TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU

POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE

ELEKTROTEHNIČKI ODJEL

MATEMATIKA 1

23. domaća zadaća: **OSNOVNI POUČCI DIFERENCIJALNOGA RAČUNA**

1. Provjerite da funkcija f definirana na segmentu $[a, b]$ zadovoljava uvjete Rolleova poučka, pa odredite barem jedan $c \in \langle a, b\rangle$ takav da je $f'(c) = 0$ ako je:

a) $f(x) = x^2 - 1$, $a = -1$, $b = 1$;
b) $f(x) = 4 - x^2$, $a = -2$, $b = 2$;
c) $f(x) = x^2 - x$, $a = 0$, $b = 1$;
d) $f(x) = 2 \cdot x - x^2$, $a = 0$, $b = 2$;
e) $f(x) = x^2 - x - 6$, $a = -2$, $b = 3$;
f) $f(x) = x^2 + 2 \cdot x - 8$, $a = -4$, $b = 2$;
g) $f(x) = 6 \cdot x^2 - 5 \cdot x + 1,\ a = \frac{1}{3},\ b = \frac{1}{2}$;
h) $f(x) = 12 \cdot x^2 - 5 \cdot x - 3,\ a = -\frac{1}{3},\ b = \frac{3}{4}$;
i) $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$, $a = -1$, $b = 1$;
j) $f(x) = x^3 + x^2 - 8 \cdot x - 12$, $a = -2$, $b = 3$;
k) $f(x) = \sin x$, $a = 0$, $b = \pi$;
l) $f(x) = \cos x,\ a = -\frac{\pi}{2},\ b = \frac{\pi}{2}$;
m) $f(x) = \ln(2 - x^2)$, $a = -1$, $b = 1$;
n) $f(x) = \ln(10 - x^2)$, $a = -3$, $b = 3$;
o) $f(x) = \ln(7 - x - x^2)$, $a = -3$, $b = 2$;
p) $f(x) = \ln(x^3 + x^2 - 5 \cdot x + 4)$, $a = -3$, $b = 1$;
q) $f(x) = \ln(x^3 - 3 \cdot x^2 + 5)$, $a = -1$, $b = 2$;
r) $f(x) = \sqrt{x - x^2}$, $[a, b] = D_f$;
s) $f(x) = \sqrt{6 - 5 \cdot x - x^2}$, $[a, b] = D_f$;
t) $f(x) = e^{25 - x^2} - 1$, $a = -5$, $b = 5$;
u) $f(x) = e^{\sqrt{4 \cdot x - x^2}} - 1$, $[a, b] = D_f$;
v) $f(x) = e^{\sqrt{9 - 8 \cdot x - x^2}} - 1$, $[a, b] = D_f$;
w) $f(x) = (x^2 - 2 \cdot x - 2) \cdot e^x,\ a = 1 - \sqrt{3},\ b = \sqrt{3} + 1$;
x) $f(x) = (3 - x^2) \cdot e^{-x},\ a = -\sqrt{3},\ b = \sqrt{3}$;
y) $f(x) = \dfrac{x^2 - 25}{x^2 - 36}$, $a = -5$, $b = 5$;
z) $f(x) = \dfrac{4 - x^2}{x^2 + 1}$, $a = -2$, $b = 2$.

MATEMATIKA 1

23. domaća zadaća: **OSNOVNI POUČCI DIFERENCIJALNOGA RAČUNA**

2. Zadovoljava li realna funkcija $f(x) = 4 - \sqrt[3]{x^2}$ definirana na segmentu [–8, 8] uvjete Rolleova poučka? Ako da, odredite barem jedan $c \in \langle -8, 8\rangle$ takav da je $f'(c) = 0$. Ako ne, obrazložite svoj odgovor.

3. Zadovoljava li realna funkcija $f(x) = \operatorname{ctg} x$ definirana na segmentu $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\cdot\pi}{2}\right]$ uvjete Rolleova poučka? Ako da, odredite barem jedan $c \in \left\langle\frac{\pi}{2}, \frac{3\cdot\pi}{2}\right\rangle$ takav da je $f'(c) = 0$. Ako ne, obrazložite svoj odgovor.

4. Zadana je realna funkcija $f(x) = |\cos x|$ čija je domena $D_f = [0, \pi]$. Postoji li $c \in \langle 0, \pi\rangle$ takav da je tangenta povučena na graf funkcije $f(x)$ u točki $T = (c, f(c))$ usporedna s pravcem kroz točke $A = (0, f(0))$ i $B = (\pi, f(\pi))$? Ako postoji, odredite jednadžbu te tangente. Ako ne postoji, obrazložite svoj odgovor.

5. Zadana je realna funkcija $f(x) = \sqrt[3]{(x-4)^2}$ čija je domena $D_f = [0, 8]$. Postoji li $c \in$ $\in \langle 0, 8\rangle$ takav da je tangenta povučena na graf funkcije $f(x)$ u točki $T = (c, f(c))$ usporedna s pravcem kroz točke $A = (0, f(0))$ i $B = (8, f(8))$? Ako postoji, odredite jednadžbu te tangente. Ako ne postoji, obrazložite svoj odgovor.

6. **a)** Realna funkcija $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definirana je propisom

$$f(x) = \prod_{k=0}^{2011} (x-k).$$

Odredite ukupan broj međusobno različitih nultočaka funkcije $f'(x)$. (*Naputak*: Promatrajte funkciju f na segmentima $[k, k+1]$, za $k = 0, 1, \ldots, 2011$, i primijenite Rolleov poučak.)

b) Realna funkcija $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definirana je propisom

$$f(x) = \prod_{k=0}^{n} (x-k).$$

Odredite ukupan broj međusobno različitih nultočaka funkcije $f'(x)$ kao funkciju argumenta n.

7. Neka je f realna funkcija neprekidna na segmentu $[a, b]$ i derivabilna na intervalu $\langle a, b\rangle$. Pokažite da realna funkcija F definirana na segmentu $[a, b]$ propisom

MATEMATIKA 1

23. domaća zadaća: **OSNOVNI POUČCI DIFERENCIJALNOGA RAČUNA**

$$F(x) := \begin{vmatrix} x & f(x) & 1 \\ b & f(b) & 1 \\ a & f(a) & 1 \end{vmatrix}$$

zadovoljava uvjete Rolleova poučka. Primijenite taj poučak na navedenu funkciju i odatle izvedite Lagrangeov poučak.

8. Provjerite da realna funkcija $f(x)$ definirana na segmentu $[a, b]$ zadovoljava uvjete Lagrangeova poučka, pa (s točnošću od 10^{-5}) odredite barem jedan $c \in \langle a, b\rangle$ takav da je $f(b) - f(a) = (b - a) \cdot f'(c)$ ako je:

a) $f(x) = x^2$, $a = 0$, $b = 1$;
b) $f(x) = -x^2$, $a = -1$, $b = 0$;
c) $f(x) = x^2 - x$, $a = 1$, $b = 4$;
d) $f(x) = 4 \cdot x - x^2$, $a = -2$, $b = 8$;
e) $f(x) = x^2 + x + 1$, $a = -3$, $b = 1$;
f) $f(x) = 2 - x - x^2$, $a = -2$, $b = 1$;
g) $f(x) = x^3 + x$, $a = -1$, $b = 2$;
h) $f(x) = x - x^3$, $a = -2$, $b = 1$;
i) $f(x) = \sin(2 \cdot x)$, $a = -\pi$, $b = \dfrac{\pi}{2}$;
j) $f(x) = x + \sin x$, $a = 0$, $b = \pi$;
k) $f(x) = \cos(3 \cdot x)$, $a = \dfrac{\pi}{2}$, $b = \pi$;
l) $f(x) = 2 \cdot x - \cos x$, $a = -\pi$, $b = \pi$;
m) $f(x) = \operatorname{tg}(4 \cdot x)$, $a = 0$, $b = \dfrac{\pi}{16}$;
n) $f(x) = x + \operatorname{tg} x$, $a = 0$, $b = 1$;
o) $f(x) = \operatorname{ctg}(5 \cdot x)$, $a = \dfrac{\pi}{20}$, $b = \dfrac{\pi}{10}$;
p) $f(x) = x - \operatorname{ctg} x$, $a = 1$, $b = 2$;
q) $f(x) = e^x$, $a = 0$, $b = 1$;
r) $f(x) = e^{-2 \cdot x}$, $a = -1$, $b = 2$;
s) $f(x) = e^x + x + 1$, $a = 0$, $b = 1$;
t) $f(x) = 3 \cdot e^{x+1} - 6 \cdot x + 1$, $a = -1$, $b = 0$;
u) $f(x) = 2 \cdot e^{4-x} + x + 1$, $a = 0$, $b = 1$;
v) $f(x) = \ln x$, $a = 1$, $b = 2$;
w) $f(x) = \ln x + x$, $a = 1$, $b = 2$;

MATEMATIKA 1

23. domaća zadaća: **OSNOVNI POUČCI DIFERENCIJALNOGA RAČUNA**

x) $f(x) = \ln(2 \cdot x) - 2 \cdot x,\ a = \frac{1}{2},\ b = \frac{e}{2}$;

y) $f(x) = \sqrt{x}, a = 1, b = 4$;

z) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}, a = 1, b = 8$.

9. Neka je $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ funkcija derivabilna na $\langle a, b\rangle$ i takva da za svaki $x \in \langle a, b\rangle$ vrijedi $f'(x) = 0$. Primjenom Lagrangeova poučka dokažite da tada postoji realan broj c takav da je $f(x) = c$, za svaki $c \in [a, b]$. Izvedite odatle da je $f'(x) = 0$ (na $[a, b]$) ako i samo ako je f konstantna funkcija (na $[a, b]$).

10. a) Neka je $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ funkcija derivabilna na $\langle a, b\rangle$ i takva da za svaki $x \in \langle a, b\rangle$ vrijedi $f'(x) > 0$. Primjenom Lagrangeova poučka dokažite da je tada f strogo rastuća funkcija na $\langle a, b\rangle$. Izvedite odatle da je f strogo rastuća na $\langle a, b\rangle$ ako i samo ako je $f'(x) > 0$ za svaki $x \in \langle a, b\rangle$.

b) Neka je $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ funkcija derivabilna na $\langle a, b\rangle$ i takva da za svaki $x \in \langle a, b\rangle$ vrijedi $f'(x) < 0$. Primjenom Lagrangeova poučka dokažite da je tada f strogo padajuća funkcija na $\langle a, b\rangle$. Izvedite odatle da je f strogo padajuća na $\langle a, b\rangle$ ako i samo ako je $f'(x) <$ < 0 za svaki $x \in \langle a, b\rangle$.

11. Dokažite da postoji barem jedan $c \in \langle 1, 3\rangle$ takav da je tangenta povučena na graf funkcije $f(x) = x^2 - 1$ u točki $C = (c, f(c))$ usporedna s pravcem kroz točke $A = (1, f(1))$ i $B = (3, f(3))$. Odredite sve takve vrijednosti c, pa napišite jednadžbu spomenute tangente u svakom pojedinom slučaju.

12. Dokažite da postoji barem jedan $c \in \langle 0, 2\rangle$ takav da je tangenta povučena na graf funkcije $f(x) = x^3$ u točki $C = (c, f(c))$ usporedna s pravcem kroz točke $A = (0, f(0))$ i $B = (2, f(2))$. Odredite sve takve vrijednosti c, pa napišite jednadžbu spomenute tangente u svakom pojedinom slučaju.

13. Dokažite da postoji barem jedan $c \in \langle 1, 4\rangle$ takav da je tangenta povučena na graf funkcije $f(x) = 2 \cdot \sqrt{x}$ u točki $C = (c, f(c))$ usporedna s pravcem kroz točke $A = (1, f(1))$ i $B = (4, f(4))$. Odredite sve takve vrijednosti c, pa napišite jednadžbu spomenute tangente u svakom pojedinom slučaju.

14. Dokažite da postoji barem jedan $c \in \langle 8, 27\rangle$ takav da je tangenta povučena na graf funkcije $f(x) = 6 \cdot \sqrt[3]{x}$ u točki $C = (c, f(c))$ usporedna s pravcem kroz točke $A = (8, f(8))$ i $B = (27, f(27))$. Odredite sve takve vrijednosti c, pa napišite jednadžbu spomenute tangente u svakom pojedinom slučaju.

TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU
POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE
ELEKTROTEHNIČKI ODJEL

MATEMATIKA 1

23. domaća zadaća: **OSNOVNI POUČCI DIFERENCIJALNOGA RAČUNA**

15. Dokažite da postoji barem jedan $c \in \langle \ln 2, \ln 3\rangle$ takav da je tangenta povučena na graf funkcije $f(x) = e^x$ u točki $C = (c, f(c))$ usporedna s pravcem kroz točke $A = (\ln 2, f(\ln 2))$ i $B = (\ln 3, f(\ln 3))$. Odredite sve takve vrijednosti c, pa napišite jednadžbu spomenute tangente u svakom pojedinom slučaju.

16. Dokažite da postoji barem jedan $c \in \langle e, e^2\rangle$ takav da je tangenta povučena na graf funkcije $f(x) = \ln x$ u točki $C = (c, f(c))$ usporedna s pravcem kroz točke $A = (e, f(e))$ i $B = (e^2, f(e^2))$. Odredite sve takve vrijednosti c, pa napišite jednadžbu spomenute tangente u svakom pojedinom slučaju.

17. Dokažite da postoji barem jedan $c \in \left\langle \frac{\pi}{2}, \frac{7\cdot\pi}{2}\right\rangle$ takav da je tangenta povučena na graf funkcije $f(x) = \sin x$ u točki $C = (c, f(c))$ usporedna s pravcem kroz točke $A = \left(\frac{\pi}{2}, f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$ i $B = \left(\frac{7\cdot\pi}{2}, f\left(\frac{7\cdot\pi}{2}\right)\right)$. Odredite sve takve vrijednosti c, pa napišite jednadžbu spomenute tangente u svakom pojedinom slučaju.

18. Dokažite da postoji barem jedan $c \in \langle -\pi, 2\cdot\pi\rangle$ takav da je tangenta povučena na graf funkcije $f(x) = \cos x$ u točki $C = (c, f(c))$ usporedna s pravcem kroz točke $A = (-\pi, f(-\pi))$ i $B = (2\cdot\pi, f(2\cdot\pi))$. Odredite sve takve vrijednosti c, pa napišite jednadžbu spomenute tangente u svakom pojedinom slučaju.

19. Brzi vlak je prešao udaljenost od Zagreba do Vinkovaca prosječnom brzinom od 80 km/h. Pokažite da postoji barem jedan trenutak (te vožnje) u kojemu je stvarna brzina gibanja vlaka iznosila 80 km/h.

20. Provjerite da realne funkcije $f(x)$ i $g(x)$ definirane na segmentu $[a, b]$ zadovoljavaju uvjete Cauchyjeva poučka, pa (s točnošću od 10^{-5}) odredite barem jednu vrijednost $c \in \langle a, b\rangle$ takvu da vrijedi jednakost $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$ ako je:

a) $f(x) = x^2$, $g(x) = x + 1$, $a = 0$, $b = 1$;
b) $f(x) = -x^2$, $g(x) = 2\cdot x - 1$, $a = -1$, $b = 3$;
c) $f(x) = x^2 + x + 1$, $g(x) = 1 - x$, $a = -1$, $b = 1$;
d) $f(x) = 3 - 2\cdot x - x^2$, $g(x) = 4\cdot x + 2011$, $a = -4$, $b = 2$;
e) $f(x) = x^3 - 1$, $g(x) = x^2 + 1$, $a = 0$, $b = 1$;
f) $f(x) = x^2 - 1$, $g(x) = x^3 + 1$, $a = -1$, $b = 0$;
g) $f(x) = x^3 + x - 1$, $g(x) = x^2 + x + 1$, $a = -1$, $b = 1$;
h) $f(x) = x^2 + 2\cdot x - 3$, $g(x) = x^3 + x$, $a = 0$, $b = 2$;
i) $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$, $g(x) = x^2 + x + 1$, $a = -1$, $b = 2$;
j) $f(x) = x^2 - x - 1$, $g(x) = x^3 - x^2 - x - 1$, $a = 0$, $b = 2$;

TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU
POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE
ELEKTROTEHNIČKI ODJEL

MATEMATIKA 1

23. domaća zadaća: **OSNOVNI POUČCI DIFERENCIJALNOGA RAČUNA**

k) $f(x)=\sqrt{x},\ g(x)=\sqrt[3]{x},\ a=0,\ b=1;$

l) $f(x)=\sqrt[3]{x^2},\ g(x)=x\cdot\sqrt{x},\ a=1,\ b=64;$

m) $f(x)=x+\frac{1}{x},\ g(x)=x-\frac{1}{x},\ a=1,\ b=2;$

n) $f(x)=\frac{x+1}{x^2},\ g(x)=\frac{1-x}{x^2},\ a=1,\ b=2;$

o) $f(x)=2011+\frac{1}{x^2},\ g(x)=2012-\frac{1}{x^2},\ a=-2,\ b=-1;$

p) $f(x)=e^x,\ g(x)=2\cdot x-1,\ a=0,\ b=1;$

q) $f(x)=2\cdot e^{-x},\ g(x)=1-x,\ a=-1,\ b=0;$

r) $f(x)=e^{1-x},\ g(x)=e^{x+1},\ a=0,\ b=1;$

s) $f(x)=\ln(2\cdot x)-1,\ g(x)=\ln(3\cdot x)+1,\ a=1,\ b=2;$

t) $f(x)=\sin x,\ g(x)=\cos x,\ a=0,\ b=\frac{\pi}{2};$

u) $f(x)=\cos x,\ g(x)=\sin x,\ a=-\frac{\pi}{2},\ b=0;$

v) $f(x)=\operatorname{tg} x,\ g(x)=\operatorname{ctg} x,\ a=\frac{\pi}{6},\ b=\frac{\pi}{3};$

w) $f(x)=\operatorname{ctg} x,\ g(x)=\operatorname{tg} x,\ a=-\frac{\pi}{3},\ b=-\frac{\pi}{6};$

x) $f(x)=\arcsin x,\ g(x)=x,\ a=-1,\ b=1;$

y) $f(x)=\arccos x,\ g(x)=2\cdot x,\ a=-1,\ b=1;$

z) $f(x)=\operatorname{arctg} x,\ g(x)=x+1,\ a=0,\ b=1.$