

2.4. BAYESOVA FORMULA.

FORMULA POTPUNE VJEROJATNOSTI.

BAYESOVA FORMULA.

BERNOULLIJEVA SHEMA.

2.4.1. POTPUNI SUSTAV DOGAĐAJA

- Neka je (Ω, \mathcal{F}, P) vjerojatnosni prostor.
(Možemo pretpostaviti da je $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$.)
- **Potpuni sustav događaja** je *konačan* skup $A = \{A_1, \dots, A_n\} \subseteq \mathcal{F}$ takav da istodobno vrijedi:
 - 1.) $(i \neq j) \Rightarrow (A_i \cdot A_j = \emptyset);$
 - 2.) $\sum_{i=1}^n A_i = \Omega;$
 - 3.) $\sum_{i=1}^n P(A_i) = 1.$

2.4.2. PRIMJER 1.

- Promatramo slučajni pokus *izvlačenje prvoga broja u jednom kolu igre LOTO 7/35*.
- Svih 35 elementarnih događaja (navedite ih!) tvore jedan potpuni sustav događaja.
- Takav je sustav tehnički malo zahtjevnije ispisati, pa zbog toga tražimo “manje” potpune sustave događaja, tj. skupove A sa što manjim kardinalitetom.

2.4.3. FORMULA POTPUNE VJEROJATNOSTI

- Neka su (Ω, \mathcal{F}, P) vjerojatnosni prostor, $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_n\}$ potpuni sustav događaja iz \mathcal{F} i $B \in \mathcal{F}$.
- Promotrimo presjeke događaja B sa *svakim* elementom sustava \mathcal{A} . To su događaji $B_1 := B \cdot A_1, \dots, B_n := B \cdot A_n$.
- Događaji B_1, \dots, B_n su međusobno isključivi (presjek im je prazan skup) jer bi u suprotnom neka dva elementa sustava \mathcal{A} imala neprazan presjek, što je nemoguće prema definiciji potpunoga sustava događaja.
- Unija svih događaja B_1, \dots, B_n je događaj B .
- Tako smo događaj B rastavili na *konačnu* uniju međusobno isključivih događaja. (Ta unija je konačna jer je \mathcal{A} konačan skup prema definiciji potpunoga sustava događaja.)

2.4.3. FORMULA POTPUNE VJEROJATNOSTI

- Tako je $P(B) = \sum_{i=1}^n P(B \cdot A_i)$.
- Prema formuli za uvjetnu vjerojatnost je:
- $$P(B \cdot A_i) = P(A_i) \cdot P(B | A_i)$$
- Uvrštavanjem u izraz za $P(B)$ dobivamo tzv. **formulu potpune vjerojatnosti**:

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i) \cdot P(B | A_i)$$

- Formulu potpune vjerojatnosti podesno je primijeniti u slučajevima kad elementi potpunoga sustava povlače neki događaj iz algebre događaja (i kad se mogu izračunati ili kad su unaprijed zadane sve pripadne uvjetne vjerojatnosti).

2.4.4. BAYESOVA FORMULA

- Dosad smo razmatrali određivanje vjerojatnosti događaja $A \in \mathcal{F}$ u slučaju kad je taj događaj bio posljedica svake hipoteze iz zadanoga potpunoga sustava događaja.
- Sada ćemo promotriti obrnut problem: kako odrediti vjerojatnost da je $A \in \mathcal{F}$ uzrokovao neku hipotezu iz zadanoga potpunoga sustava događaja?
- Neka su (Ω, \mathcal{F}, P) vjerojatnosni prostor, $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_n\}$ potpuni sustav događaja iz \mathcal{F} i $B \in \mathcal{F}$.
- Prema formuli uvjetne vjerojatnosti vrijedi:

$$P(A_i | B) = \frac{P(A_i \cdot B)}{P(B)} = \frac{P(A_i) \cdot P(B | A_i)}{P(B)}, \text{ za svaki } i \in [n].$$

2.4.4. BAYESOVA FORMULA

- Prema formuli potpune vjerojatnosti vrijedi:

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i) \cdot P(B | A_i)$$

- Uvrstimo li ovu jednakost u prethodnu, dobivamo tzv. **Bayesovu formulu**:

$$P(A_i | B) = \frac{P(A_i \cdot B)}{P(B)} = \frac{P(A_i) \cdot P(B | A_i)}{\sum_{j=1}^n P(A_j) \cdot P(B | A_j)}, \text{ za svaki } i \in [n].$$

2.4.5. NAPOMENA

- Elemente potpunoga sustava događaja nazivamo **hipoteze**. Dakle, skup Ω možemo jednoznačno zadati i navođenjem svih hipoteza.
- **Ponovimo:** formula potpune vjerojatnosti opisuje računanje vjerojatnosti događaja A ako znamo vjerojatnost svake hipoteze i (uvjetnu) vjerojatnost događaja A ako se dogodi svaka hipoteza.
- Bayesova formula opisuje računanje uvjetne vjerojatnosti *hipoteze* uz uvjet da se dogodio neki događaj iz algebre događaja.
- Za njezinu primjenu najprije moramo primijeniti formulu potpune vjerojatnosti. (Obrat ne vrijedi.)

2.4.6. BERNOULLIJEVA SHEMA

- Pretpostavimo da neki slučajan pokus s *točno dva* moguća ishoda (npr. rođenje djeteta) slučajno i nezavisno ponavljamo ukupno n puta. (*Nezavisno* znači da ishod *i-te* izvedbe pokusa ne ovisi niti o jednoj drugoj izvedbi toga pokusa.)
- Odaberimo točno jedan ishod pokusa i nazovimo ga *uspjeh*. Preostali ishod pokusa nazovimo *neuspjeh*.
- Neka je p vjerojatnost pojave *uspjeha* u jednom slučajnom pokusu. Tada je vjerojatnost pojave *neuspjeha* u istom slučajnom pokusu jednaka $q := 1 - p$.
- Ovako dobivenu shemu nazivamo **Bernoullijeva shema**.

2.4.6. BERNOULLIJEVA SHEMA

- Vjerojatnost da se u n izvedbi slučajnoga pokusa dogodi točno k uspjeha jednaka je
- $$p_k = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k} = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$
- Ovu je vjerojatnost za velike vrijednosti varijable n vrlo teško izračunati, pa ćemo u drugom dijelu predmeta izvesti formule kojima ćemo aproksimirati te vjerojatnosti (tzv. *granični teoremi u Bernoullijevoj shemi*).