2.1. MATRICE

1. Odredite tipove i ispišite sve elemente sljedećih matrica:

a) $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}$;

b) $B = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0.2 \\ \frac{4}{3} \end{bmatrix}$;

c) $C = \begin{bmatrix} 2019 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2021 \\ -1 & 2020 & 0 \end{bmatrix}$.

Rješenje:

a) Matrica A je matrica tipa (1,2). Njezini elementi su: $a_{11} = -1$, $a_{12} = 1$.

b) Matrica B je matrica tipa (3,1). Njezini elementi su: $b_{11} = -\frac{1}{2}$, $b_{21} = 0.2$, $b_{31} = \frac{4}{3}$.

c) Matrica C je matrica reda 3. Njezini elementi su: $c_{11} = 2019$, $c_{12} = c_{21} = c_{33} = 0$, $c_{13} = c_{31} = -1$, $c_{22} = 1$, $c_{23} = -2021$, $c_{32} = 2020$.

2. Napišite realnu matricu sa sljedećim svojstvima:

a) A je tipa (2, 3), te vrijedi $a_{11} = a_{22} = 1$ i $a_{ij} = 0$ za sve ostale parove (i, j);

b) B je reda 2, te vrijedi $b_{ij} = i + j$, za sve dopustive uređene parove (i, j);

c) C je reda 3, te vrijedi $c_{ij} = i^j$, za sve dopustive uređene parove (i, j).

Rješenje:

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$;

b) Računamo: $\left.\begin{array}{l} b_{11} = 1 + 1 = 2,\ b_{12} = 1 + 2 = 3, \\ b_{21} = 2 + 1 = 3,\ b_{22} = 2 + 2 = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$;

c) Računamo: $\left.\begin{array}{l} c_{11} = 1^1 = 1,\ c_{12} = 1^2 = 1,\ c_{13} = 1^3 = 1, \\ c_{21} = 2^1 = 2,\ c_{22} = 2^2 = 4,\ c_{23} = 2^3 = 8, \\ c_{31} = 3^1 = 3,\ c_{32} = 3^2 = 9,\ c_{33} = 3^3 = 27 \end{array}\right\} \Rightarrow C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 9 & 27 \end{bmatrix}$.

3. Odredite vrijednosti $x, y, z \in \mathbb{R}$ tako da matrice A i B budu jednake ako su

$$A = \begin{bmatrix} 1 + x \cdot y & y \\ x & 1 - z \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} z & x \cdot z - 1 \\ 1 + y \cdot z & 1 - z^2 \end{bmatrix}.$$

Rješenje:

Iz zadanih podataka dobivamo sustav četiriju jednadžbi s tri nepoznanice:

$$\begin{cases} 1 + x \cdot y = z, \\ y = x \cdot z - 1, \\ x = 1 + y \cdot z, \\ 1 - z = 1 - z^2. \end{cases}$$

Iz četvrte jednadžbe sustava slijedi $z^2 - z = 0$. Odatle je $z_1 = 0$, $z_2 = 1$.

Ako je $z = 0$, onda uvrštavanjem te vrijednosti u svaku od prvih triju jednadžbi dobivamo:

$$\begin{cases} 1 + x \cdot y = 0, \\ y = x \cdot 0 - 1, \\ x = 1 + y \cdot 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + x \cdot y = 0, \\ y = -1, \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1, \; y = -1.$$

Ako je $z = 1$, onda uvrštavanjem te vrijednosti u svaku od prvih triju jednadžbi dobivamo:

$$\begin{cases} 1 + x \cdot y = 1, \\ y = x \cdot 1 - 1, \\ x = 1 + y \cdot 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \cdot y = 0, \\ x - y = 1 \end{cases} \Rightarrow ((x, y) = (0, -1)) \vee ((x, y) = (1, 0)).$$

Dakle, rješenje zadatka je:

$$(x, y, z) = \{(1,0,1), (1,-1,0), (0,-1,1)\}$$

4. Odredite matricu $D = 2 \cdot B - A - \frac{1}{2} \cdot C$ ako su A, B i C matrice reda 2, te vrijedi:

$$\left.\begin{aligned} a_{ij} &= 2 \cdot i - j, \\ b_{ij} &= 2 \cdot j - i, \\ c_{ij} &= (i + j)^2, \end{aligned}\right\} \text{za sve dopustive } (i, j).$$

Rješenje: Odredimo najprije sve elemente matrica A, B i C. Imamo redom:

$$\left.\begin{aligned} a_{11} &= 2 \cdot 1 - 1 = 1,\ a_{12} = 2 \cdot 1 - 2 = 0, \\ a_{21} &= 2 \cdot 2 - 1 = 3,\ a_{22} = 2 \cdot 2 - 2 = 2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix},$$

$$\left.\begin{aligned} b_{11} &= 2 \cdot 1 - 1 = 1,\ b_{12} = 2 \cdot 2 - 1 = 3, \\ b_{21} &= 2 \cdot 1 - 2 = 0,\ b_{22} = 2 \cdot 2 - 2 = 2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},$$

$$\left.\begin{aligned} c_{11} &= (1+1)^2 = 4,\ c_{12} = (1+2)^2 = 9, \\ c_{21} &= (2+1)^2 = 9,\ c_{22} = (2+2)^2 = 16 \end{aligned}\right\} \Rightarrow C = \begin{bmatrix} 4 & 9 \\ 9 & 16 \end{bmatrix}.$$

Zbog toga je:

$$D = 2 \cdot B - A - \frac{1}{2} \cdot C = 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 9 \\ 9 & 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 4.5 \\ 4.5 & 8 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2 - 1 - 2 & 6 - 0 - 4.5 \\ 0 - 3 - 4.5 & 4 - 2 - 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1.5 \\ -7.5 & -6 \end{bmatrix}.$$

2.2. MNOŽENJE MATRICA

1. Izračunajte skalarni umnožak $a \cdot b$ ako su:

a) $a = (1,\ 0)$ i $b = (0,\ 1)$;

b) $a = (2,\ 3,\ 5)$ i $b = \left(\frac{1}{2}, -\frac{2}{3},\ \frac{4}{5}\right)$;

c) $a = (-1,\ 0,\ 1,\ 0)$ i $b = (-2019,\ 2020, -2021,\ 2022)$.

Rješenje:

a) $a \cdot b = (1,\ 0) \cdot (0,\ 1) = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0$;

b) $a \cdot b = (2,\ 3,\ 5) \cdot \left(\frac{1}{2}, -\frac{2}{3},\ \frac{4}{5}\right) = 2 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) + 5 \cdot \frac{4}{5} = 1 - 2 + 4 = 3$;

c) $a \cdot b = (-1,0,1,0) \cdot (-2019,2020,-2021,2022) = (-1) \cdot (-2019) + 1 \cdot (-2021) = -2$.

2. Ispitajte postoji li umnožak $A \cdot B$ i, ako postoji, izračunajte ga ako su:

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} -1 & -2 \end{bmatrix}$;

b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$;

c) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

Rješenje:

a) A i B su istoga tipa ((1, 2)). A ima 2 stupca, a B ima 1 redak. Zbog toga **ne** postoji umnožak $A \cdot B$.

b) A je tipa (1, 2). B je tipa (2, 1). A ima 2 stupca, a B ima 2 retka. Zbog toga postoji umnožak $A \cdot B$. Taj umnožak je matrica tipa (1, 1):

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} = 0 \text{ (nulmatrica reda 1).}$$

c) A je tipa (1, 3). B je matrica reda 3, tj. matrica tipa (3, 3). Zbog toga postoji umnožak $A \cdot B$. Taj umnožak je matrica tipa (1, 3):

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot 1 + 0 \cdot 0 & 1 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 + 0 \cdot 1 & 1 \cdot 0 + (-1) \cdot 0 + 0 \cdot (-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

3. Zadane su matrice $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ i $B=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 0 & -2\end{bmatrix}$.

a) Provjerite jednakost $(A+B)^2 = A^2+2\cdot A\cdot B+B^2$.

b) Vrijedi li jednakost iz **a)** podzadatka za **bilo koje dvije** matrice A i B reda 2? Objasnite svoj odgovor.

Rješenje:

a) Imamo redom:

$$A+B=\begin{bmatrix}1+(-2) & 1+1\\ 0+0 & 1+(-2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 0 & -1\end{bmatrix},$$

$$(A+B)^2=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 0 & -1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 0 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\cdot(-1)+2\cdot 0 & -1\cdot 2+2\cdot(-1)\\ 0\cdot(-1)+(-1)\cdot 0 & 0\cdot 2+(-1)\cdot(-1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -4\\ 0 & 1\end{bmatrix},$$

$$A^2=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\cdot 1+1\cdot 0 & 1\cdot 1+1\cdot 1\\ 0\cdot 1+1\cdot 0 & 0\cdot 1+1\cdot 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix},$$

$$2\cdot A\cdot B=2\cdot\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 0 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 2\\ 0 & 2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 0 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\cdot(-2)+2\cdot 0 & 2\cdot 1+2\cdot(-2)\\ 0\cdot(-2)+2\cdot 0 & 0\cdot 1+2\cdot(-2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4 & -2\\ 0 & -4\end{bmatrix},$$

$$B^2=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 0 & -2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 0 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(-2)\cdot(-2)+1\cdot 0 & (-2)\cdot 1+1\cdot(-2)\\ 0\cdot(-2)+2\cdot 0 & 0\cdot 1+(-2)\cdot(-2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & -4\\ 0 & 4\end{bmatrix},$$

$$A^2+2\cdot A\cdot B+B^2=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-4 & -2\\ 0 & -4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4 & -4\\ 0 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+(-4)+4 & 2+(-2)+(-4)\\ 0+0+0 & 1+(-4)+4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -4\\ 0 & 1\end{bmatrix}\Rightarrow$$

$$(A+B)^2=A^2+2\cdot A\cdot B+B^2.$$

b) Ne vrijedi. Naime,

$$(A+B)^2=A^2+2\cdot A\cdot B+B^2 \Leftrightarrow (A+B)\cdot(A+B)=A^2+2\cdot A\cdot B+B^2 \Leftrightarrow$$
$$A^2+B\cdot A+A\cdot B+B^2=A^2+2\cdot A\cdot B+B^2 \Leftrightarrow B\cdot A=A\cdot B,$$

a posljednja jednakost **nije** istinita za bilo koje dvije matrice reda 2 (množenje matrica općenito **nije** komutativno).

2.3. POSEBNI TIPOVI MATRICA

1. Odredite matricu A^T ako je:

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$;

b) $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$;

c) $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 & 4 \\ -5 & 6 & -7 & 8 \\ -9 & 10 & -11 & 12 \end{bmatrix}$.

Rješenje:

a) $A^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$;

b) $A^T = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$;

c) $A^T = \begin{bmatrix} -1 & -5 & -9 \\ 2 & 6 & 10 \\ -3 & -7 & -11 \\ 4 & 8 & 12 \end{bmatrix}$.

2. Odredite $x, y, z \in \mathbb{R}$ tako da matrica A bude simetrična ako je

$$A = \begin{bmatrix} -2021 & 4 & 5 \\ x+y & 2020 & x+z \\ y+z & 3 & -2019 \end{bmatrix}.$$

Rješenje: Matrica A je simetrična ako i samo ako je $A = A^T$, odnosno ako i samo ako je $A - A^T = 0$. Tako imamo:

$$A - A^T = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -2021 & 4 & 5 \\ x+y & 2020 & x+z \\ y+z & 3 & -2019 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2021 & x+y & y+z \\ 4 & 2020 & 3 \\ 5 & x+z & -2019 \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} -2021-(-2021) & 4-(x+y) & 5-(y+z) \\ x+y-4 & 2020-2020 & x+z-3 \\ y+z-5 & 3-(x+z) & -2019-(-2019) \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 4-(x+y) & 5-(y+z) \\ x+y-4 & 0 & x+z-3 \\ y+z-5 & 3-(x+z) & 0 \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4-(x+y)=0, \\ 5-(y+z)=0, \\ x+y-4=0, \\ x+z-3=0, \\ y+z-5=0, \\ 3-(x+z)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-4=0 \\ x+z-3=0, \\ y+z-5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=4, \\ x+z=3, \\ y+z=5. \end{cases}$$

Zbrojimo li sve tri jednadžbe, dobit ćemo $2 \cdot (x+y+z) = 12$, odnosno $x+y+z=6$. Ako od te jednakosti oduzmemo svaku jednadžbu sustava, dobit ćemo redom $z=2$, $y=3$, $x=1$. Dakle, rješenje zadatka je $(x, y, z) = (1, 3, 2)$.

2.4. DETERMINANTA MATRICE. REGULARNE MATRICE.

1. Zadana je determinanta

$$D=\begin{vmatrix}\sin x & 2\cdot\cos x & 0\\ 0 & 1 & 1\\ \cos x & 1 & 2\cdot\sin x\end{vmatrix}.$$

a) Odredite najmanju i najveću vrijednost determinante *D*.

b) Za koje $x\in\mathbb{R}$ se postiže najmanja vrijednost determinante *D*?

c) Za koje $x\in\mathbb{R}$ se postiže najveća vrijednost determinante *D*?

Rješenje: **a)** Razvojem po drugom retku determinante *D* odredimo njezinu vrijednost. Imamo redom:

$$D=\begin{vmatrix}\sin x & 2\cdot\cos x & 0\\ 0 & 1 & 1\\ \cos x & 1 & 2\cdot\sin x\end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix}\sin x & 0\\ \cos x & 2\cdot\sin x\end{vmatrix}-1\cdot\begin{vmatrix}\sin x & 2\cdot\cos x\\ \cos x & 1\end{vmatrix}=$$
$$=\sin x\cdot 2\cdot\sin x-0\cdot\cos x-(\sin x\cdot 1-2\cdot\cos x\cdot\cos x)=2\cdot\sin^2 x-\sin x+2\cdot\cos^2 x=$$
$$=2\cdot(\sin^2 x+\cos^2 x)-\sin x=2\cdot 1-\sin x=2-\sin x.$$

Za svaki $x\in\mathbb{R}$ vrijedi $-1\le\sin x\le 1$. Množenjem te nejednakosti s (–1) dobivamo $-1\le-\sin x\le 1$. Svakoj strani ove nejednakosti dodamo 2, pa dobijemo:

$$-1+2\le-\sin x+2\le 1+2\Leftrightarrow 1\le D\le 3\Leftrightarrow D\in[1,3].$$

Dakle, najmanja vrijednost determinante *D* jednaka je 1, a najveća 3.

b) Vrijednost determinante *D* jednaka je 1 ako i samo je $\sin x=1$. Odavde slijedi $x=\frac{\pi}{2}+2\cdot k\cdot\pi=(4\cdot k+1)\cdot\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}.$

c) Vrijednost determinante *D* jednaka je 3 ako i samo je $\sin x=-1$. Odavde slijedi $x=\frac{-\pi}{2}+2\cdot k\cdot\pi=(4\cdot k-1)\cdot\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}.$

2. Odredite sve $a \in \mathbb{R}$ za koje je matrica A regularna ako je:

a) $A = \begin{bmatrix} a-1 & 3 \\ 5 & a+1 \end{bmatrix}$;

b) $A = \begin{bmatrix} a & 0 & -a \\ a^2 & 1 & a^3 \\ 2 & 0 & 1-a \end{bmatrix}$.

Rješenje: Matrica A je regularna ako i samo ako je njezina determinanta različita od nule. Zbog toga ćemo traženi skup dobiti tako da iz skupa $\mathbb{R}$ „izbacimo“ sve realne brojeve za koje je determinanta matrice A jednaka nuli.

a) $\det(A) = \begin{vmatrix} a-1 & 3 \\ 5 & a+1 \end{vmatrix} = (a-1)\cdot(a+1) - 5\cdot 3 = a^2 - 1 - 15 = a^2 - 16 \Rightarrow a^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a_1 = -4,\ a_2 = 4 \Rightarrow S = \mathbb{R} \setminus \{-4, 4\}$.

b) $\det(A) = \begin{vmatrix} a & 0 & -a \\ a^2 & 1 & a^3 \\ 2 & 0 & 1-a \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} a & -a \\ 2 & 1-a \end{vmatrix} = a\cdot(1-a) - 2\cdot(-a) = a - a^2 + 2\cdot a = a - a^2 \Rightarrow$

$-a^2 + a = 0 \Leftrightarrow a_1 = 0,\ a_2 = 1 \Rightarrow S = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.

3. Neka je $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ regularna matrica. Dokažite da je tada:

$$A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}\cdot\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Rješenje: Treba provjeriti jednakosti $A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=E.$ Imamo redom:

$$A\cdot A^{-1}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\cdot\left(\frac{1}{\det(A)}\cdot\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}\right)=\frac{1}{\det(A)}\cdot\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}\right)=$$
$$=\frac{1}{\det(A)}\cdot\begin{bmatrix} a\cdot d-b\cdot c & -a\cdot b+b\cdot a \\ c\cdot d-d\cdot c & -b\cdot c+d\cdot a \end{bmatrix}=\frac{1}{\det(A)}\cdot\begin{bmatrix} \det(A) & 0 \\ 0 & \det(A) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=E.$$

$$A^{-1}\cdot A=\left(\frac{1}{\det(A)}\cdot\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}\right)\cdot\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=\frac{1}{\det(A)}\cdot\left(\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right)=$$
$$=\frac{1}{\det(A)}\cdot\begin{bmatrix} d\cdot a-b\cdot c & d\cdot b-b\cdot d \\ -c\cdot a+a\cdot c & -c\cdot b+a\cdot d \end{bmatrix}=\frac{1}{\det(A)}\cdot\begin{bmatrix} \det(A) & 0 \\ 0 & \det(A) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=E.$$

Primjedba 1. Budući da je A, prema pretpostavci zadatka, regularna matrica, to znači da je $\det(A)\neq 0.$ Zbog toga tu nejednakost nismo posebno isticali prilikom rješavanja zadatka.

Primjedba 2. Ne postoji neka dovoljno jednostavna formula za inverz regularne matrice reda jednakoga ili većega od 3. Zbog toga se taj inverz određuje pomoću elementarnih transformacija (preporučljivija varijanta) ili adjunkte (bitno sporija varijanta, naročito u slučaju matrica relativno velikih redova).

4. Ispitajte jesu li sljedeće matrice regularne i, ako jesu, odredite njihov inverz:

a) $A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$;

b) $B=\begin{bmatrix}2 & 7 & 0\\ -1 & 2 & 1\\ 1 & 3 & 0\end{bmatrix}$.

Rješenje: Matrica je regularna ako i samo ako je njezina determinanta različita od nule. U tom slučaju postoji njezin inverz i on je jedinstven.

a) $\det(A)=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1\cdot 1-0\cdot(-1)=1\Rightarrow A$ je regularna.

$$A^{-1}=\frac{1}{1}\cdot\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}=1\cdot\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}.$$

b) $\det(B)=\begin{vmatrix}2 & 7 & 0\\ -1 & 2 & 1\\ 1 & 3 & 0\end{vmatrix}=(-1)\cdot\begin{vmatrix}2 & 7\\ 1 & 3\end{vmatrix}=(-1)\cdot(2\cdot 3-1\cdot 7)=1\Rightarrow B$ je regularna.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}2 & 7 & 0 & 1 & 0 & 0\\ -1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]\underbrace{\sim}_{I.\leftrightarrow III.}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1\\ -1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 2 & 7 & 0 & 1 & 0 & 0\end{array}\right]\underbrace{\sim}_{I.+II.\to II.}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 5 & 1 & 0 & 1 & 1\\ 2 & 7 & 0 & 1 & 0 & 0\end{array}\right]\underbrace{\sim}_{(-2)\cdot I.+III.\to III.}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 5 & 1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -2\end{array}\right]\underbrace{\sim}_{II.\leftrightarrow III.}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -2\\ 0 & 5 & 1 & 0 & 1 & 1\end{array}\right]\underbrace{\sim}_{(-3)\cdot II+I\to I}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & -3 & 0 & 7\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -2\\ 0 & 5 & 1 & 0 & 1 & 1\end{array}\right]\underbrace{\sim}_{(-5)\cdot II+III\to III}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & -3 & 0 & 7\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 1 & -5 & 1 & 11\end{array}\right]\Rightarrow B^{-1}=\begin{bmatrix}-3 & 0 & 7\\ 1 & 0 & -2\\ -5 & 1 & 11\end{bmatrix}.$$

5. Odredite matricu A ako je $\left(2\cdot A^{-1}\right)^T=\begin{bmatrix}-2 & 4\\ 3 & -7\end{bmatrix}$.

Rješenje: Označimo $B:=\begin{bmatrix}-2 & 4\\ 3 & -7\end{bmatrix}$. Iz jednakosti $\left(2\cdot A^{-1}\right)^T=B$ izrazimo matricu A.

Imamo redom:

$$\left(2\cdot A^{-1}\right)^T=B\Leftrightarrow\left(\left(2\cdot A^{-1}\right)^T\right)^T=B^T\Leftrightarrow 2\cdot A^{-1}=B^T\Leftrightarrow A^{-1}=\frac{1}{2}\cdot B^T\Leftrightarrow\left(A^{-1}\right)^{-1}=\left(\frac{1}{2}\cdot B^T\right)^{-1}\Leftrightarrow$$

$$A=\left(\frac{1}{2}\cdot B^T\right)^{-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}\cdot\left(B^T\right)^{-1}=2\cdot\left(\begin{bmatrix}-2 & 4\\ 3 & -7\end{bmatrix}^T\right)^{-1}=2\cdot\left(\begin{bmatrix}-2 & 3\\ 4 & -7\end{bmatrix}\right)^{-1}=$$

$$=2\cdot\frac{1}{(-2)\cdot(-7)-4\cdot 3}\cdot\begin{bmatrix}-7 & -3\\ -4 & -2\end{bmatrix}=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\begin{bmatrix}-7 & -3\\ -4 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-7 & -3\\ -4 & -2\end{bmatrix}.$$

6. Zadane su matrice $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{bmatrix}$ i $B=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 5 & 8\end{bmatrix}$. Riješite jednadžbu $A\cdot X=B$.

Rješenje: Pomnožimo zadanu jednadžbu slijeva s A^{-1}. Dobijemo:

$$A^{-1}\cdot(A\cdot X)=A^{-1}\cdot B \Leftrightarrow (A^{-1}\cdot A)\cdot X=A^{-1}\cdot B \Leftrightarrow E\cdot X=A^{-1}\cdot B \Leftrightarrow X=A^{-1}\cdot B.$$

Tako sada imamo:

$$X=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{bmatrix}^{-1}\cdot\begin{bmatrix}1 & 2\\ 5 & 8\end{bmatrix}=\frac{1}{1\cdot 1-2\cdot 0}\cdot\begin{bmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 2\\ 5 & 8\end{bmatrix}=1\cdot\begin{bmatrix}1\cdot 1+0\cdot 5 & 1\cdot 2+0\cdot 8\\ (-2)\cdot 1+1\cdot 5 & (-2)\cdot 2+1\cdot 8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}.$$

7. Zadane su matrice $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ i $B=\begin{bmatrix} -3 & 10 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$. Riješite jednadžbu: $X \cdot A = B$.

Rješenje: Pomnožimo zadanu jednadžbu zdesna s A^{-1}. Dobijemo:

$$(X \cdot A) \cdot A^{-1} = B \cdot A^{-1} \Leftrightarrow X \cdot \left(A \cdot A^{-1}\right) = B \cdot A^{-1} \Leftrightarrow X \cdot E = B \cdot A^{-1} \Leftrightarrow X = B \cdot A^{-1}.$$

Tako sada imamo:

$$X=\begin{bmatrix} -3 & 10 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 10 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \left(\frac{1}{0 \cdot 2-(-1)\cdot 1} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right) = 1 \cdot \begin{bmatrix} -3 & 10 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} (-3)\cdot 2+10\cdot 1 & (-3)\cdot(-1)+10\cdot 0 \\ (-1)\cdot 2+4\cdot 1 & (-1)\cdot(-1)+4\cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$