1. Razvijte sljedeće realne funkcije u MacLaurinov red (napišite prva četiri člana različita od nule) i odredite pripadne intervale konvergencije:

a) $f(x) = e^x$;

b) $g(x) = \ln(x+1)$;

c) $h(x) = \sin x$;

d) $p(x) = \cos x$.

2. Razvijte sljedeće realne funkcije u MacLaurinov red (napišite prva četiri člana različita od nule) i odredite pripadne intervale konvergencije:

a) $f(x) = \operatorname{ch} x$;

b) $g(x) = \operatorname{sh} x$;

c) $h(x) = \operatorname{arctg} x$;

d) $p(x) = \dfrac{x}{x^2+9}$.

3. Razvijte sljedeće realne funkcije u Taylorov red (napišite prva četiri člana različita od nule) i odredite pripadne intervale konvergencije:

a) $f(x) = e^x$ u okolini točke $c = 2$;

b) $g(x) = \ln x$ u okolini točke $c = 1$;

c) $h(x) = \sin x$ u okolini točke $c = \pi$;

d) $p(x) = \cos x$ u okolini točke $c = \dfrac{\pi}{2}$.

4. Aproksimirajte realnu funkciju $f(u) = u^3 - 3 \cdot \sin(2 \cdot u)$ MacLaurinovim polinomom 3. stupnja.

5. Aproksimirajte realnu funkciju $g(t) = t^3 + 12 \cdot \ln(t+1)$ MacLaurinovim polinomom 3. stupnja.

6. Aproksimirajte realnu funkciju $h(y) = \dfrac{6 \cdot e^y}{y^2}$ oko točke $c = 1$ Taylorovim polinomom 3. stupnja.

7. Odredite područje konvergencije svakoga od sljedećih redova:

a) $\sum \dfrac{x^n}{n^2}$;

b) $\sum \dfrac{|\ln x|^n}{n}$;

c) $\sum \dfrac{e^{2 \cdot n \cdot x}}{\sqrt{n}}$.

Sve svoje tvrdnje precizno obrazložite.

RJEŠENJA ZADATAKA

1.

a) $f^{(n)}(x)=e^x \Rightarrow f(0)=f^{(n)}(0)=1 \Rightarrow e^x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}$ (konvergira na $\mathbb{R}$)

b) $f(0)=0,\ f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^{n-1}\cdot(n-1)!}{(x+1)^n} \Rightarrow f^{(n)}(0)=(-1)^{n-1} \Rightarrow \ln(x+1)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\cdot x^n$ (konvergira na $\langle -1,1\rangle$);

c) $f(0)=0,\ f^{(n)}(x)=\sin\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow f^{(n)}(0)=\sin\left(n\cdot\frac{\pi}{2}\right)=\begin{cases}0, \text{ ako je } n \text{ paran broj,}\\ 1, \text{ ako je } n=4\cdot k-3, \text{ za } k\in\mathbb{N},\\ -1, \text{ ako je } n=4\cdot k-1, \text{ za } k\in\mathbb{N}.\end{cases}$

$\Rightarrow \sin x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2\cdot n+1)!}\cdot x^{2\cdot n+1}$ (konvergira na $\mathbb{R}$);

d) $f(0)=1,\ f^{(n)}(x)=\cos\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow f^{(n)}(0)=\cos\left(n\cdot\frac{\pi}{2}\right)=\begin{cases}0, \text{ ako je } n \text{ neparan broj,}\\ 1, \text{ ako je } n=4\cdot k, \text{ za } k\in\mathbb{N},\\ -1, \text{ ako je } n=4\cdot k-2, \text{ za } k\in\mathbb{N}.\end{cases}$

$\Rightarrow \cos x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2\cdot n)!}\cdot x^{2\cdot n}$ (konvergira na $\mathbb{R}$).

2.

a) $f(x)=\operatorname{ch}x \Rightarrow f^{(2\cdot n+1)}(x)=\operatorname{sh}x,\ f^{(2\cdot n)}(x)=\operatorname{ch}x \Rightarrow$

$f^{(2\cdot n+1)}(0)=0,\ f(0)=f^{(2\cdot n)}(0)=1 \Rightarrow \operatorname{ch}x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2\cdot n}}{(2\cdot n)!}=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}+\ldots\ (x\in\mathbb{R})$

b) $\operatorname{sh}x=\sum_{n=0}^{+\infty}\int\frac{x^{2\cdot n}}{(2\cdot n)!}dx=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2\cdot n+1}}{(2\cdot n+1)!}=x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^7}{7!}+\ldots\ (x\in\mathbb{R})$;

c) $\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\cdot x^{2\cdot n} \Rightarrow \int\frac{dx}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\int x^{2\cdot n}\cdot dx \Rightarrow$

$\operatorname{arctg}x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2\cdot n+1}x^{2\cdot n+1}=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots;\ (x\in[-1,1])$

d) $\frac{x}{9+x^2}=\frac{\frac{1}{9}\cdot x}{1+\left(\frac{x}{3}\right)^2}=\frac{1}{9}\cdot x\cdot\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\cdot\left(\frac{x}{3}\right)^{2\cdot n}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2\cdot n+1}}{9^{n+1}}=\frac{x}{9}-\frac{x^3}{81}+\frac{x^5}{729}-\frac{x^7}{6561}+\ldots\ (x\in\langle -3,3\rangle)$.

3.

a) $f^{(n)}(x)=e^x \Rightarrow f^{(n)}(-2)=e^{-2} \Leftrightarrow e^x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{e^{-2}}{n!}\cdot(x+2)^n,\ (x\in\mathbb{R})$;

b) $f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^n\cdot(n-1)!}{x^n} \Rightarrow f^{(n)}(1)=(-1)^n\cdot(n-1)! \Rightarrow$

$\ln x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}\cdot(x-1)^n=1-(x-1)+\frac{(x-1)^2}{2}-\frac{(x-1)^3}{3}+\ldots\ (x\in\langle 0,2])$;

c) $f^{(n)}(x)=\cos\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow f^{(n)}\left(\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left[(n+1)\cdot\frac{\pi}{2}\right]=\begin{cases}0, \text{ za parne } n,\\ -1, \text{ za } n=4\cdot k-3,\\ 1, \text{ za } n=4\cdot k-1,\end{cases}\Rightarrow$

$$\cos x=0-\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{1}{3!}\cdot\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^3-\frac{1}{5!}\cdot\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^5+\ldots=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\cdot\frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^{2\cdot n-1}}{(2\cdot n-1)!},\ (x\in\mathbb{R});$$

d) $f^{(n)}(x)=\sin\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow f^{(n)}(\pi)=\sin\left[(n+2)\cdot\frac{\pi}{2}\right]=\begin{cases}0, \text{ za parne } n\\ -1, \text{ za } n=4\cdot k-3\\ 1, \text{ za } n=4\cdot k-1\end{cases}\Rightarrow$

$$\sin x=0-(x-\pi)+\frac{1}{3!}\cdot(x-\pi)^3-\frac{1}{5!}\cdot(x-\pi)^5+\ldots=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\cdot\frac{(x-\pi)^{2\cdot n-1}}{(2\cdot n-1)!},\ (x\in\mathbb{R}).$$

4.

$f(0)=0,\ f'(0)=-6,\ f''(0)=0,\ f'''(0)=30\ \Rightarrow M_3(u)=5\cdot u^3-6\cdot u.$

5.

$g(0)=0,\ g'(0)=12,\ g''(0)=-12,\ g'''(0)=30\Rightarrow M_3(t)=5\cdot t^3-6\cdot t^2+12\cdot t.$

6.

$h(1)=6\cdot e,\ h'(1)=-6\cdot e,\ h''(1)=18\cdot e,\ h'''(1)=-66\cdot e\Rightarrow$
$T_3(y)=-11\cdot e\cdot(y-1)^3+9\cdot e\cdot(y-1)^2-6\cdot e\cdot(y-1)+6\cdot e.$

7.

a) Primijenimo Cauchyjev kriterij, pa dobijemo $r=|x|$. Stoga zadani red konvergira za $x\in\langle-1,1\rangle$. Za $x=-1$ dobijemo alternirajući red $\sum\frac{(-1)^n}{n^2}$ koji konvergira prema Leibnizovu kriteriju. Za $x=1$ dobijemo Dirichletov red $\sum\frac{1}{n^2}$ koji konvergira. Dakle, traženo područje konvergencije je segment [–1, 1].

b) Primijenimo Cauchyjev kriterij, pa dobijemo $r=|\ln x|$. Stoga zadani red konvergira za $x\in\left\langle-\frac{1}{e},\frac{1}{e}\right\rangle$. Za $x=\pm\frac{1}{e}$ dobivamo harmonijski red $\sum\frac{1}{n}$ koji je divergentan. Stoga je traženo područje konvergencije interval $\left\langle-\frac{1}{e},\frac{1}{e}\right\rangle$.

c) Primijenimo Cauchyjev kriterij, pa dobijemo $r=e^{2\cdot x}$. Stoga zadani red konvergira za $x<0$. Za $x=0$ dobijemo Dirichletov red $\sum\frac{1}{\sqrt{n}}=\sum\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ koji je divergentan. Stoga je traženo područje konvergencije interval $\langle-\infty,0\rangle$.