

2.4. HARMONIJSKA ANALIZA

RAZVOJ PERIODIČNE FUNKCIJE
U FOURIEROV RED

2.4.1. POJAM HARMONIJSKE ANALIZE

- **Podsjetnik:** Kažemo da je realna funkcija f *periodična s temeljnim periodom* $T > 0$ ako je
- $\min\{t > 0: (\forall x \in D(f)) (f(x + t) = f(x))\} = T$.
- Tipični primjeri periodičnih funkcija su trigonometrijske funkcije. Temeljni period funkcija $\sin x$ i $\cos x$ jednak je $2 \cdot \pi$, a temeljni period funkcija $\operatorname{tg} x$ i $\operatorname{ctg} x$ jednak je π .
- U mnogim tehničkim problemima nameće se potreba da se relativno složena periodična funkcija aproksimira *zbrojem trigonometrijskih funkcija* (tj. relativno jednostavnim harmonijskim titranjima).
- Problemima određivanja ovakvih aproksimacija, te algoritmima za rješavanje takvih problema bavi se *harmonijska analiza*.

2.4.2. DIRICHLETOVI UVJETI

- U općem slučaju (tj. za bilo koju periodičku funkciju) pitanje njezine aproksimacije zbrojem trigonometrijskih funkcija još uvijek nije potpuno riješeno.
- U praktički najvažnijim slučajevima problem aproksimacije riješen je za funkcije koje zadovoljavaju tzv. Dirichletove uvjete.
- **Pretpostavka:** Zadana je funkcija $f: [-l, l] \rightarrow \mathbb{R}$.
- **Uvjet 1.** Funkcija f ima konačno mnogo točaka prekida i ti prekidi su prekidi prve vrste (tzv. “*skokovi*”).
- **Uvjet 2.** f je po dijelovima monotona, tj. f ima konačno mnogo strogih lokalnih ekstrema na segmentu $[-l, l]$.
- Uvjeti 1. i 2. nazivaju se *Dirichletovi* uvjeti. Oni se odnose *isključivo* na segment $[-l, l]$.
- Primijetimo da, prema definiciji periodične funkcije, navedeni segment *nije prirodna domena* funkcije f , nego njezin pravi podskup.

2.4.2. FOURIEROV RED

- Pretpostavka: $f : [-l, l] \rightarrow \mathbb{R}$ je funkcija koja zadovoljava Dirichletove uvjete.
- Funkciju f možemo aproksimirati *trigonometrijskim redom*, tj. redom oblika $\sum a_n \cdot \cos(n \cdot x) + b_n \cdot \sin(n \cdot x)$, gdje su a_n i b_n koeficijenti reda.
- Može se pokazati da je tada pripadni trigonometrijski red konvergentan za svaki $x \in [-l, l]$.
- Za svaku točku prekida y vrijedi: $S(y) = \frac{1}{2} \cdot \left(\lim_{x \rightarrow y^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow y^+} f(x) \right)$, gdje je $S(y)$ zbroj trigonometrijskoga reda u točki y .
- Na krajevima segmenta zbroj pripadnoga reda jednak je $S(-l) = S(l) = \frac{1}{2} \cdot \left(\lim_{x \rightarrow -l^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow l^-} f(x) \right)$.

2.4.2. FOURIEROV RED

- U praksi je važno periodičnu funkciju f *aproksimirati trigonometrijskim polinomom.*
- Grubo rečeno, to je konačan „dio“ pripadnoga trigonometrijskoga reda:

$$f(x) \approx \sum_{n=0}^m (a_n \cdot \cos(n \cdot x) + b_n \cdot \sin(n \cdot x)) = a_0 + a_1 \cdot \cos x + b_1 \cdot \sin x + \dots + a_m \cdot \cos(m \cdot x) + b_m \cdot \sin(m \cdot x)$$

- $m \in \mathbb{N}$ nazivamo *stupanj* trigonometrijskoga polinoma.
- Što je broj m veći, aproksimacija funkcije f trigonometrijskim polinomom je bolja.

2.4.3. FOURIEROVI KOEFICIJENTI

- *Pretpostavka:* $l = \pi$, tj. $f: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$.
- Tada se *Fourierovi koeficijenti* razvoja funkcije f u Fourierov red računaju prema sljedećim formulama:

$$a_0 = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot dx,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos(n \cdot x) \cdot dx, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \sin(n \cdot x) \cdot dx, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

2.4.4. NAPOMENE

- 1. Ako je funkcija f definirana s *nekoliko izraza* na različitim dijelovima segmenta $[-\pi, \pi]$, pri računanju Fourierovih koeficijenata treba podijeliti taj interval na odgovarajuće dijelove, te izračunati integrale iz formula za Fourierove koeficijente kao zbroj integrala izračunanih za pojedine dijelove segmenta
- 2. Ako je funkcija f parna, vrijedi: $b_n = 0$, za svaki $n \in \mathbb{N}$.
- Ako je funkcija f neparna, vrijedi: $a_n = 0$, za svaki $n \in \mathbb{N}_0$.
- **Podsjetnik:** Funkcija f je *parna* ako za svaki $x \in D(f)$ vrijedi $f(x) = f(-x)$, a *neparna* ako vrijedi $f(-x) = -f(x)$.
- 3. Svaku funkciju definiranu na segmentu $[0, \pi]$ ili $[-\pi, 0]$ možemo proširiti po (ne)parnosti na segment $[-\pi, \pi]$ (i dalje prirodno na cijeli skup \mathbb{R}).
- Drugim riječima, polaznu funkciju f možemo proširiti na cijeli segment $[-\pi, \pi]$ (i dalje prirodno na cijeli skup \mathbb{R}) tako da dobijemo ili parnu ili neparnu funkciju na tom segmentu.

2.4.4. NAPOMENE

- **4.** Neka je $a > 0$ proizvoljan, ali fiksiran. Ako je $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ parna funkcija, onda vrijedi jednakost:

$$\int_{-a}^a f(x) \cdot dx = 2 \cdot \int_{-a}^0 f(x) \cdot dx = 2 \cdot \int_0^a f(x) \cdot dx.$$

- Ako je $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ neparna funkcija, onda vrijedi jednakost:

$$\int_{-a}^a f(x) \cdot dx = 0.$$

- **5.** Ako je $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ neparna $(2 \cdot \pi)$ -periodična funkcija, onda za svaki $k \in \mathbb{Z}$ vrijedi jednakost $f(k \cdot \pi) = 0$.
- **6.** Trigonometrijski polinom stupnja $m \in \mathbb{N}$ čiji su koeficijenti Fourierovi koeficijenti naziva se *Fourierov polinom stupnja m* i označava s F_m .
- U praksi se periodične funkcije aproksimiraju Fourierovim polinomima.

2.4.5. KORISNI IDENTITETI

I. $\cos(k \cdot \pi) = \begin{cases} -1, & \text{za neparne } k \in \mathbb{Z}, \\ 1, & \text{za parne } k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$

II. $\sin(k \cdot \pi) = 0, \forall k \in \mathbb{Z}.$

III. $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(k \cdot x) \cdot dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(k \cdot x) \cdot dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(k \cdot x) \cdot \cos(l \cdot x) \cdot dx = 0, \forall k, l \in \mathbb{Z}.$

IV. $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(k \cdot x) \cdot \cos(l \cdot x) \cdot dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(k \cdot x) \cdot \sin(l \cdot x) \cdot dx = \begin{cases} 0, & \text{za } k, l \in \mathbb{Z}, k \neq l, \\ \pi, & \text{za } k = l \in \mathbb{Z}. \end{cases}$

V. $\int \sin(n \cdot x) \cdot dx = -\frac{1}{n} \cdot \cos(n \cdot x) + C, C \in \mathbb{R}.$

VI. $\int \cos(n \cdot x) \cdot dx = \frac{1}{n} \cdot \sin(n \cdot x) + C, C \in \mathbb{R}.$

VII. $\int x \cdot \sin(n \cdot x) \cdot dx = \frac{1}{n^2} \cdot (\sin(n \cdot x) - n \cdot x \cdot \cos(n \cdot x)) + C, C \in \mathbb{R}.$

VIII. $\int x \cdot \cos(n \cdot x) \cdot dx = \frac{1}{n^2} \cdot (\cos(n \cdot x) + n \cdot x \cdot \sin(n \cdot x)) + C, C \in \mathbb{R}.$

IX. $\int x^2 \cdot \sin(n \cdot x) \cdot dx = \frac{1}{n^3} \cdot ((2 - n^2 \cdot x^2) \cdot \cos(n \cdot x) + 2 \cdot n \cdot x \cdot \sin(n \cdot x)) + C, C \in \mathbb{R}.$

X. $\int x^2 \cdot \cos(n \cdot x) \cdot dx = \frac{1}{n^3} \cdot (2 \cdot n \cdot x \cdot \cos(n \cdot x) + (n^2 \cdot x^2 - 2) \cdot \sin(n \cdot x)) + C, C \in \mathbb{R}.$