

## 2. REDOVI

### 2.2. NUMERIČKI REDOVI. KRITERIJI KONVERGENCIJE REDA.

## 2.2.1. POJAM NUMERIČKOGA REDA

- Neka je  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  niz realnih brojeva.
- (*Podsjetnik*: **Niz** realnih brojeva je bilo koja funkcija  $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ .)
- Niz  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  definiran rekurzivno s:
- $s_1 = a_1$ ,  $s_n = s_{n-1} + a_n$ , za  $n \geq 2$
- nazivamo **niz djelomičnih zbrojeva** (ili *niz parcijalnih suma*) niza  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .
- Opći ( $n$  – ti) član toga niza jednak je zbroju prvih  $n$  članova niza  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .
- Uređeni par  $((a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (s_n)_{n \in \mathbb{N}})$  naziva se **red realnih brojeva** ili **numerički red**.
- Svaki numerički red je jednoznačno određen zadavanjem *općega* člana niza  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

## 2.2.2. POJAM KONVERGENTNOGA REDA

- Kao i svaki drugi niz, tako i niz djelomičnih zbrojeva  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ili ima ili nema svoju graničnu vrijednost (limes).
- Ako niz  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ima graničnu vrijednost i ta je vrijednost jednaka  $s \in \mathbb{R}$ , kažemo da red
- $\sum a_n$  **konvergira** ka broju  $s$ .
- Formalno pišemo:  $\sum_k a_k = s$ .
- Sukladno ovoj oznaci, broj  $s$  nazivamo **zbroj** ili *suma reda*.
- Ako niz  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  nema graničnu vrijednost, kažemo da pripadni red *divergira*.

## 2.2.3. KRITERIJI KONVERGENCIJE REDA

- Ispitivanje konvergencije numeričkih redova u općem je slučaju relativno teško jer najčešće ne znamo formulu za opći član niza djelomičnih zbrojeva.
- Zbog toga se postavlja pitanje:
- *Može li se (i, ako može, kako) utvrditi je li numerički red konvergentan **isključivo** na temelju formule za opći član polaznoga niza  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ?*
- Opći kriterij za ispitivanje konvergencije *bilo kojega* numeričkoga reda danas nije poznat.
- Poznati su određeni kriteriji prema kojima se za relativnu većinu numeričkih redova može utvrditi jesu li konvergentni ili nisu (ali *nijedan* kriterij ne određuje pripadni zbroj reda u slučaju da red konvergira).

## 2.2.4. KRITERIJI KONVERGENCIJE REDA

- **Kriterij 1.** (*nužan uvjet konvergencije numeričkoga reda*)  
Ako red konvergira, onda vrijedi  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .
- Za primjenu je značajnija ekvivalentna tvrdnja:
- **Kriterij 2.** Ako vrijedi  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A \neq 0$ , numerički red je divergentan.
- *Pravilo:* Prigodom ispitivanja konvergencije numeričkoga reda najprije treba odrediti graničnu vrijednost polaznoga niza.
- Ako je ta vrijednost različita od nule, red je divergentan (i ispitivanje konvergencije reda time završava).
- Ako je ta vrijednost jednaka nuli, red može biti ili konvergentan ili divergentan, pa treba nastaviti ispitivanje prema drugim kriterijima.

## 2.2.4. KRITERIJI KONVERGENCIJE REDA

- Četiri najčešće korištena kriterija za ispitivanje konvergencije redova su *Cauchyjev*, *D'Alembertov*, *Leibnizov* i *Raabeov*.
- **Cauchyjev kriterij:** Ako je  $\lim_n \sqrt[n]{|a_n|} = r \in \mathbb{R}$ , onda vrijedi:
  - ako je  $r < 1$ , red  $\sum a_n$  je konvergentan;
  - ako je  $r > 1$ , red  $\sum a_n$  je divergentan;
  - ako je  $r = 1$ , nema odluke.
- Ovaj kriterij podesno je primijeniti ako je opći član polaznoga niza  $n$ -ta potencija nekoga izraza.

## 2.2.4. KRITERIJI KONVERGENCIJE REDA

- **D'Alembertov kriterij:** Ako je  $\lim_n \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = r \in \mathbb{R}$ , onda vrijedi:
  - ako je  $r < 1$ , red  $\sum a_n$  je konvergentan;
  - ako je  $r > 1$ , red  $\sum a_n$  je divergentan;
  - ako je  $r = 1$ , nema odluke.
- Ovaj kriterij je najjednostavniji za praktičnu primjenu.
- **Leibnizov kriterij:** Ako niz  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  *strogo pozitivnih* realnih brojeva strogo pada i ima graničnu vrijednost 0, onda je **alternirajući red**  $\sum (-1)^n \cdot a_n$  (čiji članovi pravilno mijenjaju predznak) konvergentan.

## 2.2.4. KRITERIJI KONVERGENCIJE REDA

- **Raabeov kriterij:** Ako je  $\lim_n \left( n \cdot \left( 1 - \frac{a_{n+1}}{a_n} \right) \right) = r \in \mathbb{R}$ , onda vrijedi:
  - ako je  $r > 1$ , tada red  $\sum a_n$  konvergira;
  - ako je  $r < 1$ , tada red  $\sum a_n$  divergira;
  - za  $r = 1$  nema odluke.
- Raabeov kriterij se najčešće primjenjuje u slučajevima u kojima D'Alembertov kriterij ne daje odluku.



## 2.2.5. KRITERIJ USPOREDBE

- U općem slučaju konvergencija reda može se ispitati tako da se zadani red usporedi ili s (hiper)harmonijskim ili s geometrijskim redom.
- Vrijedi sljedeći kriterij:
- *Ako su  $\sum a_n$  i  $\sum b_n$  redovi s pozitivnim članovima takvi da za gotovo sve  $n \in \mathbb{N}$  vrijedi  $a_n \leq b_n$ , onda:*
- *ako  $\sum b_n$  konvergira, onda i  $\sum a_n$  konvergira;*
- *ako  $\sum a_n$  divergira, onda i  $\sum b_n$  divergira.*

## 2.2.5. KRITERIJ USPOREDBE

- Korisna su i sljedeća dva kriterija:
- **Kriterij 1.** (*Cauchyjev integralni kriterij*) Neka je opći član reda određen *strogo pozitivnom, monotono padajućom i neprekidnom* funkcijom  $f$ . Tada red
- $\sum a_n$  i nepravi integral  $\int_a^{+\infty} f(x) \cdot dx$  istodobno ili konvergiraju ili divergiraju.
- **Kriterij 2.** Ako konvergira red  $\sum |a_n|$ , onda konvergira i red  $\sum a_n$ . (Obrat ne vrijedi.)
- Kriterij 2. podesno je primijeniti umjesto Leibnizova kriterija pri ispitivanju konvergencije alternirajućih redova.