2.3. REDOVI FUNKCIJA.

TAYLOROV I MACLAURINOV RED.

2.3.1 REDOVI FUNKCIJA

- Svi redovi mogu se podijeliti na numeričke (članovi reda su (realni) brojevi) i funkcijske (članovi reda su funkcije).
- Ako je $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz realnih funkcija definiranih na nekom skupu X, onda je za svaki $x \in X$ dobro definiran red $\sum a_n(x)$ (to je zapravo red realnih brojeva).
- Svakom $x \in X$ za koji postoji zbroj reda $\sum a_n(x)$
- može se pridružiti taj zbroj, pa se dobije funkcija f sa skupa X u skup $\mathbb{R}$.
- Takva funkcija naziva se *razvoj funkcije f u red funkcija.*

2.3.2. RED POTENCIJA

- *Red potencija* poseban je slučaj reda funkcija.
- To je red oblika $\sum a_n \cdot (x-c)^n$, gdje su:
- $a_n \in \mathbb{R}$ koeficijenti reda funkcija;
- x nezavisna varijabla;
- $c \in \mathbb{R}$ konstanta.
- **Problem**: Za zadanu realnu funkciju f i broj $c \in D(f)$ odrediti *red potencija* koji najbolje aproksimira funkciju f u okolini točke c, te interval na kojemu taj red konvergira.
- **Rješenje**: Taylorov red funkcije f oko točke c.

2.3.3. TAYLOROV RED

- Za *unaprijed zadanu analitičku* funkciju f (funkciju čija je prirodna domena otvoreni interval ili unija takvih intervala, koja je proizvoljno mnogo puta derivabilna i koja se može aproksimirati redom potencija) i *unaprijed zadan* broj $c \in D(f)$ koeficijenti Taylorova reda određeni su formulama

$$a_0 = f(c),\ a_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}.$$

- Sam Taylorov red funkcije f u okolini točke c određen je s

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!} \cdot (x-c)^n.$$

2.3.4. TAYLOROV RED

- Detaljnim razmatranjima konvergencije Taylorova reda nećemo se posebno baviti. Treba istaknuti:
- *Taylorov red treba koristiti kao aproksimaciju funkcije f u "malim" okolinama točke c* (širine npr. 0.01, a ne širine 100).
- Za aproksimaciju analitičke funkcije f u okolini točke c *polinomom* stupnja n najbolje je uzeti tzv. *Taylorov polinom stupnja n* (oznaka: T_n) kojega tvori prvih n članova Taylorova reda.

2.3.5. NAPOMENA

- Za svaki $n \in \mathbb{N}$ možemo definirati niz funkcija $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ pravilom:
- $R_n = f - T_n$.
- R_n nazivamo *n-ti ostatak Taylorova reda.*
- Može se pokazati da vrijedi
- **Tvrdnja:** Ako za svaki x iz nekoga intervala I oko točke c vrijedi $\lim_n R_n(x) = 0$, onda za svaki x iz toga intervala vrijedi:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!} \cdot (x-c)^n.$$

- Dakle, na nekom je intervalu f jednaka zbroju Taylorova reda ako na istom intervalu niz n-tih ostataka teži ka nuli.
- Ovaj kriterij je praktički vrlo teško provjeriti, pa se u praksi pretpostavlja postojanje intervala I sa gornjim svojstvom.

2.3.6. MACLAURINOV RED

- Ako u Taylorovu redu posebno uzmemo $c = 0$, dobivamo tzv. *MacLaurinov red* funkcije f u okolini (oko) točke $c = 0$.
- MacLaurinov red funkcije f određen je s:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n$$

- I kod Taylorova i kod MacLaurinova reda temeljni problem predstavlja *određivanje n-te derivacije* zadane neprekidne funkcije f (za bilo koji $n \in \mathbb{N}$).

2.3.7. OSNOVNI RAZVOJI

I. $e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}, \ \forall x \in \mathbb{R};$

II. $\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2\cdot n+1}}{(2\cdot n+1)!}, \ \forall x \in \mathbb{R};$

III. $\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2\cdot n}}{(2\cdot n)!}, \ \forall x \in \mathbb{R};$

IV. $(1+x)^m = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{m\cdot(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-n+1)}{n!} \cdot x^n, \ \forall x \in \langle -1,1 \rangle;$

V. $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n, \ \forall x \in \langle -1,1 \rangle;$

VI. $\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot x^n, \ \forall x \in \langle -1,1 \rangle;$

VII. $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{n}, \ \forall x \in \langle -1,1 \rangle.$

2.3.8. KORISNI IDENTITETI

a) $f(x)=\dfrac{1}{a\cdot x+b}\Rightarrow f^{(n)}(x)=\dfrac{(-1)^{n-1}\cdot(n-1)!\cdot a^{n-1}}{(a\cdot x+b)^{n}},\ \forall n\in\mathbb{N};$

b) $f(x)=\sqrt{a\cdot x+b}\Rightarrow f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}\cdot\left(\dfrac{a}{2}\right)^{n}\cdot\dfrac{\prod_{k=1}^{n-1}(2k-1)}{x^{n-\frac{1}{2}}},\ \forall n\in\mathbb{N};$

c) $f(x)=\sin(a\cdot x+b)\Rightarrow f^{(n)}(x)=a^{n}\cdot\sin\left(a\cdot x+b+n\cdot\dfrac{\pi}{2}\right),\ \forall n\in\mathbb{N};$

d) $f(x)=\cos(a\cdot x+b)\Rightarrow f^{(n)}(x)=a^{n}\cdot\cos\left(a\cdot x+b+n\cdot\dfrac{\pi}{2}\right),\ \forall n\in\mathbb{N};$

e) $f(x)=e^{a\cdot x+b}\Rightarrow f^{(n)}(x)=a^{n}\cdot e^{a\cdot x+b},\ \forall n\in\mathbb{N};$

f) $f(x)=\ln(a\cdot x+b)\Rightarrow f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}\cdot\dfrac{(n-1)!\cdot a^{n}}{(a\cdot x+b)^{n}},\ \forall n\in\mathbb{N};$

g) $f(x)=\mathrm{ch}(a\cdot x+b)\Rightarrow f^{(n)}(x)=\begin{cases}a^{n}\cdot\mathrm{sh}(a\cdot x+b), & \text{za neparne } n\in\mathbb{N};\\ a^{n}\cdot\mathrm{ch}(a\cdot x+b), & \text{za parne } n\in\mathbb{N};\end{cases}$

h) $f(x)=\mathrm{sh}(a\cdot x+b)\Rightarrow f^{(n)}(x)=\begin{cases}a^{n}\cdot\mathrm{ch}(a\cdot x+b), & \text{za neparne } n\in\mathbb{N};\\ a^{n}\cdot\mathrm{sh}(a\cdot x+b), & \text{za parne } n\in\mathbb{N}.\end{cases}$

2.3.9. NAPOMENA

- Redovi potencija mogu se formalno derivirati i integrirati "član po član"
- Točnije, ako je $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x-c)^n$ razvoj u red potencija neprekidne funkcije f u okolini točke c, onda je:
- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n \cdot (x-c)^{n-1}$ razvoj u red potencija funkcije f ' u okolini točke c;
- $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} \cdot (x-c)^{n+1}$ razvoj u red potencija funkcije F u okolini točke c, pri čemu je F standardna antiderivacija funkcije f.