2.4.

DETERMINANTA MATRICE. REGULARNE MATRICE

2.4.1. DETERMINANTA MATRICE

- Radi jednostavnijega ispitivanja svojstava *kvadratnih* matrica, svakoj kvadratnoj matrici obično se pridružuje realan broj koji se naziva *determinanta* te matrice.
- Svrha takvoga pridruživanja je dobiti određene informacije o nekim svojstvima matrice.
- U općem je slučaju pojam determinante vrlo složeno definirati formulom, pa ćemo se ograničiti na slučajeve matrica reda 2 i reda 3.
- Pritom pretpostavljamo da je svaka promatrana matrica *realna*, tj. da su njezini elementi realni brojevi.

2.4.2. DETERMINANTA MATRICE REDA 2

- **Determinanta** matrice reda 2 (kraće: *determinanta reda* 2) je funkcija $d : \mathbf{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ definirana pravilom:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{vmatrix} := d\left(\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}\right) = a_1 \cdot a_4 - a_2 \cdot a_3$$

- Vrijednost determinante reda 2 može biti *bilo koji* realan broj.

2.4.3. DETERMINANTA MATRICE REDA 3

- *Determinanta* matrice reda 3 (kraće: *determinanta reda* 3) je funkcija $d : \mathbf{M}_3(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ definirana pravilom:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} := d\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\right) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} -$$

$$-(a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13} + a_{32} \cdot a_{23} \cdot a_{11} + a_{33} \cdot a_{21} \cdot a_{12})$$

- I vrijednost determinante reda 3 može biti bilo koji realan broj.
- Često ćemo kraće (i netočno!) umjesto „vrijednost determinante” reći samo „determinanta”, ali ćemo pritom misliti na vrijednost determinante.

2.4.4. SARRUSOVA SHEMA

- Osim prema definiciji, vrijednost determinante reda 3 može se računati i prema tzv. *Saarusovoj shemi.*
- **Ulaz** (*input*): matrica/determinanta reda 3
- **Izlaz** (*output*): vrijednost determinante reda 3
- **Korak 1.** Desno od posljednjega stupca determinante ponovno dopisati prvi i drugi stupac te determinante:

$$\left|\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}\right| \begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{array}$$

- **Korak 2.** Izračunati zbroj umnožaka svih uređenih trojki elemenata koji tvore dijagonale "sjeverozapad – jugoistok". To su (a_{11}, a_{22}, a_{33}), (a_{12}, a_{23}, a_{31}) i (a_{13}, a_{21}, a_{32}). Tako se dobiju prva tri pribrojnika iz definicije determinante reda 3.

2.4.4. SARRUSOVA SHEMA

- **Korak 3.** Izračunati zbroj umnožaka svih uređenih trojki elemenata koji tvore dijagonale "jugozapad – sjeveroistok". To su (a_{31}, a_{22}, a_{13}), (a_{32}, a_{23}, a_{11}) i (a_{33}, a_{21}, a_{12}). Tako dobijemo tri člana u okrugloj (uglatoj) zagradi iz definicije determinante reda 3.
- **Korak 4.** Od rezultata dobivenoga u Koraku 2. oduzeti rezultat dobiven u Koraku 3. Dobivena razlika jednaka je vrijednosti determinante.
- **Napomena**: Ovaj algoritam vrijedi **samo za** determinante reda 3. Ekvivalentno, on **ne vrijedi niti za jednu** determinantu čiji je red različit od 3.

2.4.5. LAPLACEOV RAZVOJ DETERMINANTE

- *Determinanta reda n* je zapravo funkcija koja matrici A reda n pridružuje neki realan broj.
- Takve se determinante uobičajeno računaju tzv. *Laplaceovim razvojem* po retku ili stupcu.
- Ideja Laplaceova razvoja je svesti računanje determinanti reda n na računanje točno n determinanti reda $(n-1)$.

2.4.6. ALGORITAM LAPLACEOVA RAZVOJA DETERMINANTE

* **Ulaz:** determinanta reda n
* **Izlaz**: vrijednost determinante reda n
* **Korak 1.** Elementu na presjeku prvoga retka i prvoga stupca pridružiti predznak +. Krećući se prema kraju retka, ostalim elementima naizmjence pridružiti predznake – i +. Kad se dođe do kraja jednoga retka, prijeći na element u presjeku sljedećega retka i prvoga stupca nastavljajući naizmjenično pridruživanje predznaka – i + (kao da su svi brojevi u istom retku).
* **Korak 2.** Odabrati redak/stupac po kojemu se želi razviti determinanta.
* **Korak 3.** *Svakom* elementu u odabranom retku/stupcu pridružiti determinantu koja se dobije kad se iz početne determinante izostave cijeli redak i cijeli stupac kojemu pripada dotični element.

2.4.6. ALGORITAM LAPLACEOVA RAZVOJA DETERMINANTE

* **Korak 4.** Za svaki element u odabranom retku/stupcu izračunati umnožak toga elementa i pridružene determinante. Umnošku pridružiti predznak dotičnoga elementa dobiven u Koraku 1.
* **Korak 5.** Zbrojiti sve umnoške dobivene u Koraku 4. pazeći na pripadne predznake. Dobiveni rezultat jednak je vrijednosti polazne determinante.
* **Napomena**: Praktično je najjednostavnije birati one retke/stupce u kojima se pojavljuje najveći broj nula ili u kojima se pojavljuju (prema kriteriju apsolutne vrijednosti) što manji realni brojevi.

2.4.7. NEKA KORISNA SVOJSTVA DETERMINANTE

- **1.** Ako je jedan redak/stupac determinante nulredak/nulstupac, vrijednost determinante jednaka je nuli.
- **2.** Ako determinanta sadrži barem dva jednaka retka i/li barem dva jednaka stupca, njezina vrijednost jednaka je nuli.
- **Oprez**: Tvrdnja nije točna u slučaju u kojemu se podudaraju jedan redak i jedan stupac.
- **3.** Zamjenom dvaju redaka ili stupaca determinante mijenja se njezin predznak.
- **Oprez**: Retke nije dozvoljeno zamijeniti sa stupcima ili obrnuto.
- **4.** Dodavanjem jednoga retka/stupca determinante nekom drugom retku/stupcu determinante njezina se vrijednost neće promijeniti.

2.4.7. NEKA KORISNA SVOJSTVA DETERMINANTE

- **5.** Pomnožimo li *svaki* element nekoga retka/stupca nekim realnim brojem različitim od nule, pa tako dobiven redak/stupac dodamo nekom drugom retku/stupcu, vrijednost determinante se neće promijeniti.
- **6.** *Glavnom dijagonalom* determinante reda n nazivamo skup $\{a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}\}$. Ako je pripadna matrica gornja trokutasta ili donja trokutasta, onda je determinanta jednaka umnošku svih elemenata na glavnoj dijagonali:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

2.4.8. BINET-CAUCHYJEV TEOREM

- Za bilo koje dvije kvadratne matrice A i B **istoga reda** vrijedi sljedeća jednakost:
- $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$.
- Ova jednakost poznata je kao *Binet-Cauchyjev teorem*.
- Iz ove jednakosti indukcijom slijedi:
- $\det(A^n) = (\det(A))^n, \forall n \in \mathbb{N}$.

2.4.9. INVERZ MATRICE

- Neka je A realna matrica reda n.
- Ako postoji matrica B takva da vrijedi jednakost
- $A \bullet B = B \bullet A = E_n$
- kažemo da je B **matrica inverzna matrici A** (ili kraće: **inverz matrice A**).
- Standardna oznaka za inverz matrice A je A^{-1}.

2.4.10. NAPOMENE

- **1.** Ako postoji, inverz matrice reda n je (također) matrica reda n.
- **2.** Iz definicije inverza matrice izravno slijedi da je inverz matrice A^{-1} matrica A, tj. vrijedi jednakost $(A^{-1})^{-1} = A$.
- **3.** Ako inverz matrice uopće postoji, onda je on jedinstven.

2.4.11. REGULARNA MATRICA

- Svaku matricu reda n koja ima inverz nazivamo **regularna matrica**.
- Za takvu matricu kažemo i da je **invertibilna**.
- Matricu reda n koja nije regularna nazivamo **singularna matrica**.
- **Problem**: Ispitati je li neka matrica regularna i, ako jest, odrediti njezin inverz.

2.4.12. KRITERIJ REGULARNOSTI MATRICE

- **Teorem 1.** Kvadratna matrica A je regularna ako i samo ako je njezina determinanta različita od nule.
- **Korolar 1.** Kvadratna matrica A je singularna ako i samo ako je njezina determinanta jednaka 0.
- **Pravilo**: Ispitati regularnost matrice $\Leftrightarrow$ izračunati njezinu determinantu i utvrditi je li ona različita od 0.
- Ako jest, matrica je regularna.
- Ako nije, matrica je singularna.

2.4.13. ELEMENTARNE TRANSFORMACIJE

- U svrhu lakšega određivanja inverza regularne matrice definiramo sljedeće *elementarne transformacije* nad retcima te matrice:
- **1.** Množenje *bilo kojega* retka matrice realnim brojem različitim od nule.
- **2.** Zamjena dvaju redaka matrice.
- **3.** Dodavanje jednoga retka matrice drugom retku i pisanje dobivenoga zbroja u taj drugi redak.

2.4.14. ODREĐIVANJE INVERZA MATRICE POMOĆU ADJUNKTE

* Pretpostavimo da je A regularna matrica reda n.
* **Korak 1.** Izračunamo $\det(A)$.
* **Korak 2.** Za svaki i, $j = 1, \ldots, n$ "precrtamo" i-ti redak i j-ti stupac matrice A. Tako dobijemo matricu A_{ij} reda $n - 1$.
* **Korak 3.** Izračunamo $b_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \det(A_{ij})$.
* **Korak 4.** Formiramo matricu $B = [b_{ij}]$, pa odredimo $\tilde{A} := B^T$.
* Matrica $\tilde{A}$ naziva se *adjunkta* matrice A.
* **Korak 5.** Traženi inverz jednak je $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)} \cdot \tilde{A}$.

* Za velike n ovaj postupak može biti prilično spor i dugotrajan.
* Korak 2. se pojavljuje i u Laplaceovu razvoju determinante, ali treba pripaziti: u Koraku 3. se **ne pojavljuje** množenje pripadne determinante brojem a_{ij}.

2.4.15. ODREĐIVANJE INVERZA MATRICE POMOĆU ELEMENTARNIH TRANSFORMACIJA

* **Pretpostavka**: A regularna matrica reda n
* **Korak 1.** Formirati matricu $C = [A \mid E_n]$.
* **Korak 2.** Elementarnim transformacijama svesti matricu C na oblik $D = [E_n \mid B]$.
* **Korak 3.** Matrica B je inverz matrice A.
* Za velike n ovaj postupak je bitno brži i jednostavniji od "klasičnoga" postupka iz točke 2.4.14. jer se izbjegavaju komplicirana određivanja determinante i adjunkte.

2.4.16. NAPOMENE

- Za svake dvije regularne matrice A i B reda n, te svaki $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ vrijede sljedeće jednakosti:

a) $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$;

b) $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$;

c) $(\alpha \cdot A)^{-1} = \dfrac{1}{\alpha} \cdot A^{-1}$;

d) $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$.