

## 2.4. HARMONIJSKA ANALIZA

RAZVOJ PERIODIČNE FUNKCIJE  
U FOURIEROV RED

## 2.4.1. POJAM HARMONIJSKE ANALIZE

- **Podsjetnik:** Kažemo da je realna funkcija  $f$  *periodična s temeljnim periodom*  $T > 0$  ako je
- $\min\{t > 0: (\forall x \in D(f)) (f(x + t) = f(x))\} = T$ .
- Tipični primjeri periodičnih funkcija su trigonometrijske funkcije. Temeljni period funkcija  $\sin x$  i  $\cos x$  jednak je  $2 \cdot \pi$ , a temeljni period funkcija  $\operatorname{tg} x$  i  $\operatorname{ctg} x$  jednak je  $\pi$ .
- U mnogim tehničkim problemima nameće se potreba da se relativno složena periodična funkcija aproksimira *zbrojem trigonometrijskih funkcija* (tj. relativno jednostavnim harmonijskim titranjima).
- Problemima određivanja ovakvih aproksimacija, te algoritmima za rješavanje takvih problema bavi se *harmonijska analiza*.

## 2.4.2. DIRICHLETOVI UVJETI

- U općem slučaju (tj. za bilo koju periodičku funkciju) pitanje njezine aproksimacije zbrojem trigonometrijskih funkcija još uvijek nije potpuno riješeno.
- U praktički najvažnijim slučajevima problem aproksimacije riješen je za funkcije koje zadovoljavaju tzv. *Dirichletove uvjete*.
- **Pretpostavka:** Zadana je funkcija  $f : [-l, l] \rightarrow \mathbb{R}$ .
- **Uvjet 1.** Funkcija  $f$  ima konačno mnogo točaka prekida i ti prekidi su prekidi prve vrste (tzv. “*skokovi*”).
- **Uvjet 2.**  $f$  je po dijelovima monotona, tj.  $f$  ima konačno mnogo strogih lokalnih ekstrema na segmentu  $[-l, l]$ .
- Uvjeti 1. i 2. nazivaju se **Dirichletovi uvjeti**. Oni se odnose *isključivo* na segment  $[-l, l]$ .
- Primijetimo da, prema definiciji periodične funkcije, navedeni segment *nije prirodna domena* funkcije  $f$ , nego njezin pravi podskup.

## 2.4.2. FOURIEROV RED

- Pretpostavka:  $f : [-l, l] \rightarrow \mathbb{R}$  je funkcija koja zadovoljava Dirichletove uvjete.
- Funkciju  $f$  možemo aproksimirati trigonometrijskim redom, tj. redom oblika  $\sum a_n \cdot \cos(n \cdot x) + b_n \cdot \sin(n \cdot x)$ , gdje su  $a_n$  i  $b_n$  koeficijenti reda.
- Može se pokazati da je tada pripadni trigonometrijski red konvergentan za svaki  $x \in [-l, l]$ .
- Za svaku točku prekida  $y$  vrijedi:  $S(y) = \frac{1}{2} \cdot \left( \lim_{x \rightarrow y^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow y^+} f(x) \right)$ , gdje je  $S(y)$  zbroj trigonometrijskoga reda u točki  $y$ .
- Na krajevima segmenta zbroj pripadnoga reda jednak je  $S(-l) = S(l) = \frac{1}{2} \cdot \left( \lim_{x \rightarrow -l^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow l^-} f(x) \right)$ .

## 2.4.2. FOURIEROV RED

- U praksi je važno periodičnu funkciju  $f$  aproksimirati trigonometrijskim polinomom.
- Grubo i neprecizno rečeno, trigonometrijski polinom dobijemo uzmemu li konačan „dio” pripadnoga trigonometrijskoga reda.
- Precizno rečeno, uzimamo prvih  $2 \cdot m + 1$  članova trigonometrijskoga reda:

$$f(x) \approx \sum_{n=0}^m (a_n \cdot \cos(n \cdot x) + b_n \cdot \sin(n \cdot x)) = a_0 + a_1 \cdot \cos x + b_1 \cdot \sin x + \dots + a_m \cdot \cos(m \cdot x) + b_m \cdot \sin(m \cdot x)$$

- $m \in \mathbb{N}$  nazivamo stupanj trigonometrijskoga polinoma.
- Što je broj  $m$  veći, aproksimacija funkcije  $f$  trigonometrijskim polinomom je bolja.

## 2.4.3. FOURIEROVI KOEFICIJENTI

- *Pretpostavka:*  $l = \pi$ , tj.  $f: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ .
- Tada se *Fourierovi koeficijenti* razvoja funkcije  $f$  u Fourierov red računaju prema sljedećim **Eulerovim formulama**:

$$a_0 = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot dx,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos(n \cdot x) \cdot dx, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \sin(n \cdot x) \cdot dx, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

## 2.4.4. NAPOMENE

- 1. Ako je funkcija  $f$  na segmentu  $[-l, l]$  definirana *po dijelovima*, pri računanju Fourierovih koeficijenata treba podijeliti taj interval na odgovarajuće dijelove, te izračunati integrale iz formula za Fourierove koeficijente kao zbroj integrala izračunanih za pojedine dijelove segmenta
- 2. Ako je funkcija  $f$  parna, vrijedi:  $b_n = 0$ , za svaki  $n \in \mathbb{N}$ .
- Ako je funkcija  $f$  neparna, vrijedi:  $a_n = 0$ , za svaki  $n \in \mathbb{N}_0$ .
- **Podsjetnik:** Funkcija  $f$  je *parna* ako za svaki  $x \in D(f)$  vrijedi  $f(x) = f(-x)$ , a *neparna* ako vrijedi  $f(-x) = -f(x)$ .
- 3. Svaku funkciju definiranu na segmentu  $[0, \pi]$  ili  $[-\pi, 0]$  možemo proširiti po (ne)parnosti na segment  $[-\pi, \pi]$  (i dalje prirodno na cijeli skup  $\mathbb{R}$ ).
- Drugim riječima, polaznu funkciju  $f$  definiranu na segmentu  $[0, \pi]$  ili  $[-\pi, 0]$  možemo proširiti na cijeli segment  $[-\pi, \pi]$  (i dalje prirodno na cijeli skup  $\mathbb{R}$ ) tako da dobijemo ili parnu ili neparnu funkciju na tom segmentu (a potom i na  $\mathbb{R}$ ).

## 2.4.4. NAPOMENE

- 4. Neka je  $a > 0$  proizvoljan, ali fiksiran. Ako je  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  parna funkcija, onda vrijedi jednakost:

$$\int_{-a}^a f(x) \cdot dx = 2 \cdot \int_{-a}^0 f(x) \cdot dx = 2 \cdot \int_0^a f(x) \cdot dx.$$

- Ako je  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  neparna funkcija, onda vrijedi jednakost:

$$\int_{-a}^a f(x) \cdot dx = 0.$$

- 5. Ako je  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  neparna  $(2 \cdot \pi)$ -periodična funkcija, onda za svaki  $k \in \mathbb{Z}$  vrijedi jednakost  $f(k \cdot \pi) = 0$ .
- 6. Trigonometrijski polinom stupnja  $m \in \mathbb{N}$  čiji su koeficijenti Fourierovi koeficijenti naziva se *Fourierov polinom stupnja m* i označava s  $F_m$ .
- U praksi se periodične funkcije aproksimiraju Fourierovim polinomima.

## 2.4.5. KORISNI IDENTITETI

**I.**  $\cos(k \cdot \pi) = \begin{cases} -1, & \text{za neparne } k \in \mathbb{Z}, \\ 1, & \text{za parne } k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$

**II.**  $\sin(k \cdot \pi) = 0, \forall k \in \mathbb{Z}.$

**III.**  $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(k \cdot x) \cdot dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(k \cdot x) \cdot dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(k \cdot x) \cdot \cos(l \cdot x) \cdot dx = 0, \forall k, l \in \mathbb{Z}.$

**IV.**  $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(k \cdot x) \cdot \cos(l \cdot x) \cdot dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(k \cdot x) \cdot \sin(l \cdot x) \cdot dx = \begin{cases} 0, & \text{za } k, l \in \mathbb{Z}, k \neq l, \\ \pi, & \text{za } k = l \in \mathbb{Z}. \end{cases}$

**V.**  $\int \sin(n \cdot x) \cdot dx = -\frac{1}{n} \cdot \cos(n \cdot x) + C, C \in \mathbb{R}.$

**VI.**  $\int \cos(n \cdot x) \cdot dx = \frac{1}{n} \cdot \sin(n \cdot x) + C, C \in \mathbb{R}.$

**VII.**  $\int x \cdot \sin(n \cdot x) \cdot dx = \frac{1}{n^2} \cdot (\sin(n \cdot x) - n \cdot x \cdot \cos(n \cdot x)) + C, C \in \mathbb{R}.$

**VIII.**  $\int x \cdot \cos(n \cdot x) \cdot dx = \frac{1}{n^2} \cdot (\cos(n \cdot x) + n \cdot x \cdot \sin(n \cdot x)) + C, C \in \mathbb{R}.$

**IX.**  $\int x^2 \cdot \sin(n \cdot x) \cdot dx = \frac{1}{n^3} \cdot ((2 - n^2 \cdot x^2) \cdot \cos(n \cdot x) + 2 \cdot n \cdot x \cdot \sin(n \cdot x)) + C, C \in \mathbb{R}.$

**X.**  $\int x^2 \cdot \cos(n \cdot x) \cdot dx = \frac{1}{n^3} \cdot (2 \cdot n \cdot x \cdot \cos(n \cdot x) + (n^2 \cdot x^2 - 2) \cdot \sin(n \cdot x)) + C, C \in \mathbb{R}.$