2.4.

DETERMINANTA MATRICE. REGULARNE MATRICE

2.4.1. DETERMINANTA MATRICE

- I u ovoj točki promatramo određena svojstva *realnih* matrica.
- Radi jednostavnijega ispitivanja svojstava *kvadratnih* matrica, svakoj kvadratnoj matrici obično se pridružuje realan broj koji se naziva *determinanta* te matrice.
- Svrha takvoga pridruživanja je dobiti određene informacije o nekim svojstvima te matrice.
- U općem je slučaju pojam determinante vrlo složeno definirati formulom/pravilom.
- Zbog toga ćemo se ograničiti na slučajeve matrica reda 2 i reda 3.

2.4.2. DETERMINANTA MATRICE REDA 2

- Determinanta matrice reda 2 (kraće: determinanta reda 2) je *funkcija* $d : \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ definirana pravilom:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} := d\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\right) = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$$

- Vrijednost determinante reda 2 može biti *bilo koji* realan broj.

2.4.3. DETERMINANTA MATRICE REDA 3

- *Determinanta* matrice reda 3 (kraće: *determinanta reda* 3) je funkcija $d : \mathrm{M}_3(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ definirana pravilom:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} := d\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\right) =$$

$$= a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - (a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13} + a_{32} \cdot a_{23} \cdot a_{11} + a_{33} \cdot a_{21} \cdot a_{12})$$

- I vrijednost determinante reda 3 može biti bilo koji realan broj.
- Ako je iz konteksta jasno na što se misli, umjesto „vrijednost determinante" kraće (i nepreciznije!) se govori samo „determinanta".

2.4.4. LAPLACEOV RAZVOJ DETERMINANTE

- *Determinanta reda* n je zapravo funkcija koja matrici A reda n pridružuje neki realan broj.
- Takve se determinante najčešće računaju tzv. *Laplaceovim razvojem*.
- Ideja Laplaceova razvoja je svesti računanje determinanti reda n na računanje točno n determinanti reda $(n-1)$.

2.4.5. ALGORITAM LAPLACEOVA RAZVOJA DETERMINANTE

- **Ulaz:** determinanta reda n
- **Izlaz:** vrijednost determinante reda n
- **Korak 1.** Elementu na presjeku prvoga retka i prvoga stupca pridružiti predznak +. Krećući se prema kraju retka, ostalim elementima naizmjence pridružiti predznake – i +. Kad se dođe do kraja jednoga retka, prijeći na element u presjeku sljedećega retka i prvoga stupca nastavljajući naizmjenično pridruživanje predznaka – i + (kao da su svi brojevi u istom retku).
- **Korak 2.** Odabrati redak/stupac po kojemu se želi razviti determinanta.
- **Korak 3.** *Svakom* elementu u odabranom retku/stupcu pridružiti determinantu koja se dobije kad se iz početne determinante izostave cijeli redak i cijeli stupac kojemu pripada dotični element.

2.4.5. ALGORITAM LAPLACEOVA RAZVOJA DETERMINANTE

- **Korak 4.** Za svaki element u odabranom retku/stupcu izračunati umnožak toga elementa i pridružene determinante. Umnošku pridružiti predznak dotičnoga elementa dobiven u Koraku 1.
- **Korak 5.** Zbrojiti sve umnoške dobivene u Koraku 4. pazeći na pripadne predznake. Dobiveni rezultat jednak je vrijednosti polazne determinante.
- **Napomena**: Praktično je najjednostavnije birati one retke/stupce u kojima se pojavljuje najveći broj nula ili u kojima se pojavljuju (prema kriteriju apsolutne vrijednosti) što manji realni brojevi.

2.4.6. NEKA KORISNA SVOJSTVA DETERMINANTE

- 1. Ako je jedan redak/stupac determinante nulredak/nulstupac, vrijednost determinante jednaka je nuli.
- 2. Ako determinanta sadrži barem dva jednaka retka i/li barem dva jednaka stupca, njezina vrijednost jednaka je nuli.
- **Oprez**: Tvrdnja nije točna u slučaju u kojemu se podudaraju jedan redak i jedan stupac.
- 3. Zamjenom dvaju redaka ili stupaca determinante mijenja se njezin predznak.
- **Oprez**: Retke nije dozvoljeno zamijeniti sa stupcima ili obrnuto.
- 4. Dodavanjem jednoga retka/stupca determinante nekom drugom retku/stupcu determinante njezina se vrijednost neće promijeniti.

2.4.6. NEKA KORISNA SVOJSTVA DETERMINANTE

- 5. Pomnožimo li *svaki* element nekoga retka/stupca nekim realnim brojem različitim od nule, pa tako dobiven redak/stupac dodamo nekom drugom retku/stupcu, vrijednost determinante se neće promijeniti.
- 6. *Glavnom dijagonalom* determinante reda n nazivamo skup $\{a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}\}$. Ako je pripadna matrica gornja trokutasta ili donja trokutasta, onda je determinanta jednaka umnošku svih elemenata na glavnoj dijagonali:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

2.4.7. BINET-CAUCHYJEV TEOREM

- Za bilo koje dvije kvadratne matrice A i B istoga reda vrijedi sljedeća jednakost:
- $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$.
- Ova jednakost poznata je kao *Binet-Cauchyjev teorem*.
- Može se pokazati da vrijedi jednakost:
- $\det(A^n) = (\det(A))^n, \ \forall n \in \mathbb{N}$.

2.4.8. INVERZ MATRICE

- Neka je A matrica reda n.
- Ako postoji matrica B takva da vrijedi jednakost
- $A \cdot B = B \cdot A = E$,
- kažemo da je B matrica inverzna matrici A (ili kraće: inverz matrice A).
- Standardna oznaka za inverz matrice A je A^{-1}.

2.4.9. NAPOMENE

- 1. Ako postoji, inverz matrice reda n je (također) matrica reda n.
- 2. Iz definicije inverza matrice izravno slijedi da je inverz matrice A^{-1} matrica A, tj. vrijedi jednakost:
- $(A^{-1})^{-1} = A$.
- 3. Ako inverz matrice uopće postoji, onda je on jedinstven.

2.4.10. REGULARNA MATRICA

- Svaku matricu reda n koja ima inverz nazivamo **regularna matrica**.
- Za takvu matricu kažemo i da je **invertibilna**.
- Matricu reda n koja nije regularna nazivamo **singularna matrica**.
- **Problem:** Ispitati je li neka matrica regularna i, ako jest, odrediti njezin inverz.

2.4.11. KRITERIJ REGULARNOSTI MATRICE

- Teorem 1. Kvadratna matrica A je regularna ako i samo ako je njezina determinanta različita od nule.
- Korolar 1. Kvadratna matrica A je singularna ako i samo ako je njezina determinanta jednaka 0.
- Pravilo: Ispitati regularnost matrice $\Leftrightarrow$ izračunati njezinu determinantu i utvrditi je li ona različita od 0.
- Ako jest, matrica je regularna.
- Ako nije, matrica je singularna.

2.4.12. ELEMENTARNE TRANSFORMACIJE

- U svrhu lakšega određivanja inverza regularne matrice definiramo sljedeće *elementarne transformacije* nad recima te matrice:
- 1. Množenje *bilo kojega* retka matrice realnim brojem različitim od nule.
- 2. Zamjena dvaju redaka matrice.
- 3. Dodavanje jednoga retka matrice drugom retku i pisanje dobivenoga zbroja u taj drugi redak.
- 1. i 3. objedinjujemo u:
- 4. Množenje jednoga retka matrice nekim realnim brojem različitim od nule i dodavanje tako dobivenoga retka drugom retku matrice. (Rezultat pišemo u tom drugom retku.)

2.4.13. ODREĐIVANJE INVERZA MATRICE POMOĆU ELEMENTARNIH TRANSFORMACIJA

- Pretpostavka: A regularna matrica reda n
- Korak 1. Formirati matricu $C = \left[A \quad | \quad E_n \right]$.
- Korak 2. Elementarnim transformacijama **nad recima** matrice C svesti tu matricu na oblik

$$D = \left[E_n \quad | \quad B \right].$$

- .
- Korak 3. Matrica B je inverz matrice A.
- Oprez: U Koraku 2. **nisu** dozvoljene elementarne transformacije nad stupcima matrice C!
- Za velike n ovaj postupak je bitno brži i jednostavniji od "klasičnoga" postupka određivanja inverza pomoću tzv. *adjunkte*.

2.4.14. NAPOMENE

- Za svake dvije regularne matrice A i B reda n, te svaki $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ vrijede sljedeće jednakosti:

$$\textbf{a)}\ \det\left(A^{-1}\right) = \frac{1}{\det(A)};$$

$$\textbf{b)}\ (A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1};$$

$$\textbf{c)}\ (\alpha \cdot A)^{-1} = \frac{1}{\alpha} \cdot A^{-1};$$

$$\textbf{d)}\ \left(A^{-1}\right)^{T} = \left(A^{T}\right)^{-1}.$$

2.4.15. RJEŠAVANJE CRAMEROVIH SUSTAVA POMOĆU INVERZA MATRICE

- Jedna od tipičnih primjena inverza matrice odnosi se na rješavanje tzv. *Cramerovih sustava*. To su sustavi od n linearnih jednadžbi s n nepoznanica koji imaju jedinstveno rješenje.
- Osnovna ideja je sustavu

$$\begin{aligned} &a_{11} \cdot x_1 + \ldots + a_{1n} \cdot x_n = b_1 \\ &\vdots \\ &a_{n1} \cdot x_1 + \ldots + a_{nn} \cdot x_n = b_n \end{aligned}$$

- pridružiti matrice

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix},$$

- pa zapisati taj sustav u obliku: $A \cdot X = B$.
- Ako je sustav Cramerov, onda je matrica A regularna, pa množenjem gornje jednakosti slijeva s A^{-1} dobivamo:
- $X = A^{-1} \cdot B$.

2.4.16. NAPOMENA

- Opisana metoda „funkcionira” samo za Cramerove sustave, a praktična je za sustave s relativno malim brojem nepoznanica.
- Bilo koji sustav od m linearnih jednadžbi s n nepoznanica najčešće se rješava tzv. *Gauss – Jordanovom metodom.*
- Ona u svojoj osnovi ima elementarne transformacije iz točke 2.4.12.
- Detaljnije o načinima rješavanja linearnih sustava uči se u predmetu *Numerička matematika* (4. semestar).

1. Zadana je determinanta

$$D=\begin{vmatrix} \sin x & 2\cdot\cos x & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ \cos x & 1 & 2\cdot\sin x \end{vmatrix}.$$

a) Odredite najmanju i najveću vrijednost determinante *D*.

b) Za koje $x\in\mathbb{R}$ se postiže najmanja vrijednost determinante *D*?

c) Za koje $x\in\mathbb{R}$ se postiže najveća vrijednost determinante *D*?

Rješenje: a) Razvojem po drugom retku determinante imamo redom:

$$\begin{aligned} D&=\begin{vmatrix} \sin x & 2\cdot\cos x & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ \cos x & 1 & 2\cdot\sin x \end{vmatrix}= \\ &=1\cdot\begin{vmatrix} \sin x & 0 \\ \cos x & 2\cdot\sin x \end{vmatrix}-1\cdot\begin{vmatrix} \sin x & 2\cdot\cos x \\ \cos x & 1 \end{vmatrix}= \\ &=\sin x\cdot 2\cdot\sin x-0\cdot\cos x-(\sin x\cdot 1-2\cdot\cos x\cdot\cos x)= \\ &=2\cdot\sin^2 x-\sin x+2\cdot\cos^2 x= \\ &=2\cdot(\sin^2 x+\cos^2 x)-\sin x=2\cdot 1-\sin x=2-\sin x. \end{aligned}$$

Za svaki $x\in\mathbb{R}$ vrijedi $-1\le\sin x\le 1$. Množenjem te nejednakosti s (–1) dobivamo $-1\le-\sin x\le 1$. Svakoj strani ove nejednakosti dodamo 2, pa dobijemo:

$$\begin{aligned} &-1+2\le-\sin x+2\le 1+2, \\ &1\le D\le 3, \\ &D\in[1,3]. \end{aligned}$$

Dakle, najmanja vrijednost determinante *D* jednaka je 1, a najveća 3.

b) Vrijednost determinante *D* jednaka je 1 ako i samo je $\sin x=1$. Odavde slijedi:

$$x=\frac{\pi}{2}+2\cdot k\cdot\pi=(4\cdot k+1)\cdot\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}.$$

c) Vrijednost determinante *D* jednaka je 3 ako i samo je $\sin x=-1$. Odavde slijedi:

$$x=\frac{-\pi}{2}+2\cdot k\cdot\pi=(4\cdot k-1)\cdot\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}.$$

2. Odredite sve $a \in \mathbb{R}$ za koje je matrica A regularna ako je:

a) $A = \begin{bmatrix} a-1 & 3 \\ 5 & a+1 \end{bmatrix}$;

b) $A = \begin{bmatrix} a & 0 & -a \\ a^2 & 1 & a^3 \\ 2 & 0 & 1-a \end{bmatrix}$.

Rješenje: Matrica A je regularna ako i samo ako je njezina determinanta različita od nule. Zbog toga ćemo traženi skup dobiti tako da iz skupa $\mathbb{R}$ „izbacimo“ sve realne brojeve za koje je determinanta matrice A jednaka nuli.

a) $\det(A) = \begin{vmatrix} a-1 & 3 \\ 5 & a+1 \end{vmatrix} =$

$= (a-1)\cdot(a+1) - 5\cdot 3 =$

$= a^2 - 1 - 15 =$

$= a^2 - 16,$

$a^2 - 16 = 0,$

$a_1 = -4,\ a_2 = 4 \Rightarrow$

$S = \mathbb{R} \setminus \{-4, 4\}.$

b) $\det(A) = \begin{vmatrix} a & 0 & -a \\ a^2 & 1 & a^3 \\ 2 & 0 & 1-a \end{vmatrix} =$

$= 1 \cdot \begin{vmatrix} a & -a \\ 2 & 1-a \end{vmatrix} =$

$= a\cdot(1-a) - 2\cdot(-a) =$

$= a - a^2 + 2\cdot a =$

$= a - a^2,$

$-a^2 + a = 0,$

$a_1 = 0,\ a_2 = 1 \Rightarrow$

$S = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}.$

3. Neka je $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ regularna matrica. Dokažite da je tada:

$$A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}\cdot\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Rješenje: Treba provjeriti jednakosti

$$A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=E.$$

Imamo redom:

$$\begin{aligned}
A\cdot A^{-1}&=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\cdot\left(\frac{1}{\det(A)}\cdot\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}\right)=\\
&=\frac{1}{\det(A)}\cdot\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}\right)=\\
&=\frac{1}{\det(A)}\cdot\begin{bmatrix} a\cdot d-b\cdot c & -a\cdot b+b\cdot a \\ c\cdot d-d\cdot c & -b\cdot c+d\cdot a \end{bmatrix}=\\
&=\frac{1}{\det(A)}\cdot\begin{bmatrix} \det(A) & 0 \\ 0 & \det(A) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=E.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A^{-1}\cdot A&=\left(\frac{1}{\det(A)}\cdot\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}\right)\cdot\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=\\
&=\frac{1}{\det(A)}\cdot\left(\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right)=\\
&=\frac{1}{\det(A)}\cdot\begin{bmatrix} d\cdot a-b\cdot c & d\cdot b-b\cdot d \\ -c\cdot a+a\cdot c & -c\cdot b+a\cdot d \end{bmatrix}=\\
&=\frac{1}{\det(A)}\cdot\begin{bmatrix} \det(A) & 0 \\ 0 & \det(A) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=E.
\end{aligned}$$

Primjedba 1. Budući da je A, prema pretpostavci zadatka, regularna matrica, to znači da je $\det(A)\neq 0$. Zbog toga tu nejednakost nismo posebno isticali prilikom rješavanja zadatka.

Primjedba 2. Ne postoji neka dovoljno jednostavna formula za inverz regularne matrice reda jednakoga ili većega od 3. Zbog toga se taj inverz određuje pomoću elementarnih transformacija (preporučljivija varijanta) ili adjunkte (bitno sporija varijanta, naročito u slučaju matrica relativno velikih redova).

4. Ispitajte jesu li sljedeće matrice regularne i, ako jesu, odredite njihov inverz:

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$;

b) $B = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$.

Rješenje: Matrica je regularna ako i samo ako je njezina determinanta različita od nule. U tom slučaju postoji njezin inverz i on je jedinstven.

a) $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} =$

$= 1 \cdot 1 - 0 \cdot (-1) =$

$= 1 \Rightarrow$

A je regularna.

$$A^{-1} = \frac{1}{1} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

b) $\det(B) = \begin{vmatrix} 2 & 7 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} =$

$= (-1) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} =$

$= (-1) \cdot (2 \cdot 3 - 1 \cdot 7) =$

$= 1 \Rightarrow$

B je regularna.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 7 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{I. \leftrightarrow III.}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \overset{I.+II.\to II.}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 7 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \overset{(-2)\cdot I.+III.\to III.}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right] \overset{II.\leftrightarrow III.}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \overset{(-3)\cdot II+I\to I}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \overset{(-5)\cdot II+III\to III}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 1 & 11 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & -2 \\ -5 & 1 & 11 \end{bmatrix}.$$

5. Odredite matricu A ako je $\left(2\cdot A^{-1}\right)^T=\begin{bmatrix}-2 & 4\\ 3 & -7\end{bmatrix}$.

Rješenje: Označimo

$$B:=\begin{bmatrix}-2 & 4\\ 3 & -7\end{bmatrix}.$$

Iz jednakosti $\left(2\cdot A^{-1}\right)^T=B$ izrazimo matricu A. Imamo redom:

$$\begin{aligned}
&\left(2\cdot A^{-1}\right)^T=B,\\
&\left(\left(2\cdot A^{-1}\right)^T\right)^T=B^T,\\
&2\cdot A^{-1}=B^T,\\
&A^{-1}=\frac{1}{2}\cdot B^T,\\
&\left(A^{-1}\right)^{-1}=\left(\frac{1}{2}\cdot B^T\right)^{-1},\\
&A=\left(\frac{1}{2}\cdot B^T\right)^{-1}=\\
&\quad=\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}\cdot\left(B^T\right)^{-1}=\\
&\quad=2\cdot\left(\begin{bmatrix}-2 & 4\\ 3 & -7\end{bmatrix}^T\right)^{-1}=\\
&\quad=2\cdot\left(\begin{bmatrix}-2 & 3\\ 4 & -7\end{bmatrix}\right)^{-1}=\\
&\quad=2\cdot\frac{1}{(-2)\cdot(-7)-4\cdot 3}\cdot\begin{bmatrix}-7 & -3\\ -4 & -2\end{bmatrix}=\\
&\quad=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\begin{bmatrix}-7 & -3\\ -4 & -2\end{bmatrix}=\\
&\quad=\begin{bmatrix}-7 & -3\\ -4 & -2\end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

6. Zadane su matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$. Riješite jednadžbu $A \cdot X = B$.

Rješenje: Pomnožimo zadanu jednadžbu slijeva s A^{-1}. Dobijemo:

$$A^{-1} \cdot (A \cdot X) = A^{-1} \cdot B,$$
$$(A^{-1} \cdot A) \cdot X = A^{-1} \cdot B,$$
$$E \cdot X = A^{-1} \cdot B,$$
$$X = A^{-1} \cdot B.$$

Tako sada imamo:

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 8 \end{bmatrix} =$$
$$= \frac{1}{1 \cdot 1 - 2 \cdot 0} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 8 \end{bmatrix} =$$
$$= 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + 0 \cdot 5 & 1 \cdot 2 + 0 \cdot 8 \\ (-2) \cdot 1 + 1 \cdot 5 & (-2) \cdot 2 + 1 \cdot 8 \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

7. Zadane su matrice $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ i $B=\begin{bmatrix} -3 & 10 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$. Riješite jednadžbu: $X \cdot A = B$.

Rješenje: Pomnožimo zadanu jednadžbu zdesna s A^{-1}. Dobijemo:

$$\begin{aligned}
&(X \cdot A) \cdot A^{-1} = B \cdot A^{-1}, \\
&X \cdot (A \cdot A^{-1}) = B \cdot A^{-1}, \\
&X \cdot E = B \cdot A^{-1}, \\
&X = B \cdot A^{-1}.
\end{aligned}$$

Tako sada imamo:

$$\begin{aligned}
X &= \begin{bmatrix} -3 & 10 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \\
&= \begin{bmatrix} -3 & 10 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \left(\frac{1}{0 \cdot 2 - (-1) \cdot 1} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right) = \\
&= 1 \cdot \begin{bmatrix} -3 & 10 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} (-3) \cdot 2 + 10 \cdot 1 & (-3) \cdot (-1) + 10 \cdot 0 \\ (-1) \cdot 2 + 4 \cdot 1 & (-1) \cdot (-1) + 4 \cdot 0 \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$