2.3. REDOVI FUNKCIJA.

TAYLOROV I MACLAURINOV RED.

2.3.1. NIZ FUNKCIJA

- Svi redovi mogu se podijeliti na numeričke (članovi reda su kompleksni brojevi) i funkcijske (članovi reda su funkcije).
- Da bismo definirali pojam reda funkcija, najprije moramo definirati *niz* funkcija.
- Neka je $D \subseteq \mathbb{R}$.
- Označimo: $\mathbb{R}^D := \{f : f : D \to \mathbb{R}\}$. Taj skup je zapravo skup svih realnih funkcija čija je domena D.

2.3.1. NIZ FUNKCIJA

- *Niz funkcija na skupu D* je svaka funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^D$. Tom funkcijom *svakom* prirodnom broju *pridružujemo točno jednu funkciju* čija je domena D.
- Standardno, analogno kao i kod numeričkih nizova, umjesto $f(n)$ pišemo f_n. Pritom je f_n *funkcija* koju nazivamo *n-ti član niza funkcija*.
- Niz funkcija obično označavamo s: $\{f_n\}$. Njegovi elementi su *funkcije* f_1, f_2, ..., f_n.

2.3.2. KONVERGENCIJA NIZA FUNKCIJA NA SKUPU

- *Svaki* član niza funkcija $\{f_n\}$ definiran je za *svaki* realan broj iz skupa D.
- Neka je $x_0 \in D$ proizvoljan, ali fiksiran.
- *Brojevi* $(f_n(x_0))$ tvore *niz* realnih brojeva. Taj niz može imati svoju (jedinstvenu) graničnu vrijednost $L(x_0)$. Ako ta vrijednost postoji, onda $x_0 \in D$ pridružujemo broj $L(x_0)$.
- Navedeni postupak ponovimo za *svaki* $x_0 \in D$. U nekim slučajevima dobit ćemo $L(x_0)$, a u nekima nećemo. Zbog toga s A označavamo podskup skupa D kojega tvore svi $x_0 \in D$ za koje postoji $L(x_0)$.
- Tako dobivamo *funkciju* koja $x_0 \in A$ pridružuje broj $L(x_0)$. Tu funkciju označimo s f.

2.3.2. KONVERGENCIJA NIZA FUNKCIJA NA SKUPU

- Kažemo da *niz* $\{f_n\}$ *konvergira obično* ili *po točkama prema funkciji* f *na skupu* A.
- Uz određene dodatne pretpostavke na konvergenciju niza funkcija (koje ćemo prešutno primjenjivati), može se pokazati da vrijedi:
- Tvrdnja. Ako je $\{f_n\}$ niz *neprekidnih* funkcija, onda je i f neprekidna funkcija.
- Dakle, „niz neprekidnih funkcija konvergira obično prema neprekidnoj funkciji”.

2.3.3. RED FUNKCIJA

- Neka je $\{f_n\}$ niz funkcija na skupu D.
- Niz funkcija $\{s_n\}$ definiran rekurzivno s:

$$\begin{cases} s_n = s_{n-1} + f_n, \text{ za svaki } n \in \mathbb{N},\ n \geq 2, \\ s_1 = f_1 \end{cases}$$

- nazivamo *niz djelomičnih zbrojeva funkcija.*
- Zbrajanje funkcija je pritom dobro definirano jer svi članovi polaznoga niza $\{f_n\}$ imaju istu domenu (skup D).
- Uređeni par $\{f_n, s_n\}$ nazivamo *red funkcija*.

2.3.3. RED FUNKCIJA

- Niz $\{s_n\}$, kao niz funkcija, također može konvergirati obično prema nekoj funkciji s na nekom skupu $B \subseteq D$.
- Tada kažemo da *red funkcija* $\{f_n\}$ *konvergira obično prema funkciji* s *na skupu* B.
- Pišemo: $$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = s(x),\ \forall x \in B.$$
- *Interpretacija*: Za svaki $x \in B$ red brojeva $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$
- konvergira prema „konkretnom" broju S.
- Zbog toga je dobro definirana funkcija s koja broju x pridružuje broj S. Ta funkcija naziva se *zbroj reda funkcija* $\{f_n\}$.

2.3.4. RED POTENCIJA

- *Red potencija* poseban je slučaj reda funkcija.
- To je red oblika $\sum a_n \cdot (x-c)^n$, gdje su:
- $a_n \in \mathbb{R}$ koeficijenti reda funkcija;
- x nezavisna varijabla;
- $c \in \mathbb{R}$ konstanta.
- Problem: Za zadanu realnu funkciju f i broj $c \in D(f)$
- odrediti *red potencija* koji najbolje aproksimira funkciju f u okolini točke c, te interval na kojemu taj red konvergira.
- Rješenje: Taylorov red funkcije f oko točke c.

2.3.5. NAPOMENA

- U terminologiji redova funkcija: $f_n(x) := a_n \cdot (x-c)^n$.
- Funkcija f je zbroj reda $\{f_n\}$, tj. taj red konvergira obično prema funkciji f. Pišemo:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cdot (x-c)^n,\ \forall x \in B.$$

- Mi ćemo zadati funkciju f i točku $c \in D(f)$, pa ćemo odrediti koeficijente a_n i skup B tako da vrijedi gornja jednakost.

2.3.5. TAYLOROV RED

- Za *unaprijed zadanu analitičku* funkciju f (funkciju čija je prirodna domena otvoreni interval ili unija takvih intervala, koja je proizvoljno mnogo puta derivabilna i koja se može aproksimirati redom potencija) i *unaprijed zadan* broj $c \in D(f)$ koeficijenti Taylorova reda određeni su formulama

$$a_0 = f(c),\ a_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}.$$

- Sam Taylorov red funkcije f u okolini točke c određen je s

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!} \cdot (x-c)^n.$$

2.3.5. TAYLOROV RED

- Detaljnim razmatranjima konvergencije Taylorova reda nećemo se posebno baviti. Treba istaknuti:
- *Taylorov red treba koristiti kao aproksimaciju funkcije f u "malim" okolinama točke c* (širine npr. 0.01, a ne širine 100).
- Za aproksimaciju analitičke funkcije f u okolini točke *c polinomom* stupnja n najbolje je uzeti tzv. *Taylorov polinom stupnja n* (oznaka: T_n) kojega tvori prvih n članova Taylorova reda.

2.3.6. NAPOMENA

- Za svaki $n \in \mathbb{N}$ možemo definirati niz funkcija $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ pravilom:
- $R_n = f - T_n$.
- R_n nazivamo *n-ti ostatak Taylorova reda*.
- Može se pokazati da vrijedi
- **Tvrdnja:** Ako za svaki x iz nekoga intervala I oko točke c vrijedi $\lim\limits_{n} R_n(x) = 0$, onda za svaki x iz toga intervala vrijedi:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!} \cdot (x-c)^n.$$

- Dakle, na nekom je intervalu f jednaka zbroju Taylorova reda ako na istom intervalu niz n-tih ostataka teži ka nulfunkciji.
- Ovaj kriterij je praktički vrlo teško provjeriti, pa se u praksi pretpostavlja postojanje intervala I sa gornjim svojstvom.

2.3.7. MACLAURINOV RED

- Ako u Taylorovu redu posebno uzmemo $c = 0$, dobivamo tzv. *MacLaurinov red* funkcije f u okolini (oko) točke $c = 0$.
- MacLaurinov red funkcije f određen je s:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n$$

- I kod Taylorova i kod MacLaurinova reda temeljni problem predstavlja *određivanje n-te derivacije* zadane analitičke funkcije f (za bilo koji $n \in \mathbb{N}$).

2.3.8. OSNOVNI RAZVOJI

I. $e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}, \ \forall x \in \mathbb{R};$

II. $\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2\cdot n+1}}{(2\cdot n+1)!}, \ \forall x \in \mathbb{R};$

III. $\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2\cdot n}}{(2\cdot n)!}, \ \forall x \in \mathbb{R};$

IV. $(1+x)^m = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{m\cdot(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-n+1)}{n!} \cdot x^n, \ \forall x \in \langle -1,1 \rangle;$

V. $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n, \ \forall x \in \langle -1,1 \rangle;$

VI. $\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot x^n, \ \forall x \in \langle -1,1 \rangle;$

VII. $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{n}, \ \forall x \in \langle -1,1 \rangle.$

2.3.9. KORISNI IDENTITETI

a) $f(x)=\dfrac{1}{a\cdot x+b}\Rightarrow f^{(n)}(x)=\dfrac{(-1)^{n-1}\cdot(n-1)!\cdot a^{n-1}}{(a\cdot x+b)^{n}},\ \forall n\in\mathbb{N};$

b) $f(x)=\sqrt{a\cdot x+b}\Rightarrow f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}\cdot\left(\dfrac{a}{2}\right)^{n}\cdot\dfrac{\prod_{k=1}^{n-1}(2k-1)}{x^{n-\frac{1}{2}}},\ \forall n\in\mathbb{N};$

c) $f(x)=\sin(a\cdot x+b)\Rightarrow f^{(n)}(x)=a^{n}\cdot\sin\left(a\cdot x+b+n\cdot\dfrac{\pi}{2}\right),\ \forall n\in\mathbb{N};$

d) $f(x)=\cos(a\cdot x+b)\Rightarrow f^{(n)}(x)=a^{n}\cdot\cos\left(a\cdot x+b+n\cdot\dfrac{\pi}{2}\right),\ \forall n\in\mathbb{N};$

e) $f(x)=e^{a\cdot x+b}\Rightarrow f^{(n)}(x)=a^{n}\cdot e^{a\cdot x+b},\ \forall n\in\mathbb{N};$

f) $f(x)=\ln(a\cdot x+b)\Rightarrow f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}\cdot\dfrac{(n-1)!\cdot a^{n}}{(a\cdot x+b)^{n}},\ \forall n\in\mathbb{N};$

g) $f(x)=\mathrm{ch}(a\cdot x+b)\Rightarrow f^{(n)}(x)=\begin{cases}a^{n}\cdot\mathrm{sh}(a\cdot x+b), & \text{za neparne } n\in\mathbb{N};\\ a^{n}\cdot\mathrm{ch}(a\cdot x+b), & \text{za parne } n\in\mathbb{N};\end{cases}$

h) $f(x)=\mathrm{sh}(a\cdot x+b)\Rightarrow f^{(n)}(x)=\begin{cases}a^{n}\cdot\mathrm{ch}(a\cdot x+b), & \text{za neparne } n\in\mathbb{N};\\ a^{n}\cdot\mathrm{sh}(a\cdot x+b), & \text{za parne } n\in\mathbb{N}.\end{cases}$

2.3.10. NAPOMENA

- Redovi potencija mogu se formalno derivirati i integrirati "član po član"
- Točnije, ako je $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x-c)^n$ razvoj u red potencija analitičke funkcije f u okolini točke c, onda je:
- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n \cdot (x-c)^{n-1}$ razvoj u red potencija funkcije f' u okolini točke c;
- $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} \cdot (x-c)^{n+1}$ razvoj u red potencija funkcije F u okolini točke c, pri čemu je F standardna antiderivacija funkcije f.

2.3.11. APSOLUTNA POGREŠKA APROKSIMACIJE

- Pretpostavimo da smo funkciju f aproksimirali polinomom T_n na nekom intervalu I oko točke $c \in D(f)$.
- Neka je $c_0 \in I$. Definiramo:
- *apsolutnu pogrešku* (oznaka: p_a) *aproksimacije funkcije f polinomom* T_n *u točki* c_0 s:

$$p_a(c_0) = \left| f(c_0) - T_n(c_0) \right|$$

- *funkciju pogreške aproksimacije funkcije f polinomom* T_n *na intervalu* I s:

$$p(x) = f(x) - T_n(x), \ \forall x \in I.$$

- Idealno: $p(x) \approx 0$, za što više $x \in I$.

2.3.12. RELATIVNA POGREŠKA APROKSIMACIJE

- Pretpostavimo da smo funkciju f aproksimirali polinomom T_n na nekom intervalu I oko točke $c \in D(f)$.
- Neka je $c_0 \in I$ takva da je $f(c_0) \neq 0$.
- Definiramo *relativnu pogrešku aproksimacije* (oznaka: p_r) *funkcije f polinomom T_n u točki c_0* s:

$$p_r(c_0) := \frac{p_a(c_0)}{\left|f(c_0)\right|} = \left|1 - \frac{T_n(c_0)}{f(c_0)}\right|$$

- Ta se pogreška izražava u *postotcima*.

2.3.13. NAPOMENA

- Ako duljinu od 1 cm aproksimiramo duljinom od 0.9 cm, a duljinu od 1 km aproksimiramo duljinom od 999 m, apsolutne pogreške aproksimacije bit će 1 mm i 1 m, pa se dobiva (pogrešan!) dojam da je u prvom slučaju pogreška 1000 puta manja nego u drugom.
- U obama slučajevima relativne pogreške aproksimacije su jednake i jednake 10%.
- Zbog toga se u ocjeni *kvalitete* neke *aproksimacije* najčešće koriste *relativne pogreške*.

1. Odredite područje konvergencije sljedećih redova:

a) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$;

Rješenje: U svakom podzadatku tražimo skup svih $x \in \mathbb{R}$ koje možemo uvrstiti u zadani red tako da dobijemo konvergentan numerički red. Taj skup odredit ćemo primjenom uobičajenih kriterija za ispitivanje konvergencije redova naučenih u prethodnoj točki. Pritom ćemo slučajeve u kojima pojedini kriterij ne daje odluku morati dodatno ispitati nekim drugim kriterijem.

Primijenit ćemo Cauchyjev kriterij. Ovdje **ne smijemo** zanemariti znak apsolutne vrijednosti jer ne znamo predznak veličine *x*. Koristit ćemo i poznatu graničnu vrijednost

$$\lim_n \left(\sqrt[n]{n}\right) = 1.$$

Imamo redom:

$$\begin{aligned} r &= \lim_n \left(\sqrt[n]{\left| \frac{x^n}{n^2} \right|} \right) = \\ &= \lim_n \left(\sqrt[n]{\frac{|x^n|}{|\underbrace{n^2}_{>0}|}} \right) = \\ &= \lim_n \left(\sqrt[n]{\frac{|x|^n}{n^2}} \right) = \\ &= \lim_n \left(\frac{\sqrt[n]{|x|^n}}{\underbrace{\left(\sqrt[n]{n}\right)^2}_{\to 1}} \right) = \\ &= \frac{|x|}{1} = \\ &= |x|. \end{aligned}$$

Cauchyjev kriterij nam kaže da polazni red (sigurno) konvergira kad je $r<1$. U ovom slučaju to znači da vrijedi nejednakost

$$|x| < 1.$$

Prisjetimo se da je, za svaki $a > 0$, nejednakost

$$|x| < a$$

ekvivalentna nejednakosti

$$-a < x < a.$$

Tako je nejednakost

$$|x| < 1$$

ekvivalentna nejednakosti

$$-1 < x < 1.$$

Ta nejednakost zadaje interval $\langle -1, 1\rangle$.

Međutim, Cauchyjev kriterij ne daje odluku u slučaju kad je $r=1$. Taj slučaj ne moramo raspisivati zasebno. Dovoljno je pogledati granice gore dobivenoga intervala i utvrditi konvergenciju reda za svaku pojedinu granicu. Konkretno, trebamo ispitati konvergenciju polaznoga reda za $x=-1$ i $x=1$.

Za $x=-1$ dobivamo red

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}.$$

Njegovu konvergenciju utvrdit ćemo primjenom Leibnizova kriterija.

Predznaci članova reda se pravilno izmjenjuju (negativan, pozitivan, negativan, ...). Nadalje, promotrimo niz

$$b_n = \frac{1}{n^2}.$$

On je očito strogo padajući i vrijedi:

$$\lim_n b_n = \lim_n \left(\frac{1}{n^2}\right) = 0.$$

Primjenom Leibnizova kriterija zaključujemo da promatrani red konvergira.

Za $x = 1$ dobivamo red

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1^n}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Riječ je o Dirichletovu redu za $p = 2$. Znamo da Dirichletov red u općem slučaju konvergira ako i samo ako je $p > 1$. Budući da je $p = 2 > 1$, promatrani red konvergira.

Dakle, početni red konvergira i za $x = -1$ i za $x = 1$. Zbog toga je traženo područje konvergencije segment $[-1,1]$.

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|\ln x|^n}{n}$;

Rješenje: Ponovno ćemo primijeniti Cauchyjev kriterij. Uočimo da su brojnik i nazivnik u općem članu reda nenegativni realni brojevi, pa prilikom primjene Cauchyjeva kriterija ne moramo koristiti apsolutnu vrijednost. Tako redom imamo:

$$\begin{aligned} r &= \lim_n \left(\sqrt[n]{\frac{|\ln x|^n}{n}} \right) = \\ &= \lim_n \left(\frac{\sqrt[n]{|\ln x|^n}}{\underbrace{\left(\sqrt[n]{n}\right)}_{\to 1}} \right) = \\ &= \frac{|\ln x|}{1} = \\ &= |\ln x|. \end{aligned}$$

Sada iz nejednakosti

$$r < 1$$

slijedi

$$|\ln x| < 1,$$

odnosno

$$-1 < \ln x < 1.$$

Na svaki član ove nejednakosti djelujemo sa strogo rastućim funkcijom e^x, zbog čega se znakovi nejednakosti ne mijenjaju. Dobijemo:

$$\begin{aligned} e^{-1} &< e^{\ln x} < e^{1}, \\ e^{-1} &< x < e. \end{aligned}$$

Dakle, polazni red sigurno konvergira za $x \in \langle e^{-1}, e \rangle$.

Pogledajmo konvergenciju u rubovima toga intervala. Primijetimo da za $x \in \{e^{-1}, e\}$ vrijedi

$$|\ln x| = 1,$$

pa ne moramo posebno promatrati svaku granicu intervala.

Za $x \in \{e^{-1}, e\}$, dakle, vrijedi

$$|\ln x| = 1,$$

pa u tim slučajevima dobivamo red

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}.$$

Prepoznajemo da se radi o harmonijskom redu za koji znamo da je divergentan. Zbog toga je za $x \in \{e^{-1}, e\}$ polazni red divergentan, pa je traženo područje konvergencije interval $\langle e^{-1}, e \rangle$.

c) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{2\cdot n\cdot x}}{\sqrt{n}}$.

Rješenje: I u ovom podzadatku uočimo da su brojnik i nazivnik općega člana reda strogo pozitivni realni brojevi. Zbog toga ne moramo koristiti apsolutnu vrijednost. Ponovnom primjenom Cauchyjeva kriterija dobivamo:

$$\begin{aligned} r &= \lim_n \left(\sqrt[n]{\frac{e^{2\cdot n\cdot x}}{\sqrt{n}}} \right) = \\ &= \lim_n \left(\frac{\sqrt[n]{e^{2\cdot n\cdot x}}}{\sqrt{\underbrace{\sqrt[n]{n}}_{\to 1}}} \right) = \\ &= \frac{e^{2\cdot x}}{1} = \\ &= e^{2\cdot x}. \end{aligned}$$

Tako iz

$$r<1$$

slijedi

$$e^{2\cdot x} < 1 .$$

Na obje strane te nejednadžbe djelujemo funkcijom prirodnoga logaritma koja je strogo rastuća, pa ne mijenja znak nejednakosti. Dobivamo:

$$\begin{aligned} &\ln\left(e^{2\cdot x}\right) < \ln 1, \\ &2\cdot x < 0, \\ &x < 0. \end{aligned}$$

Dakle, polazni red sigurno konvergira kad je

$$x < 0 ,$$

odnosno

$$x \in \langle -\infty, 0 \rangle .$$

Preostaje ispitati konvergenciju za $x = 0$.

Za $x = 0$ dobivamo red

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{2\cdot n\cdot 0}}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} =$$
$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}.$$

Ponovno prepoznajemo Dirichletov red, i to za $p = \frac{1}{2}$. Ta vrijednost je strogo manja od 1, pa u tom slučaju Dirichletov red divergira.

Prema tome, traženo područje konvergencije je interval $\langle -\infty, 0\rangle$.

2. Izvedite formulu za *n*-ti član MacLaurinova reda u općem slučaju.

Rješenje: Pretpostavimo da je f realna funkcija čija je prirodna domena interval koji sadrži nulu, te da je f analitička u nuli. (Podsjetimo, analitičnost funkcije f znači da tu funkciju možemo derivirati proizvoljno mnogo puta i svaki put ćemo dobiti funkciju neprekidnu u nuli.) Tu funkciju u okolini nule želimo dovoljno dobro aproksimirati redom potencija, tj. želimo da na nekom intervalu oko nule vrijedi jednakost:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cdot x^n =$$
$$= a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + a_3 \cdot x^3 + \ldots + a_n \cdot x^n + \ldots$$

U ovu jednakost uvrstimo $x=0$, pa dobijemo $a_0 = f(0)$.

Nadalje, pretpostavili smo da je f analitička u nuli. Takva je i desna strana gornje jednakosti (svaki polinom možemo derivirati beskonačno mnogo puta i uvijek ćemo dobiti funkciju neprekidnu u nuli). Zbog toga derivirajmo zasebno lijevu i zasebno desnu stranu te jednakosti:

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty} n \cdot a_n \cdot x^{n-1} =$$
$$= a_1 + 2 \cdot a_2 \cdot x + 3 \cdot a_3 \cdot x^2 + \ldots + n \cdot a_n \cdot x^{n-1} + \ldots$$

I u ovu jednakost uvrstimo $x=0,$ pa dobijemo $f'(0)=a_1$.

Nastavimo s ovim postupkom:

$$f''(x)=\sum_{n=2}^{+\infty} n \cdot (n-1) \cdot a_n \cdot x^{n-2} = 2 \cdot a_2 \cdot x + 6 \cdot a_3 \cdot x + \ldots + n \cdot (n-1) \cdot a_n \cdot x^{n-2} + \ldots \Rightarrow$$

$$a_2 = \frac{f''(0)}{2},$$

$$f'''(x)=\sum_{n=3}^{+\infty} n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot a_n \cdot x^{n-3} = 6 \cdot a_3 + \ldots + n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot a_n \cdot x^{n-3} + \ldots \Rightarrow$$

$$a_3 = \frac{f''(0)}{6},$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(x) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 \cdot a_n + \ldots \Rightarrow$$

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1} = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

Posljednju jednakost dobili smo nakon što smo n puta derivirali polaznu jednakost. U svaku od dobivenih jednakosti uvrstili smo $x = 0$ tako da na desnoj strani jednakosti ostane samo izraz oblika $A \cdot a_n$ iz kojega onda možemo izraziti a_n.

Tako smo dobili da je razvoj polazne funkcije u MacLaurinov red dan pravilom:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n.$$

Napomena 1. Dogovorno označimo

$$f^{(0)}(x) := f(x).$$

Zbog toga zbroj na desnoj strani gornje jednakosti počinje od $n = 0$ i formalno „ide“ do $n = +\infty$. Prvi član reda uvijek je jednak vrijednosti polazne funkcije u nuli.

Napomena 2. Potpuno analogan izvod vrijedi za Taylorov razvoj analitičke funkcije f u red oko bilo koje točke c iz njezine prirodne domene. U svim koracima izvoda 0 treba zamijeniti s c, a x sa $(x - c)$. Provedite taj izvod sami za vježbu.

3. Razvijte sljedeće realne funkcije u MacLaurinov red i odredite pripadna područja konvergencije:

a) $f(x) = \mathrm{e}^x$;

Rješenje: U svakom podzadatku najprije treba odrediti pravilo n-te derivacije zadane funkcije. Potom treba izračunati vrijednost dobivene derivacije za $x = 0$ i uvrstiti dobiveni rezultat u pravilo za određivanje MacLaurinova reda.

Iz *Matematike* 1 (točka 4.16., zadatak 3.) znamo da je

$$f^{(n)}(x) = \mathrm{e}^x, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Zbog toga je

$$f^{(n)}(0) = \mathrm{e}^0 = 1, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Također je i

$$f(0) = \mathrm{e}^0 = 1.$$

Uvrštavanjem u formulu za MacLaurinov razvoj u red dobivamo:

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^x &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \cdot x^n = \\ &= 1 + x + \frac{1}{2} \cdot x^2 + \frac{1}{6} \cdot x^3 + \ldots \end{aligned}$$

Preostaje odrediti za koje $x \in \mathbb{R}$ vrijedi gornja jednakost. Taj problem je ekvivalentan određivanju intervala konvergencije reda na desnoj strani te jednakosti. Naime, pokazuje se da, ako za neki $x \in \mathbb{R}$ taj red konvergira, onda je njegov zbroj jednak e^x, tj. lijevoj strani jednakosti.

Dakle, tražimo područje konvergencije reda

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \cdot x^n.$$

Primijenit ćemo D'Alembertov kriterij. Označimo

$$a_n = \frac{x^n}{n!}.$$

Tada je

$$a_{n+1} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Zbog toga redom imamo:

$$\begin{aligned} r &= \lim_n \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \\ &= \lim_n \left| \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}} \right| = \\ &= \lim_n \left| \frac{x^{n+1}}{x^n} \cdot \frac{n!}{(n+1)!} \right| = \\ &= \lim_n \left| x \cdot \frac{n!}{(n+1)\cdot n!} \right| = \\ &= \lim_n \left| x \cdot \frac{1}{n+1} \right| = \\ &= 0. \end{aligned}$$

(U posljednjoj graničnoj vrijednosti x smatramo konstantom jer je varijabla prema kojoj određujemo graničnu vrijednost n.) Budući da je $r = 0 < 1$, promatrani red konvergira *za svaki* $x \in \mathbb{R}$. Drugim riječima, aproksimacija eksponencijalne funkcije redom polinoma valjana je *za svaki* $x \in \mathbb{R}$. Tako vrijednosti funkcije e^x možemo računati s proizvoljnom točnošću koristeći članove dobivena MacLaurinova reda.

b) $g(x) = \ln(x+1)$;

Rješenje: Iz *Matematike* 1 (točka 4.16, zadatak 4.) znamo da je

$$g^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1} \cdot (n-1)!}{(x+1)^n}.$$

Uvrstimo li u ovu jednakost $x = 0$, dobit ćemo:

$$g^{(n)}(0) = \frac{(-1)^{n-1} \cdot (n-1)!}{(0+1)^n} = (-1)^{n-1} \cdot (n-1)!.$$

Ova formula vrijedi za $n \in \mathbb{N}$, ali ne i za $n = 0$. Međutim, prema Napomeni 1., zbroj u MacLaurinovu razvoju u red počinje od $n = 0$. Zbog toga zasebno odredimo:

$$g(0) = \ln(0+1) = 0.$$

Dakle, traženi razvoj u red je:

$$\begin{aligned} g(x) &= 0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} \cdot (n-1)!}{n!} \cdot x^n = \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} \cdot (n-1)!}{n \cdot (n-1)!} \cdot x^n = \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \cdot x^n \end{aligned}$$

Uočimo da je

$$D(g) = \langle -1, +\infty \rangle$$

(zašto?), pa pogledajmo za koje $x \in D(g)$ vrijedi gornja jednakost.
(**Oprez**: Umjesto x na desnoj strani jednakosti općenito možemo uvrstiti bilo koji realan broj, ali aproksimaciju **obavezno** promatramo na intervalu koji je podskup prirodne domene funkcije na lijevoj strani jednakosti.)

Primijenit ćemo Cauchyjev kriterij. Budući da x (zasad) može biti i strogo negativan realan broj, ne znamo predznak izraza x^n, pa u određivanju granične vrijednosti moramo koristiti apsolutnu vrijednost. Imamo redom:

$$r = \lim_n \left(\sqrt[n]{\left| \frac{(-1)^{n-1}}{n} \cdot x^n \right|} \right) =$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_n \left(\sqrt[n]{\frac{\overbrace{\left|(-1)^{n-1}\right|}^{=1}}{\left|\underbrace{n}_{>0}\right|} \cdot \underbrace{\left|x^n\right|}_{=|x|^n}} \right) = \\
&= \lim_n \left(\sqrt[n]{\frac{1}{n} \cdot |x|^n} \right) = \\
&= \lim_n \left(\frac{1}{\underbrace{\sqrt[n]{n}}_{\to 1}} \cdot |x| \right) = \\
&= |x|.
\end{aligned}
$$

Analogno kao u rješenju zadatka 1. a) dobivamo

$$x \in \langle -1, 1 \rangle .$$

Sada ne moramo ispitivati konvergenciju u lijevom rubu ovoga intervala jer $x = -1 \notin D(g)$. Zbog toga ćemo ispitati konvergenciju samo za $x = 1$.

Za $x = 1$ dobivamo red

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \cdot 1^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

Riječ je o alternirajućem redu u kojemu se predznaci pravilno izmjenjuju: pozitivan, negativan, pozitivan, ... Njegovu konvergenciju najlakše je ispitati Leibnizovim kriterijem. Označimo li

$$b_n = \frac{1}{n},$$

onda lako vidimo da je b_n strogo padajući niz i da vrijedi

$$\lim_n \left(\frac{1}{n} \right) = 0.$$

Prema Leibnizovu kriteriju, promatrani red konvergira.

Dakle, promatrana aproksimacija MacLaurinovim redom vrijedi za $x \in \langle -1, 1]$.

Primijetite da iz dobivene aproksimacije za $x = 1$ slijedi:

$$\ln 2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} =$$
$$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$$

Ovdje se javlja prividni paradoks: lijeva strana je iracionalan broj, a desna zbroj racionalnih brojeva koji je uvijek racionalan broj. Međutim, paradoksa nema jer se na desnoj strani ne nalazi *konačan* zbroj racionalnih brojeva. Ako u zbrajanju na desnoj strani „stanemo“ kod nekoga člana, dobivamo aproksimaciju lijeve strane s određenom točnošću, što je korektno (iracionalan broj se uvijek može aproksimirati racionalnim brojem s određenom točnošću).

c) $h(x) = \sin x$;

Rješenje: Iz *Matematike* 1 (točka 4.16., zadatak 5.) znamo da je:

$$h^{(n)}(x) = \sin\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right).$$

Zbog toga je:

$$\begin{aligned} h^{(n)}(0) &= \sin\left(0 + n \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \\ &= \sin\left(n \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \\ &= \begin{cases} 0, \text{ ako je } n \text{ paran broj}, \\ 1, \text{ ako je } n = 4 \cdot k - 3, \text{ za } k \in \mathbb{N}, \\ -1, \text{ ako je } n = 4 \cdot k - 1, \text{ za } k \in \mathbb{N}. \end{cases} \end{aligned}$$

Dakle, MacLaurinov red ne sadrži nijedan član sa parnim eksponentom (uključujući i $n = 0$). Zbog toga moramo osigurati da u nazivniku i u eksponentu potencije s bazom x budu samo neparni prirodni brojevi. To ćemo postići tako da umjesto n pišemo $2 \cdot n + 1$, pri čemu zbroj ponovno počinje sa $n = 0$. Predznaci se pravilno mijenjaju: pozitivan, negativan, pozitivan, ..., što ćemo postići tako da kao eksponent uz potenciju s bazom (-1) pišemo n (prvi član reda dobivamo za $n = 0$ i on mora biti pozitivan, pa zato pišemo $(-1)^n$ - da je taj član negativan, kao eksponent bismo pisali ili $n - 1$ ili $n + 1$). Dobivamo:

$$\begin{aligned} h(x) = \sin x &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2 \cdot n + 1)!} \cdot x^{2 \cdot n + 1} = \\ &= x - \frac{1}{6} \cdot x^3 + \frac{1}{120} \cdot x^5 - \frac{1}{5040} \cdot x^7 + \ldots \end{aligned}$$

Pogledajmo za koje $x \in \mathbb{R}$ vrijedi ova aproksimacija. Primijenit ćemo D'Alembertov kriterij. Označimo li

$$a_n = \frac{(-1)^n}{(2 \cdot n + 1)!} \cdot x^{2 \cdot n + 1},$$

onda je

$$a_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{(2 \cdot (n+1) + 1)!} \cdot x^{2 \cdot (n+1) + 1} =$$

$$= \frac{(-1)^n}{(2 \cdot n+3)!} \cdot x^{2 \cdot n+3}.$$

Računamo:

$$\begin{aligned}
r &= \lim_n \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \\
&= \lim_n \left| \frac{\dfrac{(-1)^{n+1}}{(2 \cdot n+3)!} \cdot x^{2 \cdot n+3}}{\dfrac{(-1)^n}{(2 \cdot n+1)!} \cdot x^{2 \cdot n+1}} \right| = \\
&= \lim_n \left| \frac{(-1)^{n+1}}{(-1)^n} \cdot \frac{x^{2 \cdot n+3}}{x^{2 \cdot n+1}} \cdot \frac{(2 \cdot n+1)!}{(2 \cdot n+3)!} \right| = \\
&= \lim_n \left| (-1) \cdot x^2 \cdot \frac{(2 \cdot n+1)!}{(2 \cdot n+3) \cdot (2 \cdot n+2) \cdot (2 \cdot n+1)!} \right| = \\
&= \lim_n \left| (-1) \cdot x^2 \cdot \frac{1}{(2 \cdot n+3) \cdot (2 \cdot n+2)} \right| = \\
&= 0.
\end{aligned}$$

((-1) i x^2 smatramo konstantama jer graničnu vrijednost određujemo uzimajući n kao varijablu. Nazivnik posljednjega razlomka očito teži u $+\infty$, pa je granična vrijednost jednaka 0.)

Analogno kao u **a)** podzadatku zaključujemo da dobivena aproksimacija vrijedi za svaki $x \in \mathbb{R}$.

d) $p(x) = \cos x$.

Rješenje: Možemo postupiti analogno kao u prethodnom zadatku (učinite to sami za vježbu), ali postupit ćemo lukavije, brže i kraće. Kad se radi o analitičkim funkcijama, a sve trigonometrijske funkcije su takve, onda MacLaurinov red možemo derivirati tako da deriviramo svaki član toga reda. Pritom se ne mijenja interval konvergencije polaznoga reda. Tako dobivamo:

$$
\begin{aligned}
(\sin x)' &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{(-1)^n}{(2\cdot n+1)!} \cdot x^{2\cdot n+1} \right)' = \\
&= (x)' + \left(\frac{-1}{3!} \cdot x^3 \right)' + \left(\frac{1}{5!} \cdot x^5 \right)' + \left(\frac{-1}{7!} \cdot x^7 \right)' + \ldots \Rightarrow
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\cos x &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2\cdot n+1)!} \cdot (2\cdot n+1) \cdot x^{2\cdot n} = \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2\cdot n+1)\cdot(2\cdot n)!} \cdot (2\cdot n+1) \cdot x^{2\cdot n} = \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2\cdot n)!} \cdot x^{2\cdot n} = \\
&= 1 - \frac{1}{2} \cdot x^2 + \frac{1}{24} \cdot x^4 - \frac{1}{720} \cdot x^6 + \ldots
\end{aligned}
$$

I ova aproksimacija vrijedi za svaki $x \in \mathbb{R}$. Za vježbu, provedite dokaz te tvrdnje primjenjujući D'Alembertov kriterij (ponovno se dobiva $r = 0$).

4. Razvijte sljedeće realne funkcije u MacLaurinov red i odredite pripadna područja konvergencije:

a) $f(x) = \operatorname{ch} x$;

Rješenje: U ovom ćemo zadatku iskoristiti različita svojstva konvergentnih redova. Teorijski, sva četiri podzadatka možemo riješiti potpuno analogno kao i zadatak 3. (Učinite to za vježbu.) Međutim, u praksi se slučajevi **c)** i **d)** pokazuju prekompliciranima za rješavanje prema definiciji MacLaurinova reda jer je preteško odrediti n-tu derivaciju zadanih funkcija. Zbog toga ćemo ih riješiti na bitno kraće i jednostavnije načine.

U 3. **a)** zadatku smo dokazali da vrijedi razvoj

$$\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Ako umjesto x u ovoj formuli pišemo $-x$, dobit ćemo red koji ponovno konvergira za svaki $x \in \mathbb{R}$. Naime, funkcija f definirana pravilom $f(x) = -x$ preslikava skup $\mathbb{R}$ na samoga sebe (tj. ta funkcija je bijekcija), pa se ne mijenja interval konvergencije.

Dakle, vrijede jednakosti:

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{e}^x &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}, \\ \mathrm{e}^{-x} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-x)^n}{n!}, \end{aligned}\right\} \forall x \in \mathbb{R}.$$

Zbrojimo te jednakosti tako da zasebno zbrojimo njihove lijeve, a zasebno njihove desne strane. Potom dobivenu jednakost podijelimo s 2. Dobit ćemo:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} &= \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{x^n}{n!} + \frac{(-x)^n}{n!} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{x^n + (-x)^n}{n!} \right). \end{aligned}$$

Lijeva strana ove jednakosti je, prema definiciji, upravo $\operatorname{ch} x$. Pogledajmo kako možemo pojednostavniti izraz pod sumom na desnoj strani jednakosti. Sjetimo se da je funkcija $g(x) = x^n$ parna ako i samo ako je n paran broj, a neparna ako i samo ako je n neparan broj. No, prema definiciji (ne)parne funkcije, to znači da vrijedi:

$$(-x)^n = \begin{cases} x^n, \text{ ako je } n \text{ paran broj,} \\ -(x^n), \text{ ako je } n \text{ neparan broj.} \end{cases}$$

Zbog toga je:

$$x^n + (-x)^n = \begin{cases} x^n + x^n, \text{ ako je } n \text{ paran broj,} \\ x^n + (-(x^n)), \text{ ako je } n \text{ neparan broj} \end{cases} =$$
$$= \begin{cases} 2 \cdot x^n, \text{ ako je } n \text{ paran broj,} \\ 0, \text{ ako je } n \text{ neparan broj.} \end{cases}$$

Dakle, u redu na desnoj strani „prežive“ samo članovi koji imaju paran eksponent. Članovi s neparnim eksponentom jednaki su nuli. Zbog toga moramo osigurati da nam eksponent uvijek bude paran broj. To ćemo napraviti tako da umjesto n pišemo $2 \cdot n$, pri čemu granice zbrajanja ostaju nepromijenjene (i dalje zbrajamo „od 0 do beskonačno“). Tako konačno dobivamo:

$$\text{ch } x = \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \left(2 \cdot \frac{x^{2 \cdot n}}{(2 \cdot n)!} \right) =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2 \cdot n}}{(2 \cdot n)!} =$$
$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2 \cdot n}}{(2 \cdot n)!} =$$
$$= 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^6}{720} + \ldots$$

Za vježbu pokažite da gornji red doista konvergira za svaki $x \in \mathbb{R}$. (Primijenite D'Alembertov kriterij.)

b) $g(x) = \text{sh}\, x$;

Rješenje: Traženi red najlakše i najbrže ćemo dobiti tako da deriviramo svaki član reda dobivena u rješenju prethodnoga zadatka po varijabli *x*:

$$
\begin{aligned}
(\text{ch}\, x)' &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{x^{2\cdot n}}{(2\cdot n)!} \right)' = \\
&= (1)' + \left(\frac{x^2}{2} \right)' + \left(\frac{x^4}{24} \right)' + \left(\frac{x^6}{720} \right)' + \ldots, \\
\text{sh}\, x &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2\cdot n \cdot x^{2\cdot n-1}}{(2\cdot n)!} = \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2\cdot n-1}}{(2\cdot n-1)!} = \\
&= x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^7}{5040} + \ldots, \ \forall x \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

Koje smo sve jednakosti ovdje koristili? Prva od njih je

$$\left(x^{2\cdot n}\right)' = 2\cdot n \cdot x^{2\cdot n-1}, \ \forall x \in \mathbb{R}, \ \forall n \in \mathbb{N},$$

što je tablična derivacija. Druga od njih je

$$(2\cdot n)! = (2\cdot n)\cdot(2\cdot n-1)!, \ \forall n \in \mathbb{N},$$

a koja proizlazi izravno iz definicije faktorijela.

No, napravili smo i još nešto. Uočite da posljednji zbroj počinje sa $n=1$, a ne sa $n=0$. Kako to, odnosno zašto ne počinje sa $n=0$? Uočite da smo deriviranjem MacLaurinova reda za ch *x* „izgubili“ prvi član toga reda. Derivirali smo jedinicu, dobili smo nulu i tu nulu više nismo pisali. Dakle, član reda dobiven za $n=0$ je „nestao“, pa zbrajanje zato počinje od $n=1$. Dodatni razlog ovoj promjeni je činjenica da identitet

$$(2\cdot n)! = (2\cdot n)\cdot(2\cdot n-1)!$$

vrijedi za svaki $n \in \mathbb{N}$, ali ne i za $n=0$.

c) $h(x) = \text{arctg } x.$

Rješenje: U rješenju prethodnoga podzadatka primijenili smo tehniku deriviranja „član po član“. Dakle, derivirali smo posebno lijevu stranu reda i svaki član reda na desnoj strani. Derivacija pritom uvijek „ide“ po varijabli funkcije – u ovom slučaju, ta varijabla je *x*. Varijablu *n* pri deriviranju smatramo konstantom.

U ovom ćemo zadatku primijeniti vrlo sličnu tehniku integriranja „član po član“. Ta će nam tehnika vrlo brzo dati konačno rješenje.

Znamo da je:

$$(\text{arctg } x)' = \frac{1}{1+x^2}, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Pogledajmo možemo li razviti u MacLaurinov red funkciju

$$h_1(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Odgovor je, dakako, potvrdan.

Krećemo od razvoja:

$$\frac{1}{1+x^m} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot x^{m \cdot n}, \ \forall x \in \langle -1, 1 \rangle, \forall m \in \mathbb{N}.$$

U ovaj red uvrstimo $m = 2$, pa dobijemo:

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+x^2} &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot x^{2 \cdot n} = \\ &= 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots\end{aligned}$$

Integriramo dobivenu jednakost „član po član“, pri čemu zapravo određujemo *standardnu antiderivaciju* svakoga člana. Tako odmah dobivamo:

$$\int \frac{1}{1+x^2} \cdot \mathrm{d}x = \int \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot x^{2 \cdot n} \cdot \mathrm{d}x \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}\text{arctg } x &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{2 \cdot n + 1} \cdot x^{2 \cdot n + 1} = \\ &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots\end{aligned}$$

Mi već znamo da je

$$-1 < x < 1.$$

Dakle, dobiveni red sigurno konvergira ako je $-1 < x < 1$. No, što je s rubovima toga intervala?

Za geometrijski red znamo odgovor: ako je $q \in \{-1, 1\}$, geometrijski red je divergentan. Mogli bismo zaključiti da analogan zaključak o divergenciji vrijedi i za dobiveni red. Mogli bismo – ali nećemo. Provjerimo konvergenciju za $x = -1$ i za $x = 1$.

Za $x = -1$ dobijemo red

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{2 \cdot n + 1} \cdot (-1)^{2 \cdot n + 1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{3 \cdot n + 1}}{2 \cdot n + 1}.$$

Predznaci njegovih članova se pravilno izmjenjuju: negativan, pozitivan, negativan, pozitivan, …. Dakle, radi se o alternirajućem redu. Nadalje, promotrimo niz

$$a_n = \frac{1}{2 \cdot n + 1}.$$

Taj niz je strogo padajući (jer je nazivnik razlomka strogo rastuća funkcija u varijabli n) i očito je

$$\lim_n (a_n) = \lim_n \left(\frac{1}{2 \cdot n + 1} \right) = 0.$$

To znači da su ispunjene sve pretpostavke Leibnizova kriterija, pa prema tom kriteriju zaključujemo da promatrani red konvergira.

Za $x = 1$ dobijemo red

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{2 \cdot n + 1} \cdot 1^{2 \cdot n + 1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2 \cdot n + 1}.$$

Predznaci njegovih članova se pravilno izmjenjuju: pozitivan, negativan, pozitivan, negativan, …. Dakle, radi se o alternirajućem redu. Na potpuno jednak način kao i za $x = -1$ (štoviše, promatrajući *isti* niz $a_n = \frac{1}{2 \cdot n + 1}$) primjenom Leibnizova kriterija zaključujemo da je taj red konvergentan.

Dakle, iako geometrijski red konvergira za $-1 < q < 1$, područje konvergencije našega reda je segment $[-1, 1]$.

Napomena 3. Upravo smo dokazali da je jednakost

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2 \cdot n + 1} \cdot x^{2 \cdot n + 1}$$

valjana i za $x = 1$. Što dobijemo ako u tu jednakost uvrstimo $x = 1$? Imamo:

$$\begin{aligned} \operatorname{arctg} 1 &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2 \cdot n + 1} \cdot 1^{2 \cdot n + 1}, \\ \frac{\pi}{4} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2 \cdot n + 1} = \\ &= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots \end{aligned}$$

Odavde slijedi:

$$\begin{aligned} \pi &= 4 \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2 \cdot n + 1} = \\ &= 4 \cdot \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots\right) \end{aligned}$$

Upravo ovaj razvoj omogućuje nam izračunavanje broja π s proizvoljnom točnošću.

5. Aproksimirajte realnu funkciju f MacLaurinovim polinomom 3. stupnja ako je:

a) $f(u) = u^3 - 3 \cdot \sin(2 \cdot u)$;

Rješenje: MacLaurinov polinom 3. stupnja označavamo s M_3. Općenito, MacLaurinov polinom stupnja n označavamo s M_n.

Znamo da je

$$\sin x = x - \frac{1}{6} \cdot x^3 + \ldots, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

To znači da je

$$\begin{aligned} 3 \cdot \sin(2 \cdot u) &= 3 \cdot \left(2 \cdot u - \frac{1}{6} \cdot (2 \cdot u)^3 + \ldots \right) = \\ &= 6 \cdot u - 4 \cdot u^3 + \ldots, \forall u \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Dakle, traženi polinom je:

$$\begin{aligned} M_3(u) &= u^3 - \left(6 \cdot u - 4 \cdot u^3\right) = \\ &= 5 \cdot u^3 - 6 \cdot u. \end{aligned}$$

b) $f(t) = t^3 + 12 \cdot \ln(t+1)$;

Rješenje: Prema rezultatu zadatka 3. b) vrijedi:

$$\begin{aligned} t^3 + 12 \cdot \ln(t+1) &= t^3 + 12 \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \cdot t^n = \\ &= t^3 + 12 \cdot \left(t - \frac{1}{2} \cdot t^2 + \frac{1}{3} \cdot t^3 - \ldots \right) = \\ &= t^3 + 12 \cdot t - 6 \cdot t^2 + 4 \cdot t^3 - \ldots = \\ &= 5 \cdot t^3 - 6 \cdot t^2 + 12 \cdot t - \ldots, \end{aligned}$$

pa odavde odmah „očitamo“:

$$M_3(t) = 5 \cdot t^3 - 6 \cdot t^2 + 12 \cdot t.$$

c) $f(x)=\dfrac{6\cdot(x-1)}{\mathrm{e}^x}$.

Rješenje: Prema rezultatu zadatka 3. a) vrijedi:

$$\mathrm{e}^x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}.$$

Tako sada imamo:

$$\begin{aligned}\frac{6\cdot(x-1)}{\mathrm{e}^x}&=6\cdot(x-1)\cdot\mathrm{e}^{-x}=\\&=6\cdot(x-1)\cdot\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-x)^n}{n!}=\\&=6\cdot(x-1)\cdot\left(1-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}+\ldots\right)=\\&=6\cdot\left(x-x^2+\frac{x^3}{2}-\frac{x^4}{6}+\ldots-\left(1-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}+\ldots\right)\right)\approx\\&\approx6\cdot\left(x-x^2+\frac{x^3}{2}-1+x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}\right)=\\&=6\cdot\left(\frac{2}{3}\cdot x^3-\frac{3}{2}\cdot x^2+2\cdot x-1\right)=\\&=4\cdot x^3-9\cdot x^2+12\cdot x-6.\end{aligned}$$

pa odavde odmah očitamo traženi polinom:

$$M_3(x)=4\cdot x^3-9\cdot x^2+12\cdot x-6.$$

Napomena 4. Kad god je to moguće, treba primijeniti „gotove“ MacLaurinove razvoje u red potencija jer se time izbjegne određivanje derivacija polazne funkcije u nuli koje može biti tehnički sporo i zahtjevno. Ipak, pokušajte riješiti b) i c) podzadatak analogno kao i a), tj. prema definicijskoj formuli MacLaurinova razvoja u red. (Ne trebate određivati opći član reda, nego prva četiri člana.)

6. Aproksimirajte funkciju f Taylorovim polinomom 2. stupnja u okolini točke c ako je zadano:

a) $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $c = -1$;

Rješenje: Kao što je istaknuto na predavanjima, MacLaurinov je razvoj funkcije u red potencija poseban slučaj Taylorova razvoja funkcije u red potencija. Taylorov razvoj funkcije uz određene se uvjete na funkciju f može napraviti oko *bilo koje točke* iz prirodne domene te funkcije, ali uz uvjet da je oko te točke moguće opisati barem jedan otvoreni interval (a samim tim i beskonačno mnogo otvorenih intervala) koji su podskupovi prirodne domene funkcije f. Mi se ovdje nećemo baviti detaljnijim razmatranjem teorijskih postavki, nego ćemo samo reći da ćemo promatrati razvoj analitičkih funkcija (dakle, onih čija je domena otvoreni interval ili unija otvorenih intervala, koje se mogu beskonačno mnogo puta derivirati i za koje postoji Taylorov razvoj u red) oko točaka iz njihovih prirodnih domena takvih da oko tih točaka postoje spomenuti otvoreni intervali. Primjeri **b)** i **c)** su namjerno odabrani jer je vrlo teško napisati formulu za n-tu derivaciju funkcije f, pa se zato traže aproksimacije Taylorovim polinomima 2. stupnja. Analogno kao i u slučaju MacLaurinovih polinoma, i Taylorove polinome stupnja n označavamo s T_n.

Iako će rješenje ovoga podzadatka biti vrlo lagano, primjer je namjerno odabran iz dvaju osnovnih razloga. Prvi razlog: *ne* postoji MacLaurinov razvoj zadane funkcije u red. Naime, funkcija f očito nije definirana u nuli. Drugi razlog: treba dobro paziti na izbor otvorenoga intervala oko točke 1. Tako npr. interval $\langle -1, 2\rangle$ ne dolazi u obzir jer sadrži točku 0 u kojoj funkcija nije definirana. Međutim, takvi su intervali ionako „preširoki“. Aproksimacija treba biti dobra na malom intervalu oko točke 1, pa je vrlo primjereno uzeti npr. $\langle 0.9, 1.1\rangle$. Upravo tako treba i shvatiti rješenje ovoga zadatka: aproksimiramo funkciju f na nekom relativno malom intervalu oko točke c.

Strategija rješavanja je vrlo jednostavna. Izračunat ćemo vrijednost zadane funkcije i vrijednosti prvih dviju njezinih derivacija u točki c. (Treba nam točno onoliko derivacija zadane funkcije koliko iznosi stupanj Taylorova polinoma.) Potom ćemo uvrstiti dobivene vrijednosti u formulu za Taylorov razvoj u red, uzeti samo prva tri člana toga reda i time riješiti zadatak. Dakle, imamo redom:

$$f(x)=\frac{1}{x}, \qquad f(c)=f(-1)=\frac{1}{-1}=-1,$$
$$f'(x)=-\frac{1}{x^2}, \quad f'(c)=f'(-1)=-\frac{1}{(-1)^2}=-1,$$
$$f''(x)=\frac{2}{x^3}, \quad f''(c)=f''(-1)=\frac{2}{(-1)^3}=-2.$$

Dakle, traženi Taylorov polinom je:

$$\begin{aligned} T_2(x)&=-1+\frac{-1}{1!}\cdot(x-(-1))+\frac{-2}{2!}\cdot(x-(-1))^2= \\ &=-(x+1)^2-(x+1)-1. \end{aligned}$$

Napomena 5. Zapis Taylorova polinoma ostavljamo u gornjem obliku jer je upravo u tom obliku lagano izračunati približne vrijednosti funkcije u okolini točke c. Npr. uzmemo li $x=-1.1$, onda je:

$$f(-1.1)\approx T_2(-1.1)=-(-1.1+1)^2-(-1.1+1)-1=-0.01+0.1-1=-0.91.$$

Točna vrijednost funkcije f u točki c je:

$$f(-1.1)=\frac{1}{-1.1}=-\frac{10}{11}=0.\overline{90}=0.90909090\ldots.$$

Napomena 6. U ovom podzadatku čak nije teško napisati opći član Taylorova razvoja u red funkcije f u točki c. Za vježbu, pokažite da je:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}-(x+1)^n.$$

Primijetimo da je riječ o geometrijskom redu kojemu su prvi član i količnik jednaki $-(x+1)$. Taj red konvergira kad je

$$-1<x+1<1,$$

odnosno za $x\in\langle -2,0\rangle$.

b) $f(x) = 64 \cdot \sqrt{x},\ c = 4;$

Rješenje: Prve dvije derivacije zadane funkcije se odrede bitno brže i jednostavnije zapišemo li $f(x) = 64 \cdot x^{\frac{1}{2}}$. Tako redom imamo:

$$\begin{aligned}
f(x) &= 64 \cdot x^{\frac{1}{2}}, & f(c) &= f(4) = 64 \cdot 4^{\frac{1}{2}} = 64 \cdot 2 = 128,\\
f'(x) &= 64 \cdot \frac{1}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}-1} = 32 \cdot x^{\frac{-1}{2}}, & f'(c) &= f'(4) = 32 \cdot 4^{\frac{-1}{2}} = 32 \cdot \frac{1}{2} = 16,\\
f''(x) &= 32 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot x^{\frac{-1}{2}-1} = -16 \cdot x^{\frac{-3}{2}}, & f''(c) &= f''(4) = -16 \cdot 4^{\frac{-3}{2}} = -16 \cdot \frac{1}{8} = -2.
\end{aligned}$$

Zbog toga je:

$$\begin{aligned}
f(x) \approx T_2(x) &= 128 + \frac{16}{1!} \cdot (x-4)^1 + \frac{-2}{2!} \cdot (x-4)^2 = \\
&= -(x-4)^2 + 16 \cdot (x-4) + 128.
\end{aligned}$$

c) $f(x) = 2187 \cdot \sqrt[3]{2 \cdot x + 1},\ c = 13.$

Rješenje: Ponovno zapišemo pravilo funkcije f u obliku potencije:

$$f(x) = 2187 \cdot (2 \cdot x + 1)^{\frac{1}{3}}.$$

Tako sada redom imamo:

$$\begin{aligned}
f(x) &= 2187 \cdot (2 \cdot x + 1)^{\frac{1}{3}}, & f(c) &= f(13) = 6561,\\
f'(x) &= 2187 \cdot \frac{1}{3} \cdot (2 \cdot x + 1)^{\frac{1}{3}-1} \cdot 2 = 1458 \cdot (2 \cdot x + 1)^{\frac{-2}{3}}, & f'(c) &= f'(13) = 162,\\
f''(x) &= 1458 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot (2 \cdot x + 1)^{\frac{-5}{3}} \cdot 2 = -1944 \cdot (2 \cdot x + 1)^{\frac{-5}{3}}, & f''(c) &= f''(13) = -8.
\end{aligned}$$

Zbog toga je:

$$\begin{aligned}
f(x) \approx T_2(x) &= 6561 + \frac{162}{1!} \cdot (x-13)^1 + \frac{-8}{2!} \cdot (x-13)^2 = \\
&= (-4) \cdot (x-13)^2 + 162 \cdot (x-13) + 6561.
\end{aligned}$$

7. **Bez korištenja L'Hôpital-Bernoullijeva pravila** odredite

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{120\cdot\sin\left(x^3\right)-120\cdot x^3+20\cdot x^9}{x^{15}}\right).$$

Rješenje: Znamo da vrijedi:

$$\sin x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2\cdot n+1)!}\cdot x^{2\cdot n+1}=$$
$$=x-\frac{1}{6}\cdot x^3+\frac{1}{120}\cdot x^5-\frac{1}{5040}\cdot x^7+\ldots,\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

U tu jednakost umjesto x uvrstimo x^3, pa dobijemo:

$$\sin\left(x^3\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2\cdot n+1)!}\cdot\left(x^3\right)^{2\cdot n+1}=$$
$$=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2\cdot n+1)!}\cdot x^{6\cdot n+3}=$$
$$=x^3-\frac{1}{6}\cdot x^9+\frac{1}{120}\cdot x^{15}-\frac{1}{5040}\cdot x^{21}+\ldots$$

Odatle slijedi da je tražena granična vrijednost jednaka:

$$L=\lim_{x\to 0}\left(\frac{120\cdot\left(x^3-\frac{1}{6}\cdot x^9+\frac{1}{120}\cdot x^{15}+\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{(-1)^n\cdot x^{6\cdot n+3}}{(2\cdot n+1)!}\right)-120\cdot x^3+20\cdot x^9}{x^{15}}\right)=$$
$$=\lim_{x\to 0}\left(1+\underbrace{\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2\cdot n+1)!}\cdot x^{6\cdot n-12}}_{\to 0}\right)=$$
$$=1+0=$$
$$=1.$$

8. Odredite MacLaurinov razvoj *standardne antiderivacije* funkcije $f(x)=\dfrac{\cos x-1}{x}$ u red potencija.

Rješenje: Integral $\int \dfrac{\cos x-1}{x}\cdot \mathrm{d}x$ nije elementaran, pa standardnu antiderivaciju zadane funkcije ne možemo odrediti standardnim metodama. Međutim, to neće biti potrebno. Znamo da vrijedi:

$$\begin{aligned}\cos x&=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2\cdot n)!}\cdot x^{2\cdot n}=\\&=1-\frac{1}{2}\cdot x^2+\frac{1}{24}\cdot x^4-\frac{1}{720}\cdot x^6+\ldots,\ \forall x\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

Zbog toga je:

$$\begin{aligned}\frac{\cos x-1}{x}&=\frac{\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2\cdot n)!}\cdot x^{2\cdot n}-1}{x}=\\&=\frac{\left(1-\frac{1}{2}\cdot x^2+\frac{1}{24}\cdot x^4-\frac{1}{720}\cdot x^6+\ldots\right)-1}{x}=\\&=\frac{-\frac{1}{2}\cdot x^2+\frac{1}{24}\cdot x^4-\frac{1}{720}\cdot x^6+\ldots}{x}=\\&=-\frac{1}{2}\cdot x+\frac{1}{24}\cdot x^3-\frac{1}{720}\cdot x^5+\ldots=\\&=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2\cdot n)!}\cdot x^{2\cdot n-1}\end{aligned}$$

Integriranjem „član po član“ sada lagano dobijemo:

$$\begin{aligned}\int\frac{\cos x-1}{x}\cdot\mathrm{d}x&=\int\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2\cdot n)!}\cdot x^{2\cdot n-1}\right)\cdot\mathrm{d}x=\\&=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2\cdot n)!}\cdot\left(\int x^{2\cdot n-1}\cdot\mathrm{d}x\right)=\\&=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2\cdot n)!}\cdot\left(\frac{1}{2\cdot n}\cdot x^{2\cdot n}+c\right)=\\&=c\cdot\underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2\cdot n)\cdot(2\cdot n)!}}_{=:c_1}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2\cdot n)\cdot(2\cdot n)!}\cdot x^{2\cdot n}=\end{aligned}$$

$$= c_1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2 \cdot n) \cdot (2 \cdot n)!} \cdot x^{2 \cdot n} =$$

$$= c_1 - \frac{1}{4} \cdot x^2 + \frac{1}{96} \cdot x^4 - \frac{1}{3600} \cdot x^6 + \ldots,\ c_1 \in \mathbb{R} \Rightarrow$$

$$F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2 \cdot n) \cdot (2 \cdot n)!} \cdot x^{2 \cdot n} =$$

$$= -\frac{1}{4} \cdot x^2 + \frac{1}{96} \cdot x^4 - \frac{1}{3600} \cdot x^6 + \ldots$$