

2.5.

VRSTE UPLATA I ISPLATA (RENTI)
I NJIHOVE PRIMJENE.

2.5.1. PROBLEM ODREĐIVANJA KONAČNIH VRIJEDNOSTI UPLATA (ISPLATA).

- **Problem:** Odrediti konačnu vrijednost višekratnih uloga u određenom vremenskom razdoblju.
- *Višekratni ulozi* – periodičke uplate/isplate unutar određenoga vremena trajanja kapitalizacije
- **Pretpostavke:** 1.) Uplate/isplate su nominalno jednake.
- 2.) Uplate/isplate dospijevaju ravnomjerno u jednakim vremenskim intervalima, i to:
 - a) *prenumerando* – na početku vremenskoga razdoblja;
 - b) *postnumerando* – na kraju vremenskoga razdoblja;
- 3.) Elementarno razdoblje ukamaćivanja (razdoblje između dvaju obračuna kamata) podudara se s razdobljem između dviju uzastopnih uplata/isplata;
- 4.) Kamatnjak je stalan u cijelom vremenu trajanja kapitalizacije.
- 5.) Pri određivanju konačne vrijednosti primjenjuje se složeni kamatni račun, a vrijeme trajanja kapitalizacije iskazano je kao broj elementarnih razdoblja ukamaćivanja.

2.5.2. OZNAKE

- R – periodična konstantna uplata/isplata;
- n – vrijeme trajanja kapitalizacije;
- p – stalan dekurzivni kamatnjak;
- r – dekurzivni kamatni faktor;
- S_n^{pr} – konačna vrijednost prenumerando uplata/isplata na kraju vremena trajanja kapitalizacije;
- S_n^{po} – konačna vrijednost postnumerando uplata/isplata na kraju vremena trajanja kapitalizacije

2.5.3. NAPOMENA

- Ako se elementarno razdoblje ukamaćivanja **ne** podudara s razdobljem na koji se odnosi nominalni kamatnjak, nominalni je kamatnjak potrebno preračunati u odgovarajući relativni ili konformni kamatnjak.
- Formule navedene na sljedećim slide-ovima pritom ostaju nepromijenjene.

2.5.4. KONAČNA VRIJEDNOST PRENUMERANDO UPLATA/ISPLATA

- Vrijede sljedeće formule:

$$S_n^{pr} = R \cdot \frac{r^{n+1} - r}{r - 1}$$

$$R = \frac{S_n^{pr} \cdot (r - 1)}{r^{n+1} - r}$$

$$n = \frac{\log \left(\frac{S_n^{pr} \cdot (r - 1)}{R} + r \right)}{\log r} - 1$$

2.5.5. KONAČNA VRIJEDNOST POSTNUMERANDO UPLATA (ISPLATA)

- Vrijede sljedeće formule:

$$S_n^{po} = R \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1}$$

$$R = \frac{S_n^{po} \cdot (r - 1)}{r^n - 1}$$

$$n = \frac{\log \left(\frac{S_n^{po} \cdot (r - 1)}{R} + 1 \right)}{\log r}$$

2.5.6. PROBLEM ODREĐIVANJA POČETNIH VRIJEDNOSTI ISPLATA (RENTI).

- **Problem:** Odrediti vrijednost višekratnih isplata u određenom vremenskom razdoblju.
- *Višekratne isplate (rente)* – periodičke isplate unutar određenoga vremena trajanja kapitalizacije;
- **Pretpostavke:** 1.) Isplate (rente) su nominalno jednake.
- 2.) Isplate dospijevaju ravnomjerno u jednakim vremenskim intervalima, i to:
 - a) *prenumerando* – na početku vremenskoga razdoblja;
 - b) *postnumerando* – na kraju vremenskoga razdoblja;
- 3.) Elementarno razdoblje ukamaćivanja podudara se s razdobljem između dviju uzastopnih isplata.
- 4.) Kamatnjak je stalan za cijelo vrijeme trajanja kapitalizacije.
- 5.) Pri određivanju početne vrijednosti primjenjuje se složeni kamatni račun, a vrijeme trajanja kapitalizacije iskazano je kao broj elementarnih razdoblja ukamaćivanja.

2.5.7. OZNAKE

- R – periodična konstantna isplata (renta)
- n – vrijeme trajanja kapitalizacije;
- p – stalan dekurzivni kamatnjak;
- r – dekurzivni kamatni faktor;
- A_n^{pr} – početna vrijednost prenumerando isplata (renti) tijekom vremena trajanja kapitalizacije;
- A_n^{po} – početna vrijednost postnumerando isplata (renti) tijekom vremena trajanja kapitalizacije

2.5.8. NAPOMENA

- Ako se elementarno razdoblje ukamaćivanja **ne** podudara s razdobljem na koji se odnosi nominalni kamatnjak, nominalni je kamatnjak potrebno preračunati u odgovarajući relativni ili konformni kamatnjak.
- Formule navedene na sljedećim slide-ovima pritom ostaju nepromijenjene.

2.5.9. POČETNA VRIJEDNOST PRENUMERANDO ISPLATA (RENTI)

■ Vrijede sljedeće formule:

$$A_n^{pr} = R \cdot \frac{r^n - 1}{r^n - r^{n-1}} = R \cdot \frac{r^n - 1}{r^{n-1} \cdot (r - 1)}$$

$$R = \frac{A_n^{pr} \cdot r^{n-1} \cdot (r - 1)}{r^n - 1}$$

$$n = \frac{\log R - \log \left(R + \frac{A_n^{pr}}{R} - A_n^{pr} \right)}{\log r}$$

2.5.10. POČETNA VRIJEDNOST POSTNUMERANDO ISPLATA (RENTI)

- Vrijede sljedeće formule:

$$A_n^{po} = R \cdot \frac{r^n - 1}{r^{n+1} - r^n} = R \cdot \frac{r^n - 1}{r^n \cdot (r - 1)}$$

$$R = \frac{A_n^{po} \cdot r^n \cdot (r - 1)}{r^n - 1}$$

$$n = \frac{\log R - \log (R + A_n^{po} - A_n^{po} \cdot r)}{\log r}$$

$$A_n^{pr} = r \cdot A_n^{po}$$

2.5.11. VJEČNA RENTA

- **Problem:** Odrediti početnu vrijednost prenumerando ili postnumerando konstantne rente koja traje vječno.
- *Pretpostavke:* Obračun kamata je složen i dekurzivan, a primjenjuje se stalan nominalni kamatnjak.
- *Praktično značenje:* Početkom ili krajem svakoga razdoblja podižemo iznos kamata koje će biti pripisane na kraju toga razdoblja.

2.5.12. OZNAKE

- R – konstantni iznos rente
- p – stalan nominalni kamatnjak
- A_{∞}^{pr} – početna vrijednost prenumerando vječne rente;
- A_{∞}^{po} – početna vrijednost postnumerando vječne rente;

2.5.13. NAPOMENA

- Ako se elementarno razdoblje ukamaćivanja ne podudara s razdobljem na koji se odnosi nominalni kamatnjak, nominalni je kamatnjak potrebno preračunati u odgovarajući relativni ili konformni kamatnjak.
- Formule navedene na sljedećem slide-u pritom ostaju nepromijenjene.

2.5.14. POČETNA VRIJEDNOST PRENUMERANDO VJEČNE RENTE

- Vrijede sljedeće formule:

$$A_{\infty}^{pr} = \frac{R \cdot (100 + p)}{p}$$

$$R = \frac{A_{\infty}^{pr} \cdot p}{100 + p} \quad p = \frac{100 \cdot R}{A_{\infty}^{pr} - R}$$

2.5.15. POČETNA VRIJEDNOST POSTNUMERANDO VJEČNE RENTE

■ Vrijede sljedeće formule:

$$A_{\infty}^{po} = \frac{100 \cdot R}{p}$$

$$R = \frac{A_{\infty}^{po} \cdot p}{100} \quad p = \frac{100 \cdot R}{A_{\infty}^{po}}$$

2.5.16. PRIMJER 1.

- Kako bi osigurao dovoljna financijska sredstva za školovanje svojega sina na Visokoj poslovnoj školi u Rijeci, Tarik namjerava početkom svake od sljedećih 18 godina ulagati u banku nominalno jednake svote novaca tako da početkom 19., 20. i 21. godine može s računa podići po 4.000,00 € potrebnih za gotovinsko plaćanje godišnje školarine.
- Ako je godišnji kamatnjak u cijelom razdoblju 7,5, odredite najmanji iznos uloga potreban za ostvaraj navedenoga plana. Obračun kamata je složen, godišnji i dekurzivan.

2.5.17. PRIMJER 2.

- Krajem svakoga kvartala 2009. godine Neven C. na svoj štedni račun namjerava uplatiti po 10.000,00 USD. Tako uštedjeni novac namjerava potrošiti podižući nominalno jednake iznose krajem svakoga mjeseca 2010. i 2011. godine.
- Odredite najveći mogući iznos pojedine isplate ako je godišnji kamatnjak jednak 6. Obračun kamata u 2009. godini je kvartalni, a u 2010. i 2011. godini mjesečni.
- (*Napomena:* Ukoliko je potrebno, primijenite *relativni* kamatnjak.)

2.5.18. PRIMJER 3.

- Počevši od prosinca 2008. g. Lavoslav namjerava ulagati na svoj štedni račun po 1.000,00 € krajem svakoga mjeseca zaključno s prosincem 2010. g. Uloženi novac namjerava potrošiti tako da počevši od prosinca 2012. g. početkom svakoga mjeseca podiže nominalno jednake svote novca zaključno s prosincem 2015. godine. Odredite iznos pojedine isplate. Godišnja kamatna stopa iznosi 6,1678%, a obračun kamata je složen, mjesečni i dekurzivan. (*Napomena: Ukoliko je potrebno, primijenite konformni kamatnjak.*)

2.5.19. PRIMJER 4.

- Vjenceslav je sklopio ugovor s osiguravajućim društvom “*Otkasko*”. Krajem svakoga trimestra u sljedećih 30 godina ulagat će 500,00 USD, a nakon toga želi vječnu prenumerando trimestralnu rentu. Stalan godišnji kamatnjak jednak je 12, a obračun kamata složen, trimestralni i dekurzivan. Odredite iznos vječne rente.
- (*Napomena: Ukoliko je potrebno, primijenite relativni kamatnjak.*)

2.5.20. PRIMJER 5.

- Berislav je sklopio ugovor s osiguravajućim društvom “*Otkasko*”. Početkom svakoga kvartala u sljedećih 20 godina ulagat će 500,00 USD. Nakon toga želi vječnu postnumerando mjesečnu rentu. Stalan godišnji kamatnjak jednak je 4,5. Odredite iznos rente ako je obračun kamata u prvih 20 godina složen, kvartalni i dekurzivan, a potom složen, mjesečni i dekurzivan.
- (*Napomena: Ukoliko je potrebno, primijenite konformni kamatnjak.*)

2.5.21. PRIMJER 6.

- Maksimilijan ima pravo na vječnu mjesečnu prenumerando rentu u iznosu od 800,00 €. Umjesto vječne rente, odlučio se na mjesečne postnumerando rente u sljedećih 25 godina. Godišnja kamatna stopa je 6%.
- Odredite iznos svake rente ako je obračun kamata složen, mjesečni i dekurzivan.
- (*Napomena: Ukoliko je potrebno, primijenite relativni kamatnjak.*)