1. (*Bertrandov*[1] *paradoks*, 1889.) Na raspolaganju su nam tri različite igraće karte: *crna* (obojena crnom bojom s obje strane), *bijela* (obojena bijelom bojom s obje strane) i *crno-bijela* (obojena crnom bojom s jedne strane, a bijelom bojom s druge strane). Na slučajan način izvučemo točno jednu kartu, stavimo je na stol i utvrdimo da je njezina gornja strana obojena bijelom bojom. Izračunajte vjerojatnost da je i donja strana izvučene karte obojena bijelom bojom.

2. Kvar nekoga elektroničkoga uređaja signalizira se svjetlosnim signalom (paljenjem žaruljice), pri čemu se i signalni uređaj može pokvariti. Neka su $A = \{\text{uređaj je ispravan}\}$ i $B = \{\text{žaruljica ne svijetli}\}$. Označimo: $x := P(A)$, $y := P(B)$, $z := P(B|A)$, gdje su $x, y, z \in \langle 0, 1 \rangle$. Interpretirajte sljedeće događaje i izrazite njihovu vjerojatnost pomoću vrijednosti x, y i z:

a) $C = A \cdot B$;

b) $D = A \cdot B^C$;

c) $E = A|B$;

d) $F = A|B^C$.

3. **a)** Poznato je da obitelj Prekoplotić ima točno troje djece. Pokažite da su događaji $A = \{\text{obitelj ima barem jednoga dječaka i barem jednu djevojčicu}\}$ i $B = \{\text{obitelj ima najviše jednoga dječaka}\}$ nezavisni.

b) Bi li isti događaji bili nezavisni ako bi obitelj Prekoplotić imala točno dvoje djece? Objasnite svoj odgovor.

4. Motor pokreće električni generator. Vjerojatnost kvara motora tijekom jednoga mjeseca iznosi 6%, a vjerojatnost kvara generatora tijekom jednoga mjeseca 5%. Kvar motora i kvar generatora su međusobno nezavisni. Izračunajte vjerojatnost da će u slučajno odabranom mjesecu trebati popraviti motor ili generator.

5. Cristiano Ronaldo, Luka Modrić i Edo Šplentrić nezavisno jedan o drugom pucaju "slobodnjake" Manuelu Neueru. U prvih 10 serija udaraca Cristiano Ronaldo postigao je 5 zgoditaka, Luka Modrić 7, a Edo Šplentrić 1.

a) Izračunajte vjerojatnost da u 11. seriji udaraca (koja se izvodi nezavisno u odnosu na prvih 10 serija) točno jedan od njih trojice postigne zgoditak.

b) Ako je poznato da je u 11. seriji udaraca točno jedan od njih trojice postigao zgoditak, izračunajte vjerojatnost da je to bio Luka Modrić.

[1] Joseph Louis François Bertrand (1822. – 1900.), francuski matematičar.

© mr.sc. Bojan Kovačić, viši predavač

Rezultati zadataka

1. Prema pretpostavci, razlikujemo karte. Neka su c_1 i c_2 strane crne karte, b_1 i b_2 strane bijele karte, a c_3 i b_3 strane crno-bijele karte. Slučajni pokus *određivanje gornje strane izvučene karte* modeliramo prostorom elementarnih događaja $\Omega = \{b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3\}$. Neka su A = {gornja strana izvučene karte je obojena bijelom bojom} i B = {donja strana izvučene karte je obojena bijelom bojom}. Tražimo $P(B \mid A)$. U tu svrhu odredimo:

$$A = \{b_1, b_2, b_3\} \to P(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2},$$

$$B = \{b_2, b_1, c_3\} \to A \cdot B = \{b_2, b_1\} \to P(A \cdot B) = \frac{\text{card}(A \cdot B)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Naime, elementarni događaji povoljni za B su redom b_2, b_1 i c_3. U prvom od tih slučajeva donja stranica je b_1 (dakle, obojena bijelom bojom), u drugom b_1 (dakle, opet obojena bijelom bojom), a u trećem b_3 (opet obojena bijelom bojom). Primjenom definicije uvjetne vjerojatnosti izravno slijedi:

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cdot B)}{P(A)} = \frac{2}{3}.$$

2. Iz zadanih podataka slijedi:

$$z = P(B \mid A) = \frac{P(B \cdot A)}{P(A)} = \frac{P(A \cdot B)}{x} \Rightarrow P(A \cdot B) = P(B \cdot A) = x \cdot z$$

a) $A \cdot B =$ {uređaj je ispravan i žaruljica ne svijetli}; $P(A \cdot B) = x \cdot z$;

b) $A \cdot B^C =$ {uređaj je ispravan i žaruljica svijetli}. Da odredimo vjerojatnost ovoga događaja, primijetimo da za bilo koja dva događaja A i B vrijedi:

$$A = A \cdot \Omega = A \cdot (B + B^C) = A \cdot B + A \cdot B^C.$$

pri čemu su događaji $A \cdot B$ i $A \cdot B^C$ međusobno isključivi. Prema svojstvu **P4** slijedi:

$$P(A) = P(A \cdot B) + P(A \cdot B^C),$$

odnosno

$$P\left(A \cdot B^C\right) = P(A) - P(A \cdot B) = x - x \cdot z.$$

c) $A \mid B =$ {ako žaruljica ne svijetli, uređaj je ispravan}; $P(A \mid B) = \frac{P(A \cdot B)}{P(B)} = \frac{x \cdot z}{y}$;

d) $A \mid B^C =$ {ako žaruljica svijetli, uređaj je ispravan}, $P(A \mid B^C) = \frac{P(A \cdot B^C)}{P(B^C)} = \frac{P(A \cdot B^C)}{1 - P(B)} = \frac{x - x \cdot z}{1 - y}$.

3. a) Pretpostavimo najprije da obitelj Prekoplotić ima točno troje djece. Djecu, naravno, međusobno razlikujemo, pa ih možemo „tretirati“ kao uređene trojke. Svako dijete može biti ili dječak ili djevojčica, pa je ukupan broj mogućih ishoda jednak ukupnom broju 3–permutacija s ponavljanjem dvočlanoga skupa. Taj je broj jednak $\overline{P}(2,3) = 2^3 = 8$. Dakle, $\text{card}(\Omega) = 8.$

Da bismo pokazali nezavisnost događaja A i B dovoljno je dokazati jednakost $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$. U tu svrhu računamo vjerojatnosti $P(A), P(B)$ i $P(A \cdot B)$.

Odredimo $P(A)$. Očito je $A^C = \{$obitelj nema niti jednoga dječaka ili niti jednu djevojčicu$\}$ = $\{$obitelj nema niti jednoga dječaka$\}$ + $\{$obitelj nema niti jednu djevojčicu$\}$ = $\{$sva djeca su djevojčice$\}$ + $\{$sva djeca su dječaci$\}$, pa slijedi $\text{card}\left(A^C\right) = 1 + 1 = 2,$ odnosno $\text{card}(A) = \text{card}(\Omega) - \text{card}\left(A^C\right) = 8 - 2 = 6.$ Zbog toga je

$$P(A) = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}.$$

Odredimo $P(B)$. Očito je B = $\{$obitelj ima točno jednoga dječaka$\}$ + $\{$obitelj nema niti jednoga dječaka$\}$. Prvi od tih događaja sastoji se od točno tri elementarna događaja (jer na tri različita načina možemo izabrati koja će od tri komponente uređene trojke djece biti dječak, čime smo jednoznačno odredili „vrijednosti“ preostalih dviju komponenata). Drugi od tih događaja već smo razmotrili u izračunu $P(A)$ i vidjeli da sadrži točno jedan elementaran događaj. Dakle, ukupan broj elementarnih događaja povoljnih za događaj B jednak je $3 + 1 = 4,$ pa je:

$$P(B) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}.$$

Preostaje odrediti $P(A \cdot B)$. Događaj $A \cdot B$ znači da obitelj ima točno jednoga dječaka (obrazložite!). U izračunu vjerojatnosti $P(B)$ vidjeli smo da je broj elementarnih događaja povoljnih za događaj $\{$obitelj ima točno jednoga dječaka$\}$ jednak 3, pa je $\text{card}(A \cdot B) = 3$, odnosno

$$P(A \cdot B) = \frac{3}{8}.$$

Sada se lako pokaže da vrijedi jednakost $P(A) \cdot P(B) = P(A \cdot B)$, čime je tvrdnja dokazana.

b) Pretpostavimo da obitelj Prekoplotić ima točno dvoje djece. Lako se vidi da tada vrijedi jednakost A = $\{$obitelj ima točno jednoga dječaka$\}$, pa vrijedi inkluzija $A \subset B$. No, tada je $A \cap B = A$, pa je nezavisnost događaja A i B ekvivalentna valjanosti jednakosti $P(A) = P(A) \cdot P(B)$. Očito je $P(A) > 0$ (jer događaj A nije nemoguć), pa dijeljenjem s $P(A)$ dobijemo $P(B) = 1$, odnosno $B = \Omega$, što je očito netočno (npr. $B_1 := \{$obitelj ima dva dječaka$\} \subset \Omega$, ali $B_1 \not\subset B$). Zbog toga A i B nisu nezavisni događaji.

4. Neka su G = $\{$pokvario se generator$\}$ i M = $\{$pokvario se motor$\}$. Iz podataka u zadatku slijedi da su $P(G) = 5\% = 0.05$ i $P(M) = 6\% = 0.06.$ Tražimo vjerojatnost $P(G + M)$. Da bismo je izračunali, potrebna nam je vjerojatnost $P(G \cdot M).$ Prema pretpostavci, događaji G i M su međusobno nezavisni, pa je $P(G \cdot M) = P(G) \cdot P(M) = 0.05 \cdot 0.06 = 0.003$. Tako dobivamo:

$$P(G + M) = P(G) + P(M) - P(G \cdot M) = 0.05 + 0.06 - 0.003 = 0.107.$$

5. Označimo $C :=$ {gol je postigao Cristiano Ronaldo}, $L :=$ {gol je postigao Luka Modrić} i $E :=$ {gol je postigao Edo Šplentrić}. Iz zadanih podataka slijedi:

$$P(C) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2},\ P(L) = \frac{7}{10},\ P(E) = \frac{1}{10},$$
$$P(C^C) = \frac{1}{2},\ P(L^C) = \frac{3}{10},\ P(E^C) = \frac{9}{10}.$$

a) Označimo $A :=$ {točno jedan igrač postigao je zgoditak}. Tada je $A =$ {Cristiano Ronaldo je postigao zgoditak, a Luka Modrić i Edo Šplentrić nisu postigli zgoditak} + {Luka Modrić je postigao zgoditak, a Cristiano Ronaldo i Edo Šplentrić nisu postigli zgoditak} + {Edo Šplentrić je postigao zgoditak, a Cristiano Ronaldo i Luka Modrić nisu postigli zgoditak} $= C \cdot L^C \cdot E^C + C^C \cdot L \cdot E^C + C^C \cdot L^C \cdot E.$ Navedena tri pribrojnika se očito međusobno isključuju, a događaji koji ih tvore su međusobno nezavisni. Tako slijedi:

$$P(A) = P(C) \cdot P(L^C) \cdot P(E^C) + P(C^C) \cdot P(L) \cdot P(E^C) + P(C^C) \cdot P(L^C) \cdot P(E) =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{10} \cdot \frac{9}{10} + \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{10} \cdot \frac{9}{10} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{10} = \frac{93}{200}.$$

b) Tražena vjerojatnost jednaka je $P(L \mid A)$, pa odmah dobivamo:

$$P(L \mid A) = \frac{P(A \cdot L)}{P(A)} = \frac{P(C^C \cdot L \cdot E^C)}{P(A)} = \frac{P(C^C) \cdot P(L) \cdot P(E^C)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{7}{10} \cdot \frac{9}{10}}{\frac{93}{200}} = \frac{63}{93} = \frac{21}{31}.$$