

2.3. REDOVI FUNKCIJA.

TAYLOROV I MACLAURINOV RED.

2.3.1 REDOVI FUNKCIJA

- Svi redovi mogu se podijeliti na numeričke (članovi reda su brojevi) i funkcijske (članovi reda su funkcije)
- Ako je $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ niz realnih funkcija definiranih na nekom skupu X , onda je za svaki $x \in X$ dobro definiran red $\sum a_n(x)$ (to je zapravo red realnih brojeva).
- Svakom $x \in X$ za koji postoji zbroj reda $\sum a_n(x)$
- može se pridružiti taj zbroj, pa se dobije funkcija f sa skupa X u skup \mathbb{R} .
- Takva funkcija naziva se *razvoj funkcije f u red funkcija*.

2.3.2. RED POTENCIJA

- *Red potencija* poseban je slučaj reda funkcija. To je red oblika $\sum a_n(x-c)^n$, gdje su:
- $a_n \in \mathbb{R}$ koeficijenti reda funkcija;
- x nezavisna varijabla;
- $c \in \mathbb{R}$ konstanta.
- Problem: Za zadanu realnu funkciju f i broj $c \in D_f$ odrediti *red potencija* koji najbolje aproksimira funkciju f u okolini točke c , te interval na kojemu taj red konvergira.
- Rješenje: Taylorov red funkcije f oko točke c .

2.3.3. TAYLOROV RED

- Za *unaprijed* zadanu neprekidnu funkciju f i *unaprijed* zadan realan broj $c \in D_f$ koeficijenti Taylorova reda određeni su formulama

$$a_0 = f(c), \quad a_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}.$$

- Sam Taylorov red neprekidne funkcije f u okolini točke c određen je s

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!} \cdot (x-c)^n.$$

2.3.4. TAYLOROV RED

- Problemima konvergencije Taylorova reda nećemo se posebno baviti, ali treba istaknuti:
- *Taylorov red treba koristiti kao aproksimaciju funkcije f u “malim” okolinama točke c (širine npr. 0.01, a ne širine 100).*
- Za aproksimaciju neprekidne funkcije f u okolini točke c *polinomom* stupnja n najbolje je uzeti tzv. *Taylorov polinom* kojega tvori prvih n članova Taylorova reda.

2.3.5. MACLAURINOV RED

- Ako u Taylorovu redu posebno uzmemo $c = 0$, dobivamo tzv. *MacLaurinov red* funkcije f u okolini (oko) točke $c = 0$.
- MacLaurinov red funkcije f određen je s:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n$$

- I kod Taylorova i kod MacLaurinova reda temeljni problem predstavlja *određivanje n -te derivacije* zadane neprekidne funkcije f (za bilo koji $n \in \mathbb{N}$).

2.3.6. OSNOVNI RAZVOJI

$$\text{I. } e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad \forall x \in \mathbb{R};$$

$$\text{II. } \sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2 \cdot n + 1}}{(2 \cdot n + 1)!}, \quad \forall x \in \mathbb{R};$$

$$\text{III. } \cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2 \cdot n}}{(2 \cdot n)!}, \quad \forall x \in \mathbb{R};$$

$$\text{IV. } (1+x)^m = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{m \cdot (m-1) \cdot \dots \cdot (m-n+1)}{n!} \cdot x^n, \quad \forall x \in \langle -1, 1 \rangle;$$

$$\text{V. } \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n, \quad \forall x \in \langle -1, 1 \rangle;$$

$$\text{VI. } \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot x^n, \quad \forall x \in \langle -1, 1 \rangle;$$

$$\text{VII. } \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{n}, \quad \forall x \in \langle -1, 1 \rangle.$$

2.3.7. KORISNI IDENTITETI

$$\mathbf{a)} \ f(x) = \frac{1}{a \cdot x + b} \Rightarrow f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1} \cdot (n-1)! \cdot a^{n-1}}{(a \cdot x + b)^n}, \quad \forall n \in \mathbb{N};$$

$$\mathbf{b)} \ f(x) = \sqrt{a \cdot x + b} \Rightarrow f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^n \cdot \frac{\prod_{k=1}^{n-1} (2k-1)}{x^{n-\frac{1}{2}}}, \quad \forall n \in \mathbb{N};$$

$$\mathbf{c)} \ f(x) = \sin(a \cdot x + b) \Rightarrow f^{(n)}(x) = a^n \cdot \sin\left(a \cdot x + b + n \cdot \frac{\pi}{2}\right), \quad \forall n \in \mathbb{N};$$

$$\mathbf{d)} \ f(x) = \cos(a \cdot x + b) \Rightarrow f^{(n)}(x) = a^n \cdot \cos\left(a \cdot x + b + n \cdot \frac{\pi}{2}\right), \quad \forall n \in \mathbb{N};$$

$$\mathbf{e)} \ f(x) = e^{a \cdot x + b} \Rightarrow f^{(n)}(x) = a^n \cdot e^{a \cdot x + b}, \quad \forall n \in \mathbb{N};$$

$$\mathbf{f)} \ f(x) = \ln(a \cdot x + b) \Rightarrow f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \cdot \frac{(n-1)! \cdot a^n}{(a \cdot x + b)^n}, \quad \forall n \in \mathbb{N};$$

$$\mathbf{g)} \ f(x) = \operatorname{ch}(a \cdot x + b) \Rightarrow f^{(n)}(x) = \begin{cases} a^n \cdot \operatorname{sh}(a \cdot x + b), & \text{za neparne } n \in \mathbb{N}; \\ a^n \cdot \operatorname{ch}(a \cdot x + b), & \text{za parne } n \in \mathbb{N}; \end{cases}$$

$$\mathbf{h)} \ f(x) = \operatorname{sh}(a \cdot x + b) \Rightarrow f^{(n)}(x) = \begin{cases} a^n \cdot \operatorname{ch}(a \cdot x + b), & \text{za neparne } n \in \mathbb{N}; \\ a^n \cdot \operatorname{sh}(a \cdot x + b), & \text{za parne } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

2.3.8. NAPOMENA

- Redovi potencija mogu se formalno derivirati i integrirati “član po član”
- Točnije, ako je $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x-c)^n$ razvoj u red potencija neprekidne funkcije f u okolini točke c , onda je:
- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n \cdot (x-c)^{n-1}$ razvoj u red potencija funkcije f' u okolini točke c ;
- $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} \cdot (x-c)^{n+1}$ razvoj u red potencija funkcije F u okolini točke c , pri čemu je F standardna antiderivacija funkcije f .