



TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU
POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE
ELEKTROTEHNIČKI ODJEL

MATEMATIKA 1

24. domaća zadaća: **DERIVACIJE VIŠEGA REDA. DIFERENCIJAL FUNKCIJE.**

1. Za svaki $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ odredite derivaciju reda n sljedećih funkcija, pa pomoću dobivenih rezultata nađite analitički izraz za derivaciju proizvoljnoga reda $n \in \mathbf{N}$:

a) $f(x) = \frac{2013}{x}$;

b) $f(x) = -\frac{2014}{x+2013}$;

c) $f(x) = \frac{2012}{x-2013}$;

d) $f(x) = \frac{2013}{x^2}$;

e) $f(x) = -\frac{2013}{(x+2014)^2}$;

f) $f(x) = \frac{2014}{(x-2015)^2}$;

g) $f(x) = e^{-x}$;

h) $f(x) = e^{2013 \cdot x}$;

i) $f(x) = e^{-2013 \cdot x}$;

j) $f(x) = 2015 \cdot e^{2014 \cdot x - 2013}$;

k) $f(x) = 2012 \cdot e^{2014 - 2013 \cdot x}$;

l) $f(x) = x \cdot e^x$;

m) $f(x) = \frac{x}{e^x}$;

n) $f(x) = \frac{x+1}{e^x}$;

o) $f(x) = \frac{2015 \cdot (1-x)}{e^x}$;

p) $f(x) = \ln(2014 \cdot x)$;

q) $f(x) = -\ln(2015 \cdot x + 2013)$;

r) $f(x) = -\ln(-x)$;

s) $f(x) = -\ln(1-x)$;

t) $f(x) = 2015 \cdot \ln(2014 \cdot x + 2013)$;

u) $f(x) = 2014 \cdot \ln(2013 - 2015 \cdot x)$;

v) $f(x) = \ln\left(-\frac{2013}{x}\right)$;

w) $f(x) = \ln\frac{2015}{x^2}$;



TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU
POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE
ELEKTROTEHNIČKI ODJEL

MATEMATIKA 1

24. domaća zadaća: **DERIVACIJE VIŠEGA REDA. DIFERENCIJAL FUNKCIJE.**

- x) $f(x) = x \cdot \ln(2014 \cdot x)$;
- y) $f(x) = x^2 \cdot \ln(2015 \cdot x)$;
- z) $f(x) = 2013 \cdot x \cdot (x + 2014) \cdot \ln(2015 \cdot x)$.

2. Za svaki $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ odredite derivaciju reda n sljedećih funkcija, pa pomoću dobivenih rezultata nađite analitički izraz za derivaciju proizvoljnoga reda $n \in \mathbf{N}$:

- a) $f(x) = 2012 \cdot \sin(2013 \cdot x)$;
- b) $f(x) = 2013 \cdot \sin(2015 - 2014 \cdot x)$;
- c) $f(x) = 2014 \cdot \cos(2016 \cdot x)$;
- d) $f(x) = 2015 \cdot \cos(2017 - 2013 \cdot x)$;
- e) $f(x) = \sin(a \cdot x + b)$, za $a, b \in \mathbf{R}, a \neq 0$;
- f) $f(x) = \cos(a \cdot x + b)$, za $a, b \in \mathbf{R}, a \neq 0$;
- g) $f(x) = x \cdot \sin x$;
- h) $f(x) = x \cdot \cos x$;
- i) $f(x) = (a \cdot x + b) \cdot \sin x$, za $a, b \in \mathbf{R}, a \neq 0$;
- j) $f(x) = (a \cdot x + b) \cdot \sin(a \cdot x + b)$, za $a, b \in \mathbf{R}, a \neq 0$;
- k) $f(x) = (a \cdot x + b) \cdot \cos x$, za $a, b \in \mathbf{R}, a \neq 0$;
- l) $f(x) = (a \cdot x + b) \cdot \cos(a \cdot x + b)$, za $a, b \in \mathbf{R}, a \neq 0$;
- m) $f(x) = 2014 \cdot \operatorname{sh}(2016 \cdot x)$;
- n) $f(x) = 2016 \cdot \operatorname{sh}(2014 - 2012 \cdot x)$;
- o) $f(x) = 2018 \cdot \operatorname{ch}(2020 \cdot x)$;
- p) $f(x) = 2020 \cdot \operatorname{ch}(2018 - 2016 \cdot x)$;
- q) $f(x) = \operatorname{sh}(a \cdot x + b)$, za $a, b \in \mathbf{R}, a \neq 0$;
- r) $f(x) = \operatorname{ch}(a \cdot x + b)$, za $a, b \in \mathbf{R}, a \neq 0$;
- s) $f(x) = x \cdot \operatorname{sh} x$;
- t) $f(x) = x \cdot \operatorname{ch} x$;
- u) $f(x) = (a \cdot x + b) \cdot \operatorname{sh} x$, za $a, b \in \mathbf{R}, a \neq 0$;
- v) $f(x) = (a \cdot x + b) \cdot \operatorname{sh}(a \cdot x + b)$, za $a, b \in \mathbf{R}, a \neq 0$;
- w) $f(x) = (a \cdot x + b) \cdot \operatorname{ch} x$, za $a, b \in \mathbf{R}, a \neq 0$;
- x) $f(x) = (a \cdot x + b) \cdot \operatorname{ch}(a \cdot x + b)$, za $a, b \in \mathbf{R}, a \neq 0$;
- y) $f(x) = e^{-x} \cdot \sin x$;
- z) $f(x) = e^{-x} \cdot \cos x$.

3. Za svaki $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ odredite derivaciju reda n sljedećih funkcija:

- a) $f(x) = \arcsin x$;
- b) $f(x) = \arcsin(2013 \cdot x)$;
- c) $f(x) = -\arcsin(2014 \cdot x)$;
- d) $f(x) = -\arcsin(2015 - 2016 \cdot x)$;



TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU
POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE
ELEKTROTEHNIČKI ODJEL

MATEMATIKA 1

24. domaća zadaća: **DERIVACIJE VIŠEGA REDA. DIFERENCIJAL FUNKCIJE.**

- e) $f(x) = \arcsin(a \cdot x + b)$, za $a, b \in \mathbf{R}, a \neq 0$;
- f) $f(x) = \arccos x$;
- g) $f(x) = \arccos(2015 \cdot x)$;
- h) $f(x) = -\arccos(2014 \cdot x)$;
- i) $f(x) = -\arccos(2013 - 2012 \cdot x)$;
- j) $f(x) = \arccos(a \cdot x + b)$, za $a, b \in \mathbf{R}, a \neq 0$;
- k) $f(x) = \operatorname{arctg} x$;
- l) $f(x) = \operatorname{arctg}(2013 \cdot x)$;
- m) $f(x) = -\operatorname{arctg}(2014 \cdot x)$;
- n) $f(x) = -\operatorname{arctg}(2015 - 2016 \cdot x)$;
- o) $f(x) = \operatorname{arctg}(a \cdot x + b)$, za $a, b \in \mathbf{R}, a \neq 0$;
- p) $f(x) = \operatorname{arctg} x$;
- q) $f(x) = \operatorname{arctg}(2018 \cdot x)$;
- r) $f(x) = -\operatorname{arctg}(2016 \cdot x)$;
- s) $f(x) = -\operatorname{arctg}(2014 - 2012 \cdot x)$;
- t) $f(x) = \operatorname{arctg}(a \cdot x + b)$, za $a, b \in \mathbf{R}, a \neq 0$;
- u) $f(x) = \operatorname{arsh} x$;
- v) $f(x) = \operatorname{arch} x$;
- w) $f(x) = \operatorname{arth} x$;
- x) $f(x) = \operatorname{arcth} x$;
- y) $f(x) = x \cdot (\operatorname{arsh} x - \operatorname{arch} x)$;
- z) $f(x) = x \cdot (\operatorname{arth} x - \operatorname{arcth} x)$.

4. Izračunajte Δy i dy funkcije $f(x)$ za $x = a$ i $\Delta x = b$, pa objasnite značenje dobivenih vrijednosti ako je zadano:

- a) $f(x) = x, a = 0, b = 0.01$;
- b) $f(x) = 2013 \cdot x + 2014, a = 2012, b = 0.01$;
- c) $f(x) = 2015 - 2014 \cdot x, a = 2013, b = 0.02$;
- d) $f(x) = x^2, a = 1, b = 0.01$;
- e) $f(x) = -x^2, a = -1, b = 0.02$;
- f) $f(x) = x^2 + x, a = 1, b = 0.03$;
- g) $f(x) = x - 2 \cdot x^2, a = -2, b = 0.01$;
- h) $f(x) = 2 \cdot x^2 + 3 \cdot x + 1, a = 0, b = 0.05$;
- i) $f(x) = -10 \cdot x^2 - 9 \cdot x + 20, a = 1, b = 0.01$;
- j) $f(x) = x^3, a = 1, b = 0.05$;
- k) $f(x) = 1 - x^3, a = 2, b = 0.03$;
- l) $f(x) = x^3 + 1, a = 0, b = 0.04$;
- m) $f(x) = e^x, a = 0, b = 0.1$;
- n) $f(x) = e^{-x}, a = 0, b = 0.2$;



MATEMATIKA 1

24. domaća zadaća: **DERIVACIJE VIŠEGA REDA. DIFERENCIJAL FUNKCIJE.**

- o) $f(x) = \operatorname{ch} x, a = 0, b = 0.3;$
- p) $f(x) = \operatorname{sh} x, a = 0, b = 0.1;$
- q) $f(x) = \sin x, a = 0, b = 0.01;$
- r) $f(x) = -\sin x, a = \pi, b = 0.01;$
- s) $f(x) = \cos x, a = \frac{\pi}{2}, b = 0.02;$
- t) $f(x) = -\cos x, a = \frac{3}{2} \cdot \pi, b = 0.02;$
- u) $f(x) = \operatorname{tg} x, a = \frac{3}{4} \cdot \pi, b = 0.02;$
- v) $f(x) = -\operatorname{tg} x, a = \frac{7}{4} \cdot \pi, b = 0.03;$
- w) $f(x) = \operatorname{ctg} x, a = \frac{\pi}{4}, b = 0.05;$
- x) $f(x) = -\operatorname{ctg} x, a = \frac{\pi}{2}, b = 0.05;$
- y) $f(x) = \arcsin x, a = 0, b = 0.01;$
- z) $f(x) = \operatorname{arctg} x, a = 0, b = 0.01.$

5. Koristeći pravila za diferenciranje pokažite da za bilo koju diferencijabilnu funkciju f i bilo koju realnu konstantu a vrijede jednakosti:

- a) $d(a \cdot f) = a \cdot df;$
- b) $d\left(\frac{a}{f}\right) = -\frac{a \cdot df}{f^2}.$

6. Odredite prve diferencijale sljedećih funkcija za bilo koju vrijednost varijable x i pripadnoga prirasta Δx :

- a) $y = x;$
- b) $y = 2014 \cdot x + 2013;$
- c) $y = a \cdot x + b,$ za $a, b \in \mathbf{R}, a \neq 0;$
- d) $y = x^2;$
- e) $y = 2016 - x^2;$
- f) $y = x^2 + 2015;$
- g) $y = (x + 2)^2;$
- h) $y = (x - 2)^2;$
- i) $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c,$ za $a, b, c \in \mathbf{R}, a \neq 0;$
- j) $y = x^3;$
- k) $y = 2016 - x^3;$



TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU
POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE
ELEKTROTEHNIČKI ODJEL

MATEMATIKA 1

24. domaća zadaća: **DERIVACIJE VIŠEGA REDA. DIFERENCIJAL FUNKCIJE.**

- l) $y = x^3 + 2013$;
- m) $y = (x + 1)^3$;
- n) $y = (1 - x)^3$;
- o) $y = (x - 2)^3$;
- p) $y = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$, za $a, b, c, d \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$;
- q) $y = e^x$;
- r) $y = e^{-x}$;
- s) $y = e^{x+2013}$;
- t) $y = e^{2015-x}$;
- u) $y = e^{a \cdot x + b}$, za $a, b \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$;
- v) $y = e^{-x^2}$;
- w) $y = e^{a \cdot x^2 + b \cdot x + c}$, za $a, b, c \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$;
- x) $y = \ln x$;
- y) $y = -\ln(-x)$;
- z) $y = \ln(a \cdot x + b)$, za $a, b \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$.

7. Odredite prve diferencijale sljedećih funkcija za bilo koju vrijednost varijable x i pripadnoga prirasta Δx :

- a) $y = x \cdot e^{2 \cdot x}$;
- b) $y = -x \cdot e^{-2 \cdot x}$;
- c) $y = x^2 \cdot e^{3 \cdot x}$;
- d) $y = (1 - 2 \cdot x^2) \cdot e^{3-4 \cdot x}$;
- e) $y = x^3 \cdot \ln x$;
- f) $y = x \cdot \ln^2 x$;
- g) $y = x^2 \cdot \ln^3 x$;
- h) $y = e^x \cdot \ln x$;
- i) $y = e^{-x} \cdot \ln(-x)$;
- j) $y = -e^{-2 \cdot x} \cdot \ln(2 \cdot x)$;
- k) $y = e^{4-3 \cdot x} \cdot \ln(2-x)$;
- l) $y = x \cdot \operatorname{arsh} x$;
- m) $y = x^2 \cdot \operatorname{arch} x$;
- n) $y = x^3 \cdot \operatorname{arth} x$;
- o) $y = x^4 \cdot \operatorname{arch} x$;
- p) $y = x^2 \cdot \sin x$;
- q) $y = x^2 \cdot \cos x$;
- r) $y = x^3 \cdot \operatorname{tg} x$;
- s) $y = x^4 \cdot \operatorname{ctg} x$;
- t) $y = x \cdot \operatorname{arcsin} x$;



TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU
POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE
ELEKTROTEHNIČKI ODJEL

MATEMATIKA 1

24. domaća zadaća: **DERIVACIJE VIŠEGA REDA. DIFERENCIJAL FUNKCIJE.**

- u) $y = x^2 \cdot \arccos x$;
- v) $y = x^3 \cdot \operatorname{arctg} x$;
- w) $y = x^4 \cdot \operatorname{arcctg} x$;
- x) $y = e^x \cdot \arcsin x$;
- y) $y = e^{-x} \cdot \operatorname{arctg} x$;
- z) $y = e^{x-1} \cdot \operatorname{arcctg}(1-x)$.

8. Odredite prve diferencijale sljedećih funkcija za bilo koju vrijednost varijable x i pripadnoga prirasta Δx :

a) $y = \frac{e^x}{x}$;

b) $y = \frac{x^2}{e^{2x}}$;

c) $y = -\frac{\ln x}{2 \cdot x}$;

d) $y = \frac{\ln(x+1)}{4 \cdot x}$;

e) $y = \frac{\ln(1-x)}{\sqrt{x+2015}}$;

f) $y = \sqrt[3]{\frac{\ln x}{x}}$;

g) $y = \frac{(x+1)^2}{\ln(2 \cdot x)}$;

h) $y = \frac{x-1}{\ln^2 \frac{x}{2}}$;

i) $y = \left[\frac{x+1}{\ln(x-1)} \right]^2$;

j) $y = \sqrt{\frac{x+1}{\ln x}}$;

k) $y = \sqrt[3]{\frac{x^2-1}{\ln^2 x}}$;

l) $y = \frac{\sin x}{x}$;



TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU
POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE
ELEKTROTEHNIČKI ODJEL

MATEMATIKA 1

24. domaća zadaća: **DERIVACIJE VIŠEGA REDA. DIFERENCIJAL FUNKCIJE.**

m) $y = \frac{x}{\sqrt{\sin x}}$;

n) $y = \frac{\cos x}{\sqrt{x}}$;

o) $y = \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{\cos x}}$;

p) $y = \frac{\operatorname{tg} x}{x}$;

q) $y = \frac{x}{\sqrt{\operatorname{tg} x}}$;

r) $y = -x \cdot \sqrt[3]{\operatorname{ctg} x}$;

s) $y = \sqrt[3]{\frac{\arcsin x}{x}}$;

t) $y = \sqrt{\frac{x+2013}{\arcsin \frac{x}{2}}}$;

u) $y = \frac{\sqrt[3]{\arccos x}}{\sqrt{x+2}}$;

v) $y = \sqrt{\frac{x+4}{\arccos x}}$;

w) $y = \frac{\operatorname{arctg}(e^x)}{\ln x}$;

x) $y = \frac{\operatorname{arcctg}(\ln x)}{e^{x-1} + 1}$;

y) $y = \sqrt{\arcsin x} - \sqrt[3]{\arccos x}$;

z) $y = \sqrt{\operatorname{arctg} x} + \sqrt[3]{\operatorname{arcctg} x}$.

9. Navedite geometrijsko značenje prirasta, odnosno prvoga diferencijala sljedećih funkcija:

a) $O = 3 \cdot x$, gdje su x duljina osnovice jednakostraničnoga trokuta i O opseg toga trokuta;

b) $v = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot x$, gdje su x duljina osnovice jednakostraničnoga trokuta i v duljina bilo koje visine na tu osnovicu;



MATEMATIKA 1

24. domaća zadaća: **DERIVACIJE VIŠEGA REDA. DIFERENCIJAL FUNKCIJE.**

- c) $R = \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot x$, gdje su x duljina osnovice jednakostraničnoga trokuta i R duljina polumjera tom trokutu upisane kružnice;
- d) $r = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot x$, gdje su x duljina osnovice jednakostraničnoga trokuta i R duljina polumjera tom trokutu opisane kružnice;
- e) $P = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot x^2$, gdje su x duljina osnovice jednakostraničnoga trokuta i P površina toga trokuta;
- f) $d = \sqrt{2} \cdot x$, gdje su x duljina stranice kvadrata i d duljina dijagonale toga kvadrata;
- g) $R = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot x$, gdje su x duljina dijagonale kvadrata i R polumjer tom kvadratu opisanoga kruga;
- h) $P = \frac{1}{2} \cdot x^2$, gdje su x duljina dijagonale kvadrata i P površina toga kvadrata;
- i) $O = 6 \cdot x$, gdje su x duljina osnovice pravilnoga šesterokuta i O opseg toga šesterokuta;
- j) $P = \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{2} \cdot x^2$, gdje su x duljina osnovice pravilnoga šesterokuta i P površina toga šesterokuta;
- k) $O = 2 \cdot \pi \cdot x$, gdje su x duljina polumjera kruga i O opseg toga kruga;
- l) $P = \pi \cdot x^2$, gdje su x duljina polumjera kruga i P površina toga kruga;
- m) $D = \sqrt{3} \cdot x$, gdje su x duljina brida kocke i D duljina prostorne dijagonale te kocke;
- n) $R = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot x$, gdje su x duljina brida kocke i R duljina polumjera tog kocki opisane kugle;
- o) $O = 6 \cdot x^2$, gdje su x duljina brida kocke i O oplošje te kocke;
- p) $V = x^3$, gdje su x duljina brida kocke i V obujam te kocke;
- q) $O = 4 \cdot \pi \cdot x^2$, gdje su x duljina polumjera kugle i O oplošje te kugle;



TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU
POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE
ELEKTROTEHNIČKI ODJEL

MATEMATIKA 1

24. domaća zadaća: **DERIVACIJE VIŠEGA REDA. DIFERENCIJAL FUNKCIJE.**

r) $V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot x^3$, gdje su x duljina polumjera kugle i V obujam te kugle.

10. Dokažite da funkcija $f(x) = 2 \cdot |x|$ nema diferencijal za $x = 0$.

11. Nađite dy ako je funkcija y zadana implicitno s:

- a) $2 \cdot x - y^2 = a^2$ ($a \in \mathbf{R}$ je konstanta);
- b) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = a$ ($a \in \mathbf{R}$ je konstanta);
- c) $\sqrt{x} + \sqrt{x+y} = a$ ($a \in \mathbf{R}$ je konstanta);
- d) $x^2 + y^2 = r^2$ ($r \in \mathbf{R}$ je konstanta);
- e) $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ ($a, b, r \in \mathbf{R}$ su konstante);
- f) $b^2 \cdot x^2 + a^2 \cdot y^2 = a^2 \cdot b^2$ ($a, b \in \mathbf{R}$ su konstante);
- g) $b^2 \cdot x^2 - a^2 \cdot y^2 = a^2 \cdot b^2$ ($a, b \in \mathbf{R}$ su konstante);
- h) $y^2 = 2 \cdot p \cdot x$ ($p \in \mathbf{R}$ je konstanta);
- i) $y^2 + x + y = a^2$ ($a \in \mathbf{R}$ je konstanta);
- j) $y^3 - x^2 - y = 0$;
- k) $y^3 - y^2 - x = 0$;
- l) $x^3 + y^3 - 3 \cdot a \cdot x \cdot y = 0$ ($a \in \mathbf{R}$ je konstanta);
- m) $(x - 2 \cdot y)^3 \cdot (2 \cdot x - y)^2 = 2011$;
- n) $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{a^2}$ ($a \in \mathbf{R}$ je konstanta);
- o) $\ln x + \ln y = x + y$;
- p) $\ln x - \ln y = x - y$;
- q) $x + y = e^y$;
- r) $x - y = -e^{-y}$;
- s) $y = e^{1 - \frac{x}{y}}$;
- t) $y^2 = e^{\frac{x}{y} + 2013}$;
- u) $e^{-y} = \arcsin(x + y)$;
- v) $e^y = \arccos(x - y)$;
- w) $\ln y = \operatorname{arctg}(\sqrt{x} + \sqrt{y})$;
- x) $\ln(x + y) = \operatorname{arctg}(\sqrt{x} - \sqrt{y})$;
- y) $\ln(x^2 + y^2) = 2 \cdot \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$;
- z) $\ln(x^2 + y^2) = 2 \cdot \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$.