2.3. UVJETNA VJEROJATNOST

UVJETNA VJEROJATNOST.
NEZAVISNOST DOGAĐAJA.

2.3.1. UVJETNA VJEROJATNOST

- Promatramo sljedeći problem:
- *Poznato je da je u nekom kolu igre* LOTO 7/35 *prvi izvučeni broj bio jednoznamenkast*. *Kolika je vjerojatnost da je taj broj bio prost*?
- Na temelju dosadašnjega iskustva rekli bismo:
- *Ukupan broj mogućih ishoda je* 35. *Ukupan broj povoljnih ishoda jednak je ukupnom broju jednoznamenkastih prostih brojeva*, *a taj broj je jednak* 4. *Zbog toga je tražena vjerojatnost jednaka*

$$p = \frac{4}{35}$$

- Takav zaključak, međutim, **nije** ispravan.
- *Razlog*: Znamo da je prvi izvučeni broj bio jednoznamenkast. Zbog toga je ukupan broj mogućih ishoda slučajnoga pokusa *izvlačenje prvoga broja* jednak 9. (Postoji svega 9 jednoznamenkastih prirodnih brojeva.) Među tih 9 brojeva, njih 4 su prosta: 2, 3, 5 i 7. Zbog toga je tražena vjerojatnost jednaka

$$p = \frac{4}{9}$$

- Ovaj problem tipičan je primjer tzv. *problema uvjetne vjerojatnosti*. Opći oblik toga problema je: *Kolika je vjerojatnost događaja A ako je poznato da se ostvario* (*dogodio*) *događaj B*?

2.3.2. DEFINICIJA UVJETNE VJEROJATNOSTI

- Neka je $(\mathbf{\Omega}, \mathcal{F}, P)$ vjerojatnosni prostor.
- Neka je $B \in \mathcal{F}$ događaj takav da je $P(B) > 0$.
- Uvjetna vjerojatnost događaja A *uz uvjet da se dogodio događaj* B je realna funkcija $P_B : \mathcal{F} \to [0, 1]$ definirana formulom

$$P_B(A) := \frac{P(A \cdot B)}{P(B)}, \text{ za svaki } A \in \mathcal{F}$$

- Lako se provjeri da je funkcija P_B doista vjerojatnost.
- Zapis: Umjesto $P_B(A)$ pišemo $P(A \mid B)$ i čitamo: *vjerojatnost događaja A uz uvjet B.*

2.3.3. NAPOMENA

- Iz definicije uvjetne vjerojatnosti indukcijom po broju događaja n lako slijedi:

$$P\left(\prod_{k=1}^{n} A_k\right)=\prod_{k=1}^{n} P\left[A_k \mid \prod_{i=1}^{k-1} A_i\right]$$

- Npr. za $n = 3$ dobivamo:

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3)=P(A_1)\cdot P(A_2 \mid A_1)\cdot P(A_3 \mid A_1 \cdot A_2)$$

- dok za $n = 4$ dobivamo:

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot A_4)=P(A_1)\cdot P(A_2 \mid A_1)\cdot P(A_3 \mid A_1 \cdot A_2)\cdot P(A_4 \mid A_1 \cdot A_2 \cdot A_3)$$

2.3.4. NEZAVISNOST DOGAĐAJA

- Neka je $(\boldsymbol{\Omega}, \mathcal{F}, P)$ vjerojatnosni prostor.
- Za događaje $A, B \in \mathcal{F}$ kažemo da su **nezavisni** ako vjerojatnost događaja B ne ovisi o ostvaraju događaja A i obrnuto (vjerojatnost događaja A ne ovisi o ostvaraju događaja B).
- Nužan i dovoljan uvjet pomoću kojega se praktično provjerava nezavisnost dvaju događaja je:
  - $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$

2.3.4. NEZAVISNOST DOGAĐAJA

- Netom navedena definicija može se poopćiti.
- Neka je $(\mathbf{\Omega}, \mathcal{F}, P)$ vjerojatnosni prostor i neka je $S = \{A_1, ..., A_n\}$ *konačan* podskup algebre $\mathcal{F}$.
- Kažemo da su događaji $A_1, ..., A_n$ nezavisni ako za *svaki* neprazan podskup $I = \{i_1, ..., i_k\} \subseteq$ $\subseteq [n]$ vrijedi jednakost:
- $$P\left(\prod_{m=i_1}^{i_k} A_m\right) = \prod_{m=i_1}^{i_k} P(A_m)$$

2.3.4. NEZAVISNOST DOGAĐAJA

- Posebno, događaji A, B i $C \in \mathcal{F}$ su nezavisni ako *istodobno* vrijede sve četiri sljedeće jednakosti:
- $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$;
- $P(A \cdot C) = P(A) \cdot P(C)$;
- $P(B \cdot C) = P(B) \cdot P(C)$;
- $P(A \cdot B \cdot C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$.
- **Klasična pogreška**: Događaji A, B i $C \in \mathcal{F}$ su nezavisni ako i samo ako vrijedi jednakost
- $P(A \cdot B \cdot C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$.
- U gornjoj tvrdnji istinit je samo smjer $\Rightarrow$ (što je posljedica definicije), ali smjer $\Leftarrow$ općenito ne mora biti istinit.

1. (*Bertrandov*[1] *paradoks*, 1889.) Na raspolaganju su nam tri različite igraće karte: *crna* (obojena crnom bojom s obje strane), *bijela* (obojena bijelom bojom s obje strane) i *crno-bijela* (obojena crnom bojom s jedne strane, a bijelom bojom s druge strane). Na slučajan način izvučemo točno jednu kartu, stavimo je na stol i utvrdimo da je njezina gornja strana obojena bijelom bojom. Izračunajte vjerojatnost da je i donja strana izvučene karte obojena bijelom bojom.

Rješenje: Prema pretpostavci, međusobno razlikujemo sve tri karte. Neka su c_1 i c_2 strane crne karte, b_1 i b_2 strane bijele karte, a c_3 i b_3 strane crno-bijele karte. Slučajne pokuse *određivanje gornje strane izvučene karte* i *određivanje donje strane izvučene karte* modeliramo **istim** prostorom elementarnih događaja

$$\Omega = \{b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3\}.$$

Neka su:

A = {gornja strana izvučene karte je obojena bijelom bojom},
B = {donja strana izvučene karte je obojena bijelom bojom}.

Tražimo $P(B \mid A)$. U tu svrhu odredimo najprije elementarne događaje povoljne za A. Ti događaji su očito b_1, b_2 i b_3. Dakle, :

$$A = \{b_1, b_2, b_3\}.$$

Odredimo elementarne događaje povoljne za B *uz uvjet da se dogodio događaj* A. Tvrdimo da su to elementarni događaji b_2 i b_1.

U prvom slučaju gornja stranica je b_1, pa donja stranica nužno mora biti b_2 (jer postoji točno jedna karta čija je jedna stranica b_1). Dakle, i donja stranica je bijele boje.

U drugom slučaju gornja stranica je b_2, pa donja stranica nužno mora biti b_1 (jer postoji točno jedna karta čija je jedna stranica b_2). Dakle, i donja stranica je bijele boje.

U trećem slučaju gornja stranica je b_3, pa donja stranica nužno mora biti c_3 (jer postoji točno jedna karta čija je jedna stranica b_3). Dakle, donja stranica je nužno crnobojna, pa taj slučaj nije povoljan za B.

Tako sada lako nalazimo:

[1] Joseph Louis François Bertrand (1822. – 1900.), francuski matematičar.

$$P(B \mid A) = \frac{\text{card}(B)}{\text{card}(A)} =$$
$$= \frac{2}{3}.$$

Napomena: Klasično (i pogrešno!) „rješenje" ovoga zadatka je sljedeće:

Neka su d i g donja, odnosno gornja strana izvučene karte. Označimo s b i c redom bijelu, odnosno crnu boju. Izvučenu kartu modeliramo kao uređeni par (d, g), pri čemu su $d, g \in \{b, c\}$. *Budući da je gornja strana bijela, skup svih mogućih ishoda je:*

$$\Omega = \{(b,b),(c,b)\}.$$

Skup svih povoljnih ishoda je

$$A = \{(b,b)\}.$$

Dakle, tražena vjerojatnost je jednaka:

$$P(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} =$$
$$= \frac{1}{2}.$$

Upravo u pogrešnosti ovoga rješenja ogleda se (Bertrandov) paradoks jer je većina ljudi sklona smatrati ovo rješenje kao točno. Pokušajte utvrditi pogrešku u gornjem rješenju.

2. Kvar nekoga elektroničkoga uređaja signalizira se svjetlosnim signalom (paljenjem žaruljice), pri čemu se i signalni uređaj može pokvariti. Neka su

$$A = \{\text{uređaj je ispravan}\} \text{ i}$$
$$B = \{\text{žaruljica ne svijetli}\}.$$

Označimo:

$$x := P(A),$$
$$y := P(B),$$
$$z := P(B|A),$$

gdje su $x, y, z \in \langle 0,\ 1 \rangle$.

Interpretirajte sljedeće događaje i izrazite njihovu vjerojatnost pomoću vrijednosti x, y i z:

a) $C = A \cdot B$;

b) $D = A \cdot B^C$;

c) $E = A|B$;

d) $F = A|B^C$.

Rješenje: Iz zadanih podataka slijedi:

$$z = P(B \mid A) = \\ = \frac{P(B \cdot A)}{P(A)} = \\ = \frac{P(A \cdot B)}{x}, \\ P(A \cdot B) = P(B \cdot A) = x \cdot z$$

Tako redom dobivamo:

a) $A \cdot B = \{\text{uređaj je ispravan i žaruljica ne svijetli}\}$;

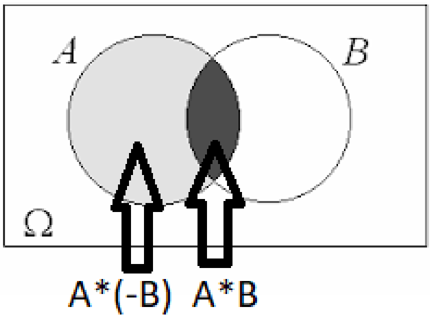
$P(A \cdot B) = x \cdot z$;

b) $A \cdot B^C = \{\text{uređaj je ispravan i žaruljica svijetli}\}$.

Da odredimo vjerojatnost ovoga događaja, primijetimo da za svaka dva događaja A i B vrijedi:

$$A = (A \cap B) \cup \left(A \cap B^C\right),$$
$$A = A \cdot B + A \cdot B^C,$$

pri čemu su događaji $A \cdot B$ i $A \cdot B^C$ međusobno isključivi (vidjeti sliku 1.).



Slika 1.

Prema svojstvu **P4** slijedi

$$P(A) = P(A \cdot B) + P\left(A \cdot B^C\right),$$

odnosno

$$P\left(A \cdot B^C\right) = P(A) - P(A \cdot B) =$$
$$= x - x \cdot z.$$

c) $A \mid B = \{$ako žaruljica ne svijetli, uređaj je ispravan$\}$;

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cdot B)}{P(B)} =$$
$$= \frac{x \cdot z}{y}.$$

d) $A \mid B^C = \{$ako žaruljica svijetli, uređaj je ispravan$\}$,

$$P(A \mid B^C) = \frac{P(A \cdot B^C)}{P(B^C)} =$$
$$= \frac{P(A \cdot B^C)}{1 - P(B)} = .$$
$$= \frac{x - x \cdot z}{1 - y}.$$

3. a) Poznato je da Ferdo i Brunhilda Prekoplotić imaju točno troje djece. Pokažite da su događaji

$A = \{$Ferdo i Brunhilda imaju barem jednoga sina i barem jednu kćerku$\}$ i
$B = \{$Ferdo i Brunhilda imaju najviše jednoga sina$\}$

nezavisni.

b) Bi li isti događaji bili nezavisni ako bi Ferdo i Brunhilda Prekoplotić imali točno dvoje djece? Objasnite svoj odgovor.

Rješenje:

a) Ferdinu i Brunhildinu djecu, naravno, međusobno razlikujemo, pa ih možemo „tretirati“ kao uređene trojke. Radi kratkoće zapisa, umjesto „kćerka“ pišemo K, a umjesto „sin“ S. Tada su:

$$\Omega = \{(K,K,K),(K,K,S),(K,S,K),(S,K,K),(K,S,S),(S,K,S),(S,S,K),(S,S,S)\},$$
$$A = \Omega - \{(K,K,K),(S,S,S)\},$$
$$B = \{(K,K,K),(K,K,S),(K,S,K),(S,K,K)\},$$
$$A \cdot B = \{(K,K,S),(K,S,K),(S,K,K)\}.$$

Tako sada slijedi:

$$P(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{8-2}{8} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4},$$

$$P(B) = \frac{\text{card}(B)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2},$$

$$P(A \cdot B) = \frac{\text{card}(A \cdot B)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{3}{8},$$

pa je očito:

$$P(A \cdot B) = \frac{3}{8} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = P(A) \cdot P(B),$$

što je i trebalo dokazati.

b) Analogno kao u prethodnom podzadatku dobivamo:

$$\left.\begin{array}{l} \Omega = \{(K,K),(K,S),(S,K),(S,S)\}, \\ A = \{(K,S),(S,K)\}, \\ B = \Omega - \{(S,S)\}, \\ A \cdot B = \{(K,S),(S,K)\} = A, \end{array}\right\} \Rightarrow$$
$$P(A \cdot B) = P(A) \neq P(A) \cdot P(B)$$

jer su očito

$$P(A),\ P(B) > 0.$$

Dakle, A i B nisu nezavisni.

4. Motor pokreće električni generator. Vjerojatnost kvara motora tijekom jednoga mjeseca iznosi 6%, a vjerojatnost kvara generatora tijekom jednoga mjeseca 5%. Kvar motora i kvar generatora su međusobno nezavisni. Izračunajte vjerojatnost da će u slučajno odabranom mjesecu trebati popraviti motor ili generator.

Rješenje:

Neka su:

$$G = \{\text{pokvario se generator}\},$$
$$M = \{\text{pokvario se motor}\}.$$

Iz podataka u zadatku slijedi da su

$$P(G) = 5\% = 0.05\,,$$
$$P(M) = 6\% = 0.06.$$

Tražimo vjerojatnost $P(G+M)$. Ta je vjerojatnost jednaka:

$$P(G+M) = P(G) + P(M) - P(G \cdot M).$$

Da bismo je izračunali, potrebna nam je vjerojatnost $P(G \cdot M)$. Prema pretpostavci, događaji G i M su međusobno nezavisni, pa je:

$$\begin{aligned} P(G \cdot M) &= P(G) \cdot P(M) = \\ &= 0.05 \cdot 0.06 = \\ &= 0.003. \end{aligned}$$

Tako dobivamo:

$$\begin{aligned} P(G+M) &= P(G) + P(M) - P(G \cdot M) = \\ &= 0.05 + 0.06 - 0.003 = \\ &= 0.107. \end{aligned}$$

5. Robert Levandowski, Luka Modrić i Edo Šplentrić nezavisno jedan o drugom pucaju "slobodnjake" Dominiku Livakoviću. U prvih je 10 serija udaraca Robert Levandowski postigao 5 zgoditaka, Luka Modrić 7, a Edo Šplentrić 1.

   a) Izračunajte vjerojatnost da u 11. seriji udaraca (koja se izvodi nezavisno u odnosu na prvih 10 serija) točno jedan od njih trojice postigne zgoditak.

   b) Ako je poznato da je u 11. seriji udaraca točno jedan od njih trojice postigao zgoditak, izračunajte vjerojatnost da je to bio Luka Modrić.

   Rješenje: Označimo

   $R :=$ {gol je postigao Robert Lewandowski},
   $L :=$ {gol je postigao Luka Modrić} i
   $E :=$ {gol je postigao Edo Šplentrić}.

   Iz zadanih podataka slijedi:

$$
\begin{aligned}
P(R) &= \frac{5}{10} = \frac{1}{2}, \\
P(L) &= \frac{7}{10}, \\
P(E) &= \frac{1}{10}, \\
P\left(R^C\right) &= 1 - P(R) = \\
&= 1 - \frac{1}{2} = \\
&= \frac{1}{2}, \\
P\left(L^C\right) &= 1 - P(L) = \\
&= 1 - \frac{7}{10} = \\
&= \frac{3}{10}, \\
P\left(E^C\right) &= 1 - P(E) = \\
&= 1 - \frac{1}{10} = \\
&= \frac{9}{10}.
\end{aligned}
$$

a) Označimo:

$A :=$ {točno jedan igrač je postigao zgoditak}.

Tada je:

$A =$ {Robert je postigao zgoditak, a Luka i Edo nisu postigli zgoditak} + {Luka je postigao zgoditak, a Robert i Edo nisu postigli zgoditak} + {Edo je postigao zgoditak, a Robert i Luka nisu postigli zgoditak},

tj.

$$A = R \cdot L^C \cdot E^C + R^C \cdot L \cdot E^C + R^C \cdot L^C \cdot E.$$

Navedena tri pribrojnika se očito međusobno isključuju, a događaji koji ih tvore su međusobno nezavisni (prema pretpostavci). Tako slijedi:

$$P(A) = P(C) \cdot P\left(L^C\right) \cdot P\left(E^C\right) + P\left(C^C\right) \cdot P(L) \cdot P\left(E^C\right) + P\left(C^C\right) \cdot P\left(L^C\right) \cdot P(E) =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{10} \cdot \frac{9}{10} + \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{10} \cdot \frac{9}{10} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{10} =$$
$$= \frac{93}{200}.$$

b) Tražena vjerojatnost jednaka je $P(L \mid A)$. Uočimo da je

$L \cdot A =$ {točno jedan igrač je postigao zgoditak i to je bio Luka} =
= {Luka je postigao zgoditak, a Robert i Edo nisu postigli zgoditak} =
$= R^C \cdot L \cdot E^C$.

Tako odmah dobivamo:

$$P(L \mid A) = \frac{P(A \cdot L)}{P(A)} =$$
$$= \frac{P\left(R^C \cdot L \cdot E^C\right)}{P(A)} =$$
$$= \frac{P\left(R^C\right) \cdot P(L) \cdot P\left(E^C\right)}{P(A)} =$$
$$= \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{7}{10} \cdot \frac{9}{10}}{\frac{93}{200}} =$$
$$= \frac{63}{93} = \frac{21}{31}.$$