2.3.

MNOŽENJE MATRICA

2.3.1. SKALARNI UMNOŽAK UREĐENIH n-TORKI

- Za uređene n-torke $a=(a_1,\ldots,a_n),\ b=(b_1,\ldots,b_n)\in\mathbb{R}^n$
- definiramo njihov **skalarni umnožak** s

$$a\cdot b:=\sum_{i=1}^{n}a_i\cdot b_i=a_1\cdot b_1+\ldots+a_n\cdot b_n$$

- Za $n=1$ skalarni umnožak se podudara s ”običnim” množenjem realnih brojeva
- Za $n\in\{2,3\}$ skalarni umnožak se računa prema donjim formulama:

$$a=(a_1,a_2),\ b=(b_1,b_2)\Rightarrow a\cdot b=a_1\cdot b_1+a_2\cdot b_2;$$

$$a=(a_1,a_2,a_3),\ b=(b_1,b_2,b_3)\Rightarrow a\cdot b=a_1\cdot b_1+a_2\cdot b_2+a_3\cdot b_3.$$

2.3.2. MNOŽENJE MATRICA

- Zasniva se na skalarnom umnošku uređenih n-torki.
- Matrice A i B su **ulančane** ako je broj stupaca matrice A jednak broju redaka matrice B .
- Ekvivalentno: A i B su ulančane ako je A tipa $(r,\ s)$, a B tipa $(s,\ t)$, za neke $r,\ s,\ t \in \mathbb{N}$.
- Množenje matrica definira se *isključivo* za ulančane matrice.

2.3.2. MNOŽENJE MATRICA

- Za ulančane matrice A (tipa (r, s)) i B (tipa (s, t)) **umnožak matrica** A i B je matrica C takva da vrijedi:
- 1.) C je tipa (r, t);
- 2.) Za sve dopustive uređene parove (i, j) element c_{ij} jednak je skalarnom umnošku i – toga retka matrice A i j – toga stupca matrice B:

$$c_{ij} := \sum_{k=1}^{s} a_{ik} \cdot b_{kj} = a_{i1} \cdot b_{1j} + \ldots + a_{is} \cdot b_{sj}.$$

- Pišemo: $C = A \cdot B$
- **Napomena**: Ako je A matrica reda n, onda postoje umnošci $A^2 = A \cdot A$, $A^3 = A^2 \cdot A$ itd.

2.3.3. SVOJSTVA MNOŽENJA MATRICA

- 1.) Kvaziasocijativnost:
- $(\alpha \cdot A) \cdot B = \alpha \cdot (A \cdot B)$, pri čemu je $\alpha \in \mathbb{R}$.
- 2.) Asocijativnost: $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ (kad god postoje svi gornji umnošci);
- 3.) Ako postoje oba umnoška $A \cdot B$ i $B \cdot A$, onda općenito vrijedi: $A \cdot B \neq B \cdot A$.
- 4.) Distributivnost prema zbrajanju:
- $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$;
- $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$.

2.3.4. NAPOMENA

- U netom navedenim jednakostima **istim** znakom $\cdot$ označene su **potpuno različite** algebarske operacije.
- Zbog toga moramo pripaziti na *interpretaciju* toga znaka u svakoj pojedinoj jednakosti.
- Napomenimo da znakom $\cdot$ označavamo množenje kompleksnih brojeva, skalarni umnožak uređenih n-torki, množenje matrice sa skalarom i množenje (ulančanih) matrica.

1. Ispitajte postoji li umnožak $A \cdot B$ i, ako postoji, izračunajte ga ako su:

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} -1 & -2 \end{bmatrix}$;

b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$;

c) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

Rješenje:

a) A i B su istoga tipa ((1, 2)). A ima 2 stupca, a B ima 1 redak. Zbog toga **ne** postoji umnožak $A \cdot B$.

b) A je tipa (1, 2). B je tipa (2, 1). A ima 2 stupca, a B ima 2 retka. Zbog toga postoji umnožak $A \cdot B$. Taj umnožak je matrica tipa (1, 1):

$$\begin{aligned} A \cdot B &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} = 0 \text{ (nulmatrica reda 1).} \end{aligned}$$

c) A je tipa (1, 3). B je matrica reda 3, tj. matrica tipa (3, 3). Zbog toga postoji umnožak $A \cdot B$. Taj umnožak je matrica tipa (1, 3):

$$\begin{aligned} A \cdot B &= \begin{bmatrix} 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot 1 + 0 \cdot 0 & 1 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 + 0 \cdot 1 & 1 \cdot 0 + (-1) \cdot 0 + 0 \cdot (-1) \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

2. Zadane su matrice $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ i $B=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 0 & -2\end{bmatrix}$.

a) Pokažite da vrijedi jednakost:

$$(A+B)^2 = A^2 + 2\cdot A\cdot B + B^2.$$

b) Vrijedi li jednakost iz a) podzadatka za **bilo koje dvije** matrice A i B reda 2? Objasnite svoj odgovor.

Rješenje:

a) Imamo redom:

$$A+B=\begin{bmatrix}1+(-2) & 1+1\\ 0+0 & 1+(-2)\end{bmatrix}=$$
$$=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 0 & -1\end{bmatrix},$$
$$(A+B)^2=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 0 & -1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 0 & -1\end{bmatrix}=$$
$$=\begin{bmatrix}-1\cdot(-1)+2\cdot 0 & -1\cdot 2+2\cdot(-1)\\ 0\cdot(-1)+(-1)\cdot 0 & 0\cdot 2+(-1)\cdot(-1)\end{bmatrix}=$$
$$=\begin{bmatrix}1 & -4\\ 0 & 1\end{bmatrix},$$
$$A^2=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}=$$
$$=\begin{bmatrix}1\cdot 1+1\cdot 0 & 1\cdot 1+1\cdot 1\\ 0\cdot 1+1\cdot 0 & 0\cdot 1+1\cdot 1\end{bmatrix}=$$
$$=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix},$$
$$2\cdot A\cdot B=2\cdot\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 0 & -2\end{bmatrix}=$$
$$=\begin{bmatrix}2 & 2\\ 0 & 2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 0 & -2\end{bmatrix}=$$
$$=\begin{bmatrix}2\cdot(-2)+2\cdot 0 & 2\cdot 1+2\cdot(-2)\\ 0\cdot(-2)+2\cdot 0 & 0\cdot 1+2\cdot(-2)\end{bmatrix}=$$
$$=\begin{bmatrix}-4 & -2\\ 0 & -4\end{bmatrix},$$

$$B^2 = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} (-2)\cdot(-2)+1\cdot 0 & (-2)\cdot 1+1\cdot(-2) \\ 0\cdot(-2)+2\cdot 0 & 0\cdot 1+(-2)\cdot(-2) \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ 0 & 4 \end{bmatrix},$$

$$A^2+2\cdot A\cdot B+B^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} 1+(-4)+4 & 2+(-2)+(-4) \\ 0+0+0 & 1+(-4)+4 \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$
$$(A+B)^2 = A^2+2\cdot A\cdot B+B^2.$$

b) Ne vrijedi. Naime,

$$(A+B)^2 = A^2+2\cdot A\cdot B+B^2,$$
$$(A+B)\cdot(A+B) = A^2+2\cdot A\cdot B+B^2,$$
$$A^2+B\cdot A+A\cdot B+B^2 = A^2+2\cdot A\cdot B+B^2,$$
$$B\cdot A = A\cdot B,$$

a posljednja jednakost **nije** istinita za bilo koje dvije matrice reda 2 (množenje matrica općenito **nije** komutativno).