# 2.4.

# DETERMINANTA MATRICE. REGULARNE MATRICE

# 2.4.1. DETERMINANTA MATRICE

- I u ovoj točki promatramo određena svojstva *realnih* matrica.
- Radi jednostavnijega ispitivanja svojstava *kvadratnih* matrica, svakoj kvadratnoj matrici obično se pridružuje realan broj koji se naziva *determinanta* te matrice.
- Svrha takvoga pridruživanja je dobiti određene informacije o nekim svojstvima te matrice.
- U općem je slučaju pojam determinante vrlo složeno definirati formulom/pravilom.
- Zbog toga ćemo se ograničiti na slučajeve matrica reda 2 i reda 3.

# 2.4.2. DETERMINANTA MATRICE REDA 2

- Determinanta matrice reda 2 (kraće: determinanta reda 2) je *funkcija* $d : \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ definirana pravilom:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{vmatrix} := d\left(\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}\right) = a_1 \cdot a_4 - a_2 \cdot a_3$$

- Vrijednost determinante reda 2 može biti *bilo koji* realan broj.

# 2.4.3. DETERMINANTA MATRICE REDA 3

- *Determinanta* matrice reda 3 (kraće: *determinanta reda* 3) je funkcija $d : \mathrm{M}_3(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ definirana pravilom:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} := d\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\right) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} -$$
$$-(a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13} + a_{32} \cdot a_{23} \cdot a_{11} + a_{33} \cdot a_{21} \cdot a_{12})$$

- I vrijednost determinante reda 3 može biti bilo koji realan broj.
- Ako je iz konteksta jasno na što se misli, umjesto „vrijednost determinante” kraće (i nepreciznije!) se govori samo „determinanta”.

# 2.4.4. LAPLACEOV RAZVOJ DETERMINANTE

- *Determinanta reda $n$* je zapravo funkcija koja matrici $A$ reda $n$ pridružuje neki realan broj.
- Takve se determinante najčešće računaju tzv. *Laplaceovim razvojem*.
- Ideja Laplaceova razvoja je svesti računanje determinanti reda $n$ na računanje točno $n$ determinanti reda $(n - 1)$.

# 2.4.5. ALGORITAM LAPLACEOVA RAZVOJA DETERMINANTE

- **Ulaz**: determinanta reda $n$
- **Izlaz**: vrijednost determinante reda $n$
- **Korak 1.** Elementu na presjeku prvoga retka i prvoga stupca pridružiti predznak +. Krećući se prema kraju retka, ostalim elementima naizmjence pridružiti predznake – i +. Kad se dođe do kraja jednoga retka, prijeći na element u presjeku sljedećega retka i prvoga stupca nastavljajući naizmjenično pridruživanje predznaka – i + (kao da su svi brojevi u istom retku).
- **Korak 2.** Odabrati redak/stupac po kojemu se želi razviti determinanta.
- **Korak 3.** *Svakom* elementu u odabranom retku/stupcu pridružiti determinantu koja se dobije kad se iz početne determinante izostave cijeli redak i cijeli stupac kojemu pripada dotični element.

# 2.4.5. ALGORITAM LAPLACEOVA RAZVOJA DETERMINANTE

- **Korak 4.** Za svaki element u odabranom retku/stupcu izračunati umnožak toga elementa i pridružene determinante. Umnošku pridružiti predznak dotičnoga elementa dobiven u Koraku 1.
- **Korak 5.** Zbrojiti sve umnoške dobivene u Koraku 4. pazeći na pripadne predznake. Dobiveni rezultat jednak je vrijednosti polazne determinante.
- **Napomena**: Praktično je najjednostavnije birati one retke/stupce u kojima se pojavljuje najveći broj nula ili u kojima se pojavljuju (prema kriteriju apsolutne vrijednosti) što manji realni brojevi.

# 2.4.6. NEKA KORISNA SVOJSTVA DETERMINANTE

- 1. Ako je jedan redak/stupac determinante nulredak/nulstupac, vrijednost determinante jednaka je nuli.
- 2. Ako determinanta sadrži barem dva jednaka retka i/li barem dva jednaka stupca, njezina vrijednost jednaka je nuli.
- **Oprez**: Tvrdnja nije točna u slučaju u kojemu se podudaraju jedan redak i jedan stupac.
- 3. Zamjenom dvaju redaka ili stupaca determinante mijenja se njezin predznak.
- **Oprez**: Retke nije dozvoljeno zamijeniti sa stupcima ili obrnuto.
- 4. Dodavanjem jednoga retka/stupca determinante nekom drugom retku/stupcu determinante njezina se vrijednost neće promijeniti.

# 2.4.6. NEKA KORISNA SVOJSTVA DETERMINANTE

- 5. Pomnožimo li *svaki* element nekoga retka/stupca nekim realnim brojem različitim od nule, pa tako dobiven redak/stupac dodamo nekom drugom retku/stupcu, vrijednost determinante se neće promijeniti.
- 6. *Glavnom dijagonalom* determinante reda $n$ nazivamo skup $\{a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}\}$. Ako je pripadna matrica gornja trokutasta ili donja trokutasta, onda je determinanta jednaka umnošku svih elemenata na glavnoj dijagonali:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

# 2.4.7. BINET-CAUCHYJEV TEOREM

- Za bilo koje dvije kvadratne matrice $A$ i $B$ istoga reda vrijedi sljedeća jednakost:
- $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$.
- Ova jednakost poznata je kao *Binet-Cauchyjev teorem*.
- Može se pokazati da vrijedi jednakost:
- $\det(A^n) = (\det(A))^n, \forall n \in \mathbb{N}$.

# 2.4.8. INVERZ MATRICE

- Neka je $A$ matrica reda $n$.
- Ako postoji matrica $B$ takva da vrijedi jednakost
- $A \cdot B = B \cdot A = E$,
- kažemo da je $B$ matrica inverzna matrici A (ili kraće: inverz matrice A).
- Standardna oznaka za inverz matrice $A$ je $A^{-1}$.

# 2.4.9. NAPOMENE

- 1. Ako postoji, inverz matrice reda $n$ je (također) matrica reda $n$.
- 2. Iz definicije inverza matrice izravno slijedi da je inverz matrice $A^{-1}$ matrica $A$, tj. vrijedi jednakost:
- $(A^{-1})^{-1} = A$.
- 3. Ako inverz matrice uopće postoji, onda je on jedinstven.

# 2.4.10. REGULARNA MATRICA

- Svaku matricu reda $n$ koja ima inverz nazivamo **regularna matrica.**
- Za takvu matricu kažemo i da je **invertibilna.**
- Matricu reda $n$ koja nije regularna nazivamo **singularna matrica.**
- **Problem:** Ispitati je li neka matrica regularna i, ako jest, odrediti njezin inverz.

# 2.4.11. KRITERIJ REGULARNOSTI MATRICE

- Teorem 1. Kvadratna matrica $A$ je regularna ako i samo ako je njezina determinanta različita od nule.
- Korolar 1. Kvadratna matrica $A$ je singularna ako i samo ako je njezina determinanta jednaka 0.
- Pravilo: Ispitati regularnost matrice $\Leftrightarrow$ izračunati njezinu determinantu i utvrditi je li ona različita od 0.
- Ako jest, matrica je regularna.
- Ako nije, matrica je singularna.

# 2.4.12. ELEMENTARNE TRANSFORMACIJE

- U svrhu lakšega određivanja inverza regularne matrice definiramo sljedeće *elementarne transformacije* nad recima te matrice:
- 1. Množenje *bilo kojega* retka matrice realnim brojem različitim od nule.
- 2. Zamjena dvaju redaka matrice.
- 3. Dodavanje jednoga retka matrice drugom retku i pisanje dobivenoga zbroja u taj drugi redak.
- 1. i 3. objedinjujemo u:
- 4. Množenje jednoga retka matrice nekim realnim brojem različitim od nule i dodavanje tako dobivenoga retka drugom retku matrice. (Rezultat pišemo u tom drugom retku.)

## 2.4.13. ODREĐIVANJE INVERZA MATRICE POMOĆU ELEMENTARNIH TRANSFORMACIJA

- Pretpostavka: $A$ regularna matrica reda $n$
- Korak 1. Formirati matricu $C=\left[A \quad | \quad E_n\right]$.
- Korak 2. Elementarnim transformacijama nad recima matrice $C$ svesti tu matricu na oblik

$$D=\left[E_n \quad | \quad B\right].$$

- .
- Korak 3. Matrica $B$ je inverz matrice $A$.
- Oprez: U Koraku 2. nisu dozvoljene elementarne transformacije nad stupcima matrice $C$!
- Za velike $n$ ovaj postupak je bitno brži i jednostavniji od “klasičnoga” postupka određivanja inverza pomoću tzv. *adjunkte*.

# 2.4.14. NAPOMENE

- Za svake dvije regularne matrice $A$ i $B$ reda $n$, te svaki $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ vrijede sljedeće jednakosti:

**a)** $\det\left(A^{-1}\right) = \dfrac{1}{\det(A)}$;

**b)** $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$;

**c)** $(\alpha \cdot A)^{-1} = \dfrac{1}{\alpha} \cdot A^{-1}$;

**d)** $\left(A^{-1}\right)^T = \left(A^T\right)^{-1}$.

# 2.4.15. RJEŠAVANJE CRAMEROVIH SUSTAVA POMOĆU INVERZA MATRICE

- Jedna od tipičnih primjena inverza matrice odnosi se na rješavanje tzv. *Cramerovih sustava*. To su sustavi od $n$ linearnih jednadžbi s $n$ nepoznanica koji imaju jedinstveno rješenje.
- Osnovna ideja je sustavu

$$\begin{aligned} a_{11} \cdot x_1 + \ldots + a_{1n} \cdot x_n &= b_1 \\ &\vdots \\ a_{n1} \cdot x_1 + \ldots + a_{nn} \cdot x_n &= b_n \end{aligned}$$

- pridružiti matrice

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix},$$

- pa zapisati taj sustav u obliku: $A \cdot X = B$.
- Ako je sustav Cramerov, onda je matrica $A$ regularna, pa množenjem gornje jednakosti slijeva s $A^{-1}$ dobivamo:
- $X = A^{-1} \cdot B$.

# 2.4.16. NAPOMENA

- Opisana metoda „funkcionira” samo za Cramerove sustave, a praktična je za sustave s relativno malim brojem nepoznanica.
- Bilo koji sustav od $m$ linearnih jednadžbi s $n$ nepoznanica najčešće se rješava tzv. *Gauss – Jordanovom metodom.*
- Ona u svojoj osnovi ima elementarne transformacije iz točke 2.4.12.
- Detaljnije o načinima rješavanja linearnih sustava uči se u predmetu *Numerička matematika* (4. semestar).