilo kojega reda) i bilo koja dijagonalna matrica su simetrične matrice.
- 2.) Grubo i neprecizno možemo reći: A je simetrična ako i samo ako je njezin i-ti redak jednak i-tom stupcu, za svaki $i = 1, \ldots, n$.
- 3.) Ako je A antisimetrična matrica, onda su svi elementi glavne dijagonale jednaki 0. Obratna tvrdnja nije točna.

1. Odredite matricu A^T ako je:

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$;

b) $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$;

c) $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 & 4 \\ -5 & 6 & -7 & 8 \\ -9 & 10 & -11 & 12 \end{bmatrix}$.

Rješenje:

a) $A^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$;

b) $A^T = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$;

c) $A^T = \begin{bmatrix} -1 & -5 & -9 \\ 2 & 6 & 10 \\ -3 & -7 & -11 \\ 4 & 8 & 12 \end{bmatrix}$.

2. Odredite $x, y, z \in \mathbb{R}$ tako da matrica A bude simetrična ako je

$$A = \begin{bmatrix} -2024 & 4 & 5 \\ x+y & 2023 & x+z \\ y+z & 3 & -2022 \end{bmatrix}.$$

Rješenje: Matrica A je simetrična ako i samo ako je $A = A^T$, odnosno ako i samo ako je $A - A^T = 0$. Tako imamo:

$$A - A^T = 0,$$

$$\begin{bmatrix} -2024 & 4 & 5 \\ x+y & 2023 & x+z \\ y+z & 3 & -2022 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2024 & x+y & y+z \\ 4 & 2023 & 3 \\ 5 & x+z & -2022 \end{bmatrix} = 0,$$

$$\begin{bmatrix} -2024-(-2024) & 4-(x+y) & 5-(y+z) \\ x+y-4 & 2023-2023 & x+z-3 \\ y+z-5 & 3-(x+z) & -2022-(-2022) \end{bmatrix} = 0,$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 4-(x+y) & 5-(y+z) \\ x+y-4 & 0 & x+z-3 \\ y+z-5 & 3-(x+z) & 0 \end{bmatrix} = 0,$$

$$\begin{cases} 4-(x+y)=0, \\ 5-(y+z)=0, \\ x+y-4=0, \\ x+z-3=0, \\ y+z-5=0, \\ 3-(x+z)=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y-4=0 \\ x+z-3=0, \\ y+z-5=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=4, \\ x+z=3, \\ y+z=5. \end{cases}$$

Zbrojimo li sve tri jednadžbe, dobit ćemo $2 \cdot (x+y+z) = 12$, odnosno $x+y+z=6$. Ako od te jednakosti oduzmemo svaku jednadžbu sustava, dobit ćemo redom $z=2$, $y=3$, $x=1$. Dakle, rješenje zadatka je $(x, y, z) = (1, 3, 2)$.

3. Neka je $A \in M_{r,s}(\mathbb{R})$ bilo koja matrica. Dokažite da tada postoji jedinstvena matrica $X \in M_{r,s}(\mathbb{R})$ takva da vrijedi:

$$A + X = X + A = A.$$

Rješenje: Da bi zbrojevi $A + X$ i $X + A$ uopće postojali, matrice A i X moraju biti istoga tipa. To znači da mora vrijediti

$$X \in M_{r,s}(\mathbb{R}).$$

Nadalje, pretpostavimo da su $A = \left[a_{ij}\right], X = \left[x_{ij}\right]$ za sve dopustive (i, j). Prema definiciji matričnoga zbrajanja, odnosno definiciji jednakosti dviju matrica slijedi:

$$a_{ij} + x_{ij} = x_{ij} + a_{ij} = a_{ij}, \text{ za sve dopustive } (i, j).$$

Ova jednakost predstavlja jednakost realnih brojeva jer su, prema pretpostavci, elementi matrica A i X realni brojevi. Oduzimanjem a_{ij} od svake jednakosti dobivamo:

$$x_{ij} = 0, \text{ za sve dopustive } (i, j).$$

To znači da je

$$X = 0$$

(tj. da je X nulmatrica tipa (r, s)). Ta matrica je jedinstvena. Odatle slijedi tvrdnja zadatka.

4. Neka je $A \in M_2(\mathbb{R})$ bilo koja matrica reda 2. Dokažite da tada postoji jedinstvena matrica $X \in M_2(\mathbb{R})$ takva da vrijedi:

$$A \cdot X = X \cdot A = A.$$

Poopćite tvrdnju zadatka za slučaj $A \in M_n(\mathbb{R})$.

Rješenje: Da bi umnošci $A \cdot X$ i $X \cdot A$ uopće postojali, matrice X mora imati dva retka (to slijedi iz postojanja prvoga umnoška) i dva stupca (to slijedi iz postojanja drugoga umnoška). To znači da mora vrijediti

$$X \in M_2(\mathbb{R}).$$

Nadalje, pretpostavimo da su $A = \left[a_{ij}\right], X = \left[x_{ij}\right]$ za sve dopustive (i, j). Prema definiciji matričnoga množenja, odnosno definiciji jednakosti dviju matrica, iz jednakosti $A \cdot X = A$ slijedi:

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_{11} + a_{12} \cdot x_{21} = a_{11}, \\ a_{11} \cdot x_{12} + a_{12} \cdot x_{22} = a_{12}, \\ a_{21} \cdot x_{11} + a_{22} \cdot x_{21} = a_{21}, \\ a_{21} \cdot x_{12} + a_{22} \cdot x_{22} = a_{22}. \end{cases}$$

Množenjem prve jednadžbe s $\left(\frac{-a_{21}}{a_{11}}\right)$ i pribrajanjem trećoj jednadžbi dobivamo:

$$\left(a_{22} - \frac{a_{12} \cdot a_{21}}{a_{11}}\right) \cdot x_{21} = 0.$$

Prema pretpostavci zadatka, A je *bilo koja matrica* reda 2, pa zasigurno možemo naći vrijednosti $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} \in \mathbb{R}$ takve da je vrijednost brojevnoga izraza $a_{22} - \frac{a_{12} \cdot a_{21}}{a_{11}}$ različita od nule. Zbog toga mora biti

$$x_{21} = 0.$$

Uvrštavanjem te vrijednosti u prvu jednadžbu sustava dobivamo:

$$a_{11} \cdot x_{11} = a_{11}.$$

I ova jednakost mora vrijediti za sve $a_{11} \in \mathbb{R}$, pa dijeljenjem s a_{11} dobivamo

$$x_{11} = 1.$$

Provedimo potpuno analogni postupak za drugu i četvrtu jednadžbu sustava.

Množenjem druge jednadžbe s $\left(\frac{-a_{21}}{a_{11}}\right)$ i pribrajanjem četvrtoj jednadžbi dobivamo:

$$\left(a_{22} - \frac{a_{12} \cdot a_{21}}{a_{11}}\right) \cdot x_{22} = a_{22} - \frac{a_{12} \cdot a_{21}}{a_{11}}.$$

Analogno kao i maloprije zaključujemo da zasigurno možemo naći vrijednosti $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} \in \mathbb{R}$ takve da je vrijednost brojevnoga izraza $a_{22} - \frac{a_{12} \cdot a_{21}}{a_{11}}$ različita od nule. Zbog toga mora biti

$$x_{22} = 1.$$

Uvrštavanjem te vrijednosti u drugu jednadžbu sustava dobivamo:

$$\begin{aligned} &a_{11} \cdot x_{12} + a_{12} = a_{12}, \\ &a_{11} \cdot x_{12} = 0. \end{aligned}$$

I ova jednakost mora vrijediti za sve $a_{11} \in \mathbb{R}$, pa dijeljenjem s a_{11} dobivamo

$$x_{12} = 0.$$

Tako smo pokazali da za matricu

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

i *bilo koju* matricu $A \in M_2(\mathbb{R})$ vrijedi jednakost:

$$A \cdot X = A.$$

Potpuno analogno iz jednakosti $X \cdot A = A$ slijedi:

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_{11} + a_{21} \cdot x_{12} = a_{11}, \\ a_{12} \cdot x_{11} + a_{22} \cdot x_{12} = a_{12}, \\ a_{11} \cdot x_{21} + a_{21} \cdot x_{22} = a_{21}, \\ a_{12} \cdot x_{21} + a_{22} \cdot x_{22} = a_{22}. \end{cases}$$

Množenjem prve jednadžbe s $\left(\frac{-a_{12}}{a_{11}}\right)$ i pribrajanjem drugoj jednadžbi dobivamo:

$$\left(a_{22}-\frac{a_{12}\cdot a_{21}}{a_{11}}\right)\cdot x_{12}=0.$$

Analogno kao i ranije zaključujemo da zasigurno možemo naći vrijednosti $a_{11},a_{12},a_{21},a_{22}\in\mathbb{R}$ takve da je vrijednost brojevnoga izraza $a_{22}-\frac{a_{12}\cdot a_{21}}{a_{11}}$ različita od nule. Zbog toga mora biti

$$x_{12}=0.$$

Uvrštavanjem te vrijednosti u prvu jednadžbu sustava dobivamo:

$$a_{11}\cdot x_{11}=a_{11}.$$

I ova jednakost mora vrijediti za sve $a_{11}\in\mathbb{R}$, pa dijeljenjem s a_{11} dobivamo

$$x_{11}=1.$$

Provedimo potpuno analogni postupak za treću i četvrtu jednadžbu ovoga sustava.

Množenjem treće jednadžbe s $\left(\frac{-a_{12}}{a_{11}}\right)$ i pribrajanjem četvrtoj jednadžbi dobivamo:

$$\left(a_{22}-\frac{a_{12}\cdot a_{21}}{a_{11}}\right)\cdot x_{22}=a_{22}-\frac{a_{12}\cdot a_{21}}{a_{11}}.$$

Analogno kao i maloprije zaključujemo da zasigurno možemo naći vrijednosti $a_{11},a_{12},a_{21},a_{22}\in\mathbb{R}$ takve da je vrijednost brojevnoga izraza $a_{22}-\frac{a_{12}\cdot a_{21}}{a_{11}}$ različita od nule. Zbog toga mora biti

$$x_{22}=1.$$

Uvrštavanjem te vrijednosti u drugu jednadžbu sustava dobivamo:

$$a_{11}\cdot x_{21}+a_{21}=a_{21},$$
$$a_{11}\cdot x_{21}=0.$$

I ova jednakost mora vrijediti za sve $a_{11}\in\mathbb{R}$, pa dijeljenjem s a_{11} dobivamo

$$x_{21}=0.$$

Tako smo pokazali da za matricu

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

i *bilo koju* matricu $A \in M_2(\mathbb{R})$ vrijedi jednakost:

$$X \cdot A = A.$$

Zbog tranzitivnosti relacije „biti jednak“, iz jednakosti

$$\begin{cases} A \cdot X = A, \\ X \cdot A = A \end{cases}$$

slijedi

$$A \cdot X = X \cdot A.$$

Time je tvrdnja zadatka u cijelosti dokazana.

Općenito, ako je $A \in M_n(\mathbb{R})$ *bilo koja* matrica reda n, onda za matricu

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$$

vrijedi jednakost:

$$A \cdot X = X \cdot A = A.$$