TVZ TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE Elektrotehnički odjel	**Matematika 2** (preddiplomski stručni studij elektrotehnike)	**2.2. Numerički redovi. Kriteriji konvergencije redova.** - zadaci

1. Napišite (ako postoji) zatvorenu formulu za opći član niza $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ djelomičnih zbrojeva niza $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ako je:

a) $a_n = n$;

b) $a_n = \dfrac{1}{n}$;

c) $a_n = x^n$, za $x > 0$, ;

d) $a_n = \dfrac{1}{n^2+n}$.

2. Za svaki niz $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ iz rješenja zadatka 1. odredite postoji li $\lim\limits_{n} S_n$, odnosno je li pripadni red konvergentan.

3. Ispitajte konvergenciju sljedećih numeričkih redova (nije potrebno računati pripadne zbrojeve redova):

a) $\sum \left(\dfrac{n+1}{2\cdot n+1}\right)^n$;

b) $\sum \dfrac{n^2}{2019^n}$;

c) $\sum n^2 \cdot \left(\dfrac{2018}{2019}\right)^n$;

d) $\sum \dfrac{2019^n}{n!}$;

e) $\sum \dfrac{n^n}{n!}$;

f) $\sum \dfrac{(n!)^2}{(2\cdot n)!}$;

g) $\sum \dfrac{1}{n^2+2\cdot n}$;

h) $\sum \dfrac{1}{(3\cdot n-2)\cdot(3\cdot n+1)}$;

i) $\sum \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$;

j) $\sum \dfrac{(-1)^n}{n\cdot\sqrt{n}}$.

4. Neka je $p\in\mathbb{R}$ proizvoljan, ali fiksiran. Ispitajte konvergenciju *Dirichletova* (ili *hiperharmonijskoga*) *reda* $\sum \dfrac{1}{n^p}$ u zavisnosti o $p\in\mathbb{R}$.

5. Koristeći pogodni kriterij usporedbe ispitajte konvergenciju sljedećih redova:

a) $\sum \frac{\cos n}{2^n}$;

b) $\sum \frac{(-1)^n \sin n}{n^2}$;

c) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2}{n \cdot \ln^3 n}$;

d) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\ln n + 1}{(n \cdot \ln n)^3}$.

6. Odredite sve $x \in \mathbb{R}$ za koje je zbroj reda R jednak 2 ako je:

a) $R = \sum_{n=0}^{+\infty} \cos^n x$;

b) $R = \sum_{n=0}^{+\infty} \sin^n (\pi \cdot x)$;

c) $R = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot \cos^n (2 \cdot x)$;

d) $R = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot \sin^n \frac{x}{2}$.

7. Može li se divergencija harmonijskoga reda dokazati koristeći:

a) Cauchyjev kriterij;
b) D'Alembertov kriterij;
c) Raabeov kriterij;
d) Cauchyjev integralni kriterij?

Obrazložite svoje odgovore.

RJEŠENJA ZADATAKA

1.

a) $S_n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$;

b) Ne postoji zatvorena formula za S_n.

c) $S_n = \sum_{k=1}^{n} x^k = \frac{x^{n+1} - 1}{x-1}$;

d) $S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$.

2.

a) $\lim_n S_n = \lim_n \frac{n \cdot (n+1)}{2} = +\infty \Rightarrow$ red divergira.

b) Red divergira.

c) Ako je $|x| < 1,$ zbroj reda je $S = \frac{1}{1-x}$ i red tada konvergira.

U suprotnom, zbroj reda je $S = \frac{x^{n+1} - 1}{x-1}$ i red tada divergira.

d) $\lim_n S_n = \lim_n \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1 \Rightarrow$ zbroj reda je 1 i red konvergira.

3.

a) $\lim_n \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_n \left(\frac{n+1}{2 \cdot n + 1}\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow$ konvergira;

b) $\lim_n \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_n \left(\frac{\left(\sqrt[n]{n}\right)^2}{2019}\right) = \frac{1}{2019} \Rightarrow$ konvergira;

c) $\lim_n \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_n \left(\left(\sqrt[n]{n}\right)^2 \cdot \frac{2018}{2019}\right) = 1 \cdot \frac{2018}{2019} = \frac{2018}{2019} \Rightarrow$ konvergira;

d) $\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_n \frac{2019}{n+1} = 0 \Rightarrow$ konvergira;

e) $\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_n \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right) = e \Rightarrow$ divergira;

f) $\lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{n+1}{4 \cdot n + 2} = \frac{1}{4} \Rightarrow$ konvergira;

g) $\lim_n \left[n \cdot \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right)\right] = \lim_n \left[n \cdot \left(1 - \frac{n^2 + 2 \cdot n}{n^2 + 4 \cdot n + 3}\right)\right] = 2 \Rightarrow$ konvergira;

h) $\lim_n \left[n \cdot \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right)\right] = \lim_n \frac{6 \cdot n}{3 \cdot n + 4} = 2 \Rightarrow$ konvergira;

i) $\lim_n |a_n| = \lim_n \frac{1}{n} = 0 \Rightarrow$ konvergira;

j) $\lim_n |a_n| = \lim_n \frac{1}{n \cdot \sqrt{n}} = 0 \Rightarrow$ konvergira.

4. Ako je $p<0$, onda je $\lim\limits_{n}\dfrac{1}{n^p}=\lim\limits_{n} n^{-p}=+\infty$, pa primjenom nužnoga uvjeta konvergencije reda zaključujemo da u ovom slučaju red divergira.

Ako je $p\geq 0$, onda je funkcija $f(x)=\dfrac{1}{x^p}$ strogo pozitivna, neprekidna i monotono padajuća na intervalu $[1,+\infty\rangle$. Primijenimo Cauchyjev integralni kriterij, pa dobijemo:

$$\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p}=\lim_{b\to+\infty}\int_1^{b}\frac{\mathrm{d}x}{x^p}=\lim_{b\to+\infty}\left[\frac{x^{1-p}}{1-p}\right]_1^b=\lim_{b\to+\infty}\frac{b^{1-p}-1}{1-p}.$$

Ova granična vrijednost postoji ako i samo ako postoji $\lim\limits_{b\to+\infty} b^{1-p}$, odnosno ako i samo ako je $1-p<0$, odnosno ako i samo ako je $p>1$. Tako zaključujemo da zadani red konvergira ako i samo ako je $p>1$, a divergira ako i samo ako je $p\leq 1$.

5.

a) $(\dfrac{\cos n}{2^n}\leq\dfrac{1}{2^n})\wedge\left(\sum\dfrac{1}{2^n}\text{ konvergira}\right)\Rightarrow\left(\sum\dfrac{\cos n}{2^n}\text{ konvergira}\right)$;

b) $\left[\dfrac{(-1)^n\cdot\sin n}{n^2}\leq\dfrac{1}{n^2}\right]\wedge\left(\sum\dfrac{1}{n^2}\text{ konvergira}\right)\Rightarrow\left(\sum\dfrac{(-1)^n\cdot\sin n}{n^2}\text{ konvergira}\right)$;

c) $\left[f(n)=\dfrac{2}{n\cdot\ln^3 n}\text{ je strogo pozitivna, monotono padajuća i neprekidna na }[3,+\infty\rangle\right]\wedge$
$\left(\displaystyle\int_3^{+\infty}\dfrac{2\cdot\mathrm{d}x}{x\cdot\ln^3 x}=\dfrac{2}{\ln^2 3}\right)\Rightarrow\left(\sum\dfrac{2}{n\cdot\ln^3 n}\text{ konvergira}\right)$;

d) $\left[f(n)=\dfrac{\ln n+1}{(n\cdot\ln n)^3}\text{ je strogo pozitivna, monotono padajuća i neprekidna na }[3,+\infty\rangle\right]$
$\wedge\left(\displaystyle\int_3^{+\infty}\dfrac{\ln x+1}{(x\cdot\ln x)^3}\cdot\mathrm{d}x=\dfrac{1}{18\cdot\ln^2 3}\right)\Rightarrow\left(\sum\dfrac{\ln n+1}{(n\cdot\ln n)^3}\text{ konvergira}\right)$.

6.

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\cos^n x=1+\cos x+\cos^2 x+\cos^3 x+\ldots=\frac{1}{1-\cos x}\Rightarrow\frac{1}{1-\cos x}=2\Rightarrow$
$x_k=\pm\dfrac{\pi}{3}+k\cdot 2\cdot\pi,\ k\in\mathbb{Z}$;

b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\sin^n(\pi\cdot x)=1+\sin(\pi\cdot x)+\sin^2(\pi\cdot x)+\sin^3(\pi\cdot x)+\ldots=\frac{1}{1-\sin(\pi\cdot x)}$
$\Rightarrow\dfrac{1}{1-\sin(\pi\cdot x)}=2\Rightarrow x_k=\dfrac{12\cdot k+1}{6},\ x_l=\dfrac{12\cdot l+5}{6},\ k,l\in\mathbb{Z}$;

c) $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\cdot\cos^n(2\cdot x)=1-\cos x+\cos^2(2\cdot x)-\cos^3(2\cdot x)+\ldots=\frac{1}{1+\cos(2\cdot x)}\Rightarrow$

$\frac{1}{1+\cos(2\cdot x)}=2\Rightarrow x_k=\pm\frac{\pi}{3}+k\cdot\pi,\ k\in\mathbb{Z};$

d) $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\cdot\sin^n\frac{x}{2}=1-\sin\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}-\sin^3\frac{x}{2}+\ldots=\frac{1}{1+\sin\frac{x}{2}}\Rightarrow\frac{1}{1+\sin\frac{x}{2}}=2$

$\Rightarrow x_k=\frac{\pi\cdot(12\cdot k-1)}{3},\ x_l=\frac{\pi\cdot(12\cdot l+7)}{3},\ k,l\in\mathbb{Z}.$

7.

a) $\lim_n\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_n\frac{1}{\sqrt[n]{n}}=1\Rightarrow$ nema odluke;

b) $\lim_n\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_n\frac{n}{n+1}=1\Rightarrow$ nema odluke;

c) $\lim_n\left[n\cdot\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)\right]=\lim_n\frac{n}{n+1}=1\Rightarrow$ nema odluke;

d) Funkcija $f(x)=\frac{1}{x}$ je strogo pozitivna, strogo padajuća i neprekidna na $\left[1,+\infty\right\rangle$.

Zbog toga zadani red i integral $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}\cdot dx$ istodobno ili konvergiraju ili divergiraju.

Budući da je $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}\cdot dx=\lim_{b\to+\infty}\left(\int_1^b\frac{1}{x}\cdot dx\right)=\lim_{b\to+\infty}(\ln b)=+\infty$, zadani red divergira.