2.3. UVJETNA VJEROJATNOST

UVJETNA VJEROJATNOST. NEZAVISNOST DOGAĐAJA.

2.3.1. UVJETNA VJEROJATNOST

- Promatramo sljedeći problem:
- *Poznato je da je u nekom kolu igre* LOTO 7/35 *prvi izvučeni broj bio jednoznamenkast*. *Kolika je vjerojatnost da je taj broj bio prost*?
- Na temelju dosadašnjega iskustva rekli bismo:
- *Ukupan broj mogućih ishoda je* 35. *Ukupan broj povoljnih ishoda jednak je ukupnom broju jednoznamenkastih prostih brojeva*, *a taj broj je jednak* 4. *Zbog toga je tražena vjerojatnost jednaka*

$$p = \frac{4}{35}$$

- Takav zaključak, međutim, **nije** ispravan.
- *Razlog*: Znamo da je prvi izvučeni broj bio jednoznamenkast. Zbog toga je ukupan broj mogućih ishoda slučajnoga pokusa *izvlačenje prvoga broja* jednak 9. (Postoji svega 9 jednoznamenkastih prirodnih brojeva.) Među tih 9 brojeva, njih 4 su prosta: 2, 3, 5 i 7. Zbog toga je tražena vjerojatnost jednaka

$$p = \frac{4}{9}$$

- Ovaj problem tipičan je primjer tzv. *problema uvjetne vjerojatnosti*. Opći oblik toga problema je: *Kolika je vjerojatnost događaja A ako je poznato da se ostvario* (*dogodio*) *događaj B*?

2.3.2. DEFINICIJA UVJETNE VJEROJATNOSTI

- Neka je $(\mathbf{\Omega}, \mathcal{F}, P)$ vjerojatnosni prostor.
- Neka je $B \in \mathcal{F}$ događaj takav da je $P(B) > 0$.
- **Uvjetna vjerojatnost** događaja A *uz uvjet da se dogodio događaj* B je realna funkcija $P_B : \mathcal{F} \to [0, 1]$ definirana formulom

$$P_B(A) := \frac{P(A \cdot B)}{P(B)}, \text{ za svaki } A \in \mathcal{F}$$

- Lako se provjeri da je funkcija P_B doista vjerojatnost.
- **Zapis**: Umjesto $P_B(A)$ pišemo $P(A \mid B)$ i čitamo: *vjerojatnost događaja A uz uvjet B*.

2.3.3. NAPOMENA

- Iz definicije uvjetne vjerojatnosti indukcijom po broju događaja n lako slijedi:

$$P\left(\prod_{k=1}^{n} A_k\right) = \prod_{k=1}^{n} P\left[A_k \mid \prod_{i=1}^{k-1} A_i\right]$$

- Npr. za $n = 3$ dobivamo:

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2 \mid A_1) \cdot P(A_3 \mid A_1 \cdot A_2)$$

- dok za $n = 4$ dobivamo:

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot A_4) = P(A_1) \cdot P(A_2 \mid A_1) \cdot P(A_3 \mid A_1 \cdot A_2) \cdot P(A_4 \mid A_1 \cdot A_2 \cdot A_3)$$

2.3.4. NEZAVISNOST DOGAĐAJA

- Neka je $(\mathbf{\Omega}, \mathcal{F}, P)$ vjerojatnosni prostor.
- Za događaje $A, B \in \mathcal{F}$ kažemo da su **nezavisni** ako vjerojatnost događaja B ne ovisi o ostvaraju događaja A i obrnuto (vjerojatnost događaja A ne ovisi o ostvaraju događaja B).
- Nužan i dovoljan uvjet pomoću kojega se praktično provjerava nezavisnost dvaju događaja je:
  - $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$

2.3.4. NEZAVISNOST DOGAĐAJA

- Netom navedena definicija može se poopćiti.
- Neka je $(\mathbf{\Omega}, \mathcal{F}, P)$ vjerojatnosni prostor i neka je $S = \{A_1, ..., A_n\}$ *konačan* podskup algebre $\mathcal{F}$.
- Kažemo da su događaji $A_1, ..., A_n$ **nezavisni** ako za *svaki* neprazan podskup $I = \{i_1, ..., i_k\} \subseteq [n]$ vrijedi jednakost:
- $$P\left(\prod_{m=i_1}^{i_k} A_m\right) = \prod_{m=i_1}^{i_k} P(A_m)$$

2.3.4. NEZAVISNOST DOGAĐAJA

- Posebno, događaji A, B i $C \in \mathcal{F}$ su nezavisni ako *istodobno* vrijede sve četiri sljedeće jednakosti:
- $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$;
- $P(A \cdot C) = P(A) \cdot P(C)$;
- $P(B \cdot C) = P(B) \cdot P(C)$;
- $P(A \cdot B \cdot C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$.
- **Klasična pogreška**: Događaji A, B i $C \in \mathcal{F}$ su nezavisni ako i samo ako vrijedi jednakost
- $P(A \cdot B \cdot C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$.
- U gornjoj tvrdnji istinit je samo smjer $\Rightarrow$ (što je posljedica definicije), ali smjer $\Leftarrow$ općenito ne mora biti istinit.