2.3.

POSEBNI TIPOVI MATRICA

2.3.1. SKUPOVI $\mathrm{M}_{r,s}(\mathbb{R})$ i $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$

- Neka su n, r, $s \in \mathbb{N}$.
- U radu s matricama koristimo sljedeće skupove:
- $M_{r,s}(\mathbb{R})$ = skup svih realnih matrica tipa (r, s).
- Taj skup ima beskonačno mnogo međusobno različitih elemenata.
- $M_n(\mathbb{R})$ = skup svih realnih matrica reda n.
- I taj skup ima beskonačno mnogo međusobno različitih elemenata.

2.3.2. NULMATRICA

- Nulmatrica tipa (r, s) je matrica čiji su svi elementi jednaki nuli. Npr.
- $A = [0\ 0]$ je nulmatrica tipa (1, 2);
- $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ je nulmatrica reda 2 itd.
- Kad god nema zabune, nulmatricu označavamo s 0.

2.3.3. JEDINIČNA MATRICA

- Jedinična matrica reda n (oznaka: E_n) je matrica koja ima n redaka i n stupaca, te za čije elemente vrijedi:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ako je } i = j \\ 0, & \text{ako je } i \neq j \end{cases}, \text{ za sve dopustive } (i, j)$$

- Npr. $E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ je jedinična matrica reda 2, $E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
- je jedinična matrica reda 3 itd.
- Napomena: Kad god nema zabune, indeks n možemo izostaviti, odnosno jediničnu matricu označiti samo s E.

2.3.4. DIJAGONALNA MATRICA

- Neka je $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ matrica reda n.
- Definiramo njezinu **glavnu dijagonalu** kao uređenu n-torku $(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})$, a **sporednu dijagonalu** kao uređenu n-torku $(a_{n1}, a_{n-1,2}, \ldots, a_{1n})$.
- **Dijagonalna matrica reda n** je kvadratna matrica čiji su svi elementi izvan glavne dijagonale jednaki nuli (na elemente glavne dijagonale ne postavljamo nikakav zahtjev).
- Ekvivalentno, A je dijagonalna matrica ako i samo ako za sve dopustive (i, j) vrijedi:
- $(i \neq j) \Leftrightarrow (a_{ij} = 0)$.

2.3.4. DIJAGONALNA MATRICA

- Primjeri dijagonalnih matrica (različitih redova) su:

$$A = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix},\ D = \begin{bmatrix} -2019 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2020 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2021 \end{bmatrix}$$

- Napomena: Nulmatrica reda n i jedinična matrica reda n su također dijagonalne matrice.

2.3.5. GORNJA TROKUTASTA MATRICA

- Gornja trokutasta matrica reda n je kvadratna matrica čiji su svi elementi ispod glavne dijagonale jednaki nuli.
- Ekvivalentno: Matrica A reda n je gornja trokutasta ako i samo ako za sve dopustive (i, j) vrijedi:
- $(i > j) \Rightarrow (a_{ij} = 0)$.

2.3.5. GORNJA TROKUTASTA MATRICA

- Primjeri gornjih trokutastih matrica (različitih redova) su:

$$A = [2020],\ B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix},\ D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

- Napomena: Nulmatrica (bilo kojega tipa), jedinična matrica (bilo kojega reda) i bilo koja dijagonalna matrica su gornje trokutaste matrice.

2.3.6. DONJA TROKUTASTA MATRICA

- Donja trokutasta matrica reda n je kvadratna matrica čiji su svi elementi iznad glavne dijagonale jednaki nuli.
- Ekvivalentno: Matrica A reda n je donja trokutasta ako i samo ako za sve dopustive (i, j) vrijedi:
- $(i < j) \Rightarrow (a_{ij} = 0)$.

2.3.6. DONJA TROKUTASTA MATRICA

- Primjeri donjih trokutastih matrica (različitih redova) su:

$$A = [-2020],\ B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 4 & -5 & 6 \end{bmatrix},\ D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ -4 & 5 & 6 & 0 \\ -7 & 8 & -9 & 10 \end{bmatrix}$$

- Napomena: Nulmatrica (bilo kojega tipa), jedinična matrica (bilo kojega reda) i bilo koja dijagonalna matrica su donje trokutaste matrice.

2.3.7. TRANSPONIRANA MATRICA

- Neka je $A \in \mathrm{M}_{r,s}(\mathbb{R})$ bilo koja matrica.
- Matrica $B \in \mathrm{M}_{s,r}(\mathbb{R})$ je **matrica transponirana matrici** A ako za sve dopustive (i, j) vrijedi jednakost:
- $b_{ij} = a_{ji}$.
- Oznaka za transponiranu matricu: A^T (u računalnim programima: A').
- A^T jednostavno dobijemo tako da sve **retke** matrice A zapišemo kao **stupce** matrice A^T u istom poretku.

2.3.8. NAPOMENA

- Transponiranje matrica ima sljedeća svojstva:
- $(A^T)^T = A$, za svaku matricu A;
- $(A + B)^T = A^T + B^T$, za svake dvije matrice A i B koje su istoga tipa;
- $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$, za svake dvije ulančane matrice A i B.

2.3.9. SIMETRIČNA MATRICA

- Matrica A je **simetrična** ako i samo ako vrijedi jednakost:
- $A^T = A$, odnosno $A^T - A = 0$.
- Matrica A reda n je **antisimetrična** ako i samo ako vrijedi jednakost $A^T = -A$, odnosno $A^T + A = 0$.
- **Napomene: 1.)** Jedinična matrica (bilo kojega reda) i bilo koja dijagonalna matrica su simetrične matrice.
- **2.)** Grubo i neprecizno možemo reći: A je simetrična ako i samo ako je njezin i-ti redak jednak i-tom stupcu, za svaki $i = 1, ..., n$.
- **3.)** Ako je A antisimetrična matrica, onda su svi elementi glavne dijagonale jednaki 0. Obratna tvrdnja nije točna.