2.1. MATRICE

1. Odredite tipove i ispišite sve elemente sljedećih matrica:

a) $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}$;

b) $B = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0.2 \\ \frac{4}{3} \end{bmatrix}$;

c) $C = \begin{bmatrix} 2019 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2021 \\ -1 & 2020 & 0 \end{bmatrix}$.

2. Napišite realnu matricu sa sljedećim svojstvima:

a) A je tipa (2, 3), te vrijedi $a_{11} = a_{22} = 1$ i $a_{ij} = 0$ za sve ostale parove (i, j);

b) B je reda 2, te vrijedi $b_{ij} = i + j$, za sve dopustive uređene parove (i, j);

c) C je reda 3, te vrijedi $c_{ij} = i^j$, za sve dopustive uređene parove (i, j).

3. Odredite vrijednosti $x, y, z \in \mathbb{R}$ tako da matrice A i B budu jednake ako su

$$A = \begin{bmatrix} 1 + x \cdot y & y \\ x & 1 - z \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} z & x \cdot z - 1 \\ 1 + y \cdot z & 1 - z^2 \end{bmatrix}.$$

4. Odredite matricu $D = 2 \cdot B - A - \frac{1}{2} \cdot C$ ako su A, B i C matrice reda 2, te vrijedi:

$$a_{ij} = 2 \cdot i - j, \; b_{ij} = 2 \cdot j - i, \; c_{ij} = (i + j)^2$$ za sve dopustive uređene parove (i, j),

2.2. MNOŽENJE MATRICA

1. Izračunajte skalarni umnožak $a \cdot b$ ako su:

a) $a = (1, \; 0)$ i $b = (0, \; 1)$;

b) $a = (2, \; 3, \; 5)$ i $b = \left(\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, \; \frac{4}{5}\right)$;

c) $a = (-1, \; 0, \; 1, \; 0)$ i $b = (-2019, \; 2020, -2021, \; 2022)$.

2. Ispitajte postoji li umnožak $A \cdot B$ i, ako postoji, izračunajte ga ako su:

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} -1 & -2 \end{bmatrix}$;

b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$;

c) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

3. Zadane su matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$.

a) Provjerite jednakost $(A+B)^2 = A^2 + 2 \cdot A \cdot B + B^2$.

b) Vrijedi li jednakost iz **a)** podzadatka za bilo koje dvije matrice A i B reda 2? Objasnite svoj odgovor.

2.3. POSEBNI TIPOVI MATRICA

1. Odredite matricu A^T ako je:

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$;

b) $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$;

c) $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 & 4 \\ -5 & 6 & -7 & 8 \\ -9 & 10 & -11 & 12 \end{bmatrix}$.

2. Odredite $x, y, z \in \mathbb{R}$ tako da matrica A bude simetrična ako je:

$$A = \begin{bmatrix} -2021 & 4 & 5 \\ x+y & 2020 & x+z \\ y+z & 3 & -2019 \end{bmatrix}.$$

2.4. DETERMINANTA MATRICE. REGULARNE MATRICE.

1. Zadana je determinanta

$$D=\begin{vmatrix} \sin x & 2\cdot\cos x & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ \cos x & 1 & 2\cdot\sin x \end{vmatrix}.$$

a) **Razvojem po drugomu retku** determinante D pokažite da za svaki $x \in \mathbb{R}$ vrijedi nejednakost $D > 0$.

b) Odredite najmanju i najveću vrijednost determinante D. Za koje $x \in \mathbb{R}$ se postiže najmanja vrijednost determinante D? Za koje $x \in \mathbb{R}$ se postiže najveća vrijednost te determinante?

2. Odredite sve $a \in \mathbb{R}$ za koje je matrica A regularna ako je:

a) $A=\begin{bmatrix} a-1 & 3 \\ 5 & a+1 \end{bmatrix}$;

b) $A=\begin{bmatrix} a & 0 & -a \\ a^2 & 1 & a^3 \\ 2 & 0 & 1-a \end{bmatrix}$.

3. Ispitajte jesu li sljedeće matrice regularne i, ako jesu, odredite njihov inverz:

a) $A=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$;

b) $B=\begin{bmatrix} 2 & 7 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$.

4. Odredite matricu A ako je $(2\cdot A^{-1})^T=\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -7 \end{bmatrix}$.

5. Zadane su matrice $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ i $B=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$. Riješite jednadžbu $A\cdot X=B$.

6. Zadane su matrice $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ i $B=\begin{bmatrix} -3 & 10 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$. Riješite jednadžbu: $X\cdot A=B$.

RJEŠENJA ZADATAKA

2.1. MATRICE

1. a) Matrica A je matrica tipa (1,2). Njezini elementi su: $a_{11} = -1$, $a_{12} = 1$.

b) Matrica B je matrica tipa (3,1). Njezini elementi su: $b_{12} = -\frac{1}{2}$, $b_{21} = 0.2$, $b_{31} = \frac{4}{3}$.

c) Matrica C je matrica reda 3. Njezini elementi su: $c_{11} = 2019$, $c_{12} = c_{21} = c_{33} = 0$, $c_{13} = c_{31} = -1$, $c_{22} = 1$, $c_{23} = -2021$, $c_{32} = 2020$.

2.

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$;

b) $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$;

c) $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 9 & 27 \end{bmatrix}$.

3. $(x, y, z) = \{(1,0,1), (1,-1,0), (0,-1,1)\}$.

4. $D = \begin{bmatrix} -1 & 1.5 \\ -7.5 & -6 \end{bmatrix}$.

2.2. MNOŽENJE MATRICA

1. a) 0;

b) 3.

c) –2.

2. a) Ne postoji jer matrice nisu ulančane.

b) $A \cdot B = [0]$;

c) $A \cdot B = [-2 \quad -1 \quad 0]$.

3. a) $(A+B)^2 = A^2 + 2 \cdot A \cdot B + B^2 = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

b) Da bi jednakost iz **a)** podzadatka bila valjana za matrice A i B reda n, nužno je i dovoljno da vrijedi jednakost $A \cdot B = B \cdot A$. Budući da množenje matrica općenito nije komutativno, zaključujemo da zadana jednakost ne vrijedi za bilo koje dvije matrice reda n, pa posebno niti za bilo koje dvije matrice reda 2.

2.3. POSEBNI TIPOVI MATRICA

1. **a)** $A^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$; **b)** $A^T = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$; **c)** $A^T = \begin{bmatrix} -1 & -5 & -9 \\ 2 & 6 & 10 \\ -3 & -7 & -11 \\ 4 & 8 & 12 \end{bmatrix}$.

2. $(x, y, z) = (1, 3, 2)$.

2.4. DETERMINANTA MATRICE. REGULARNE MATRICE.

1.

a) Vrijednost determinante jednaka je $D = 2 - \sin x$. Budući da za svaki $x \in \mathbb{R}$ vrijedi nejednakost $-1 \leq \sin x \leq 1$, zaključujemo da je $1 \leq 2 - \sin x \leq 3$, tj. $1 \leq D \leq 3$. Dakle, u svakom slučaju je $D > 0$.

b) Iz rezultata **a)** podzadatka slijedi da je najmanja vrijednost determinante D jednaka 1, dok je njezina najveća vrijednost jednaka 3.

Vrijednost $D = 1$ postiže se za sve $x \in \mathbb{R}$ za koje je $\sin x = 1$, tj. za $x \in \left\{ (4 \cdot k + 1) \cdot \frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Vrijednost $D = 3$ postiže se za sve $x \in \mathbb{R}$ za koje je $\sin x = -1$, tj. za $x \in \left\{ \frac{3 \cdot \pi}{2} \cdot \left(\frac{4}{3} \cdot k + 1 \right) : k \in \mathbb{Z} \right\}$.

2. a) $a \in \mathbb{R} \setminus \{-4, 4\}$;

b) $a \in \mathbb{R} \setminus \{0, 3\}$.

3. **a)** $\det A = 1 \Rightarrow A$ je regularna. $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

b) $\det(B) = 1 \Rightarrow B$ je regularna. $B^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & -2 \\ -5 & 1 & 11 \end{bmatrix}$.

4. $A = 2 \cdot \left(\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -7 \end{bmatrix}^T \right)^{-1} = \begin{bmatrix} -7 & -3 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}.$

5. $X = A^{-1} \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$

6. $X = B \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 10 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$