1. Odredite red sljedećih običnih diferencijalnih jednadžbi:

a) $2 \cdot y' + x^2 \cdot y + \cos x = 0;$

b) $y' - 8 \cdot y = 0;$

c) $y'' - 3 \cdot y' + 2 \cdot y = x \cdot e^{2 \cdot x};$

d) $x^2 \cdot y'' + x \cdot y \cdot y' + y^3 - x \cdot \mathrm{tg}(2 \cdot x) = 0;$

e) $y''' - 6 \cdot y'' + 12 \cdot y' - 8 \cdot y = x \cdot \sin x.$

2. Provjerite je li funkcija y rješenje obične diferencijalne jednadžbe J ako je:

a) $y = 2 \cdot e^{4 \cdot x}, \ J ... \ y' - 4 \cdot y = 0;$

b) $y = e^{x^2}, \ J ... \ y' - 2 \cdot x \cdot y = 0;$

c) $y = \sin(3 \cdot x) + 2 \cdot \cos(3 \cdot x), \ J ... \ y'' + 9 \cdot y = 0;$

d) $y = (2 \cdot x + 1) \cdot e^{-x}, \ J ... \ y'' + 2 \cdot y' + y = 0.$

Prikažite pripadne integralne krivulje u pravokutnom koordinatnom sustavu u ravnini.

3. Neka su C, C_1, $C_2 \in \mathbb{R}$ konstante. Provjerite da je izraz R rješenje obične diferencijalne jednadžbe J, pa odredite neko partikularno rješenje jednadžbe J ako je:

a) $R ... \ y = C - x^2, \ J ... \ y' + 2 \cdot x = 0;$

b) $R ... \ y = x^3 + C_1 \cdot x + C_2, \ J ... \ y'' - 6 \cdot x = 0;$

c) $R ... \ y = C_1 \cdot e^x + C_2 \cdot e^{5 \cdot x}, \ J ... \ y'' - 6 \cdot y' + 5 \cdot y = 0;$

d) $R ... \ y = C_1 \cdot \sin(4 \cdot x) + C_2 \cdot \cos(4 \cdot x), \ J ... \ y'' + 16 \cdot y = 0.$

Kakve integralne krivulje zadaju izrazi R u podzadacima **a)** i **b)**?

4. Provjerite da je funkcija y rješenje Cauchyjeva problema CP ako je:

a) $y = 2 \cdot e^x, \quad CP ... \begin{cases} y' - y = 0, \\ y(0) = 2. \end{cases}$

b) $y = 2 \cdot x^3 + 1, \quad CP ... \begin{cases} y'' - 12 \cdot x = 0, \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = 0. \end{cases}$

c) $y = \sin x + \cos x, \quad CP ... \begin{cases} y'' + y = 0, \\ y(0) = y'(0) = 1. \end{cases}$

RJEŠENJA ZADATAKA

1. a) i **b)** Najveći red derivacije koji se pojavljuje u zadanoj jednadžbi jednak je 1. Stoga je zadana jednadžba ODJ 1. reda.

c) i **d)** Najveći red derivacije koji se pojavljuje u zadanoj jednadžbi jednak je 2. Stoga je zadana jednadžba ODJ 2. reda.

e) Najveći red derivacije koji se pojavljuje u zadanoj jednadžbi jednak je 3. Stoga je zadana jednadžba ODJ 3. reda.

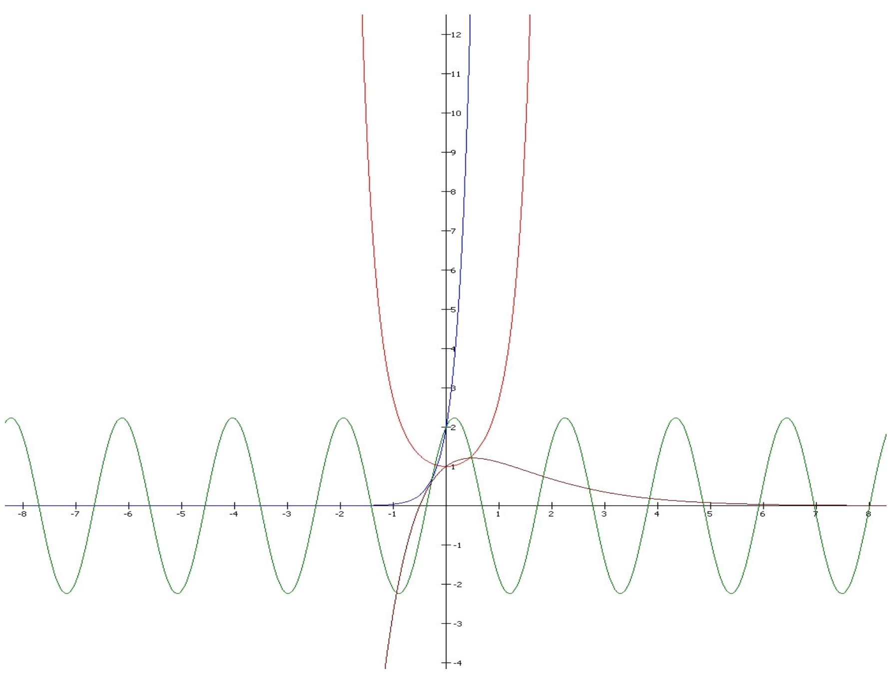
2. a) $y' = 8 \cdot e^{4 \cdot x} \Rightarrow y' - 4 \cdot y = 8 \cdot e^{4 \cdot x} - 8 \cdot e^{4 \cdot x} = 0$, pa je funkcija y doista rješenje jednadžbe J.

b) $y' = 2 \cdot x \cdot e^{x^2} \Rightarrow y' - 2 \cdot x \cdot y = 2 \cdot x \cdot e^{x^2} - 2 \cdot x \cdot e^{x^2} = 0$, pa je funkcija y doista rješenje jednadžbe J.

c) $y' = 3 \cdot \cos(3 \cdot x) - 6 \cdot \sin(3 \cdot x)$, $y'' = -9 \cdot \sin(3 \cdot x) - 18 \cdot \cos(3 \cdot x) \Rightarrow$ $y'' + 9 \cdot y = -9 \cdot \sin(3 \cdot x) -$ $-18 \cdot \cos(3 \cdot x) + 9 \cdot \sin(3 \cdot x) + 18 \cdot \cos(3 \cdot x) = 0$, pa je funkcija y doista rješenje jednadžbe J.

d) $y' = (1 - 2 \cdot x) \cdot e^{-x}$, $y'' = (2 \cdot x - 3) \cdot e^{-x}$ $\Rightarrow$ $y'' + 2 \cdot y' + y = \left[(2 \cdot x - 3) + 2 \cdot (1 - 2 \cdot x) + (2 \cdot x + 1)\right] \cdot e^{-x} = 0$, pa je funkcija y doista rješenje jednadžbe J.

Pripadne integralne krivulje prikazane su na Slici 1.



Slika 1.

3. a) $y' = -2\cdot x \Rightarrow y' + 2\cdot x = -2\cdot x + 2\cdot x = 0$, pa je izraz *R* doista opće rješenje jednadžbe *J*.

b) $y' = 3\cdot x^2$, $y'' = 6\cdot x \Rightarrow y'' - 6\cdot x = 6\cdot x - 6\cdot x = 0$, pa je izraz *R* uistinu opće rješenje jednadžbe *J*.

c) $y' = C_1\cdot e^x + 5\cdot C_2\cdot e^{5\cdot x}$, $y'' = C_1\cdot e^x + 25\cdot C_2\cdot e^{5\cdot x} \Rightarrow y'' - 6\cdot y' + 5\cdot y = (C_1 - 6\cdot C_1 + 5\cdot C_1)\cdot e^x$ $+ (25\cdot C_2 - 6\cdot 5\cdot C_2 + 5\cdot C_2)\cdot e^{5\cdot x} = 0$, pa je izraz *R* doista opće rješenje jednadžbe *J*.

d)
$y' = 4\cdot C_1\cdot\cos(4\cdot x) - 4\cdot C_2\cdot\sin(4\cdot x)$, $y'' = -16\cdot C_1\cdot\sin(4\cdot x) - 16\cdot C_2\cdot\cos(4\cdot x) \Rightarrow y'' + 16\cdot y =$ $= -16\cdot C_1\cdot\sin(4\cdot x) - 16\cdot C_2\cdot\cos(4\cdot x) + 16\cdot C_1\cdot\sin(4\cdot x) + 16\cdot C_2\cdot\cos(4\cdot x) = 0$, pa je izraz *R* doista opće rješenje jednadžbe *J*.

Izraz **a)** predstavlja porodicu parabola, dok izraz **b)** predstavlja porodicu kubika.

4. a) $y' = 2\cdot e^x \Rightarrow y' - y = 2\cdot e^x - 2\cdot e^x = 0$, pa je funkcija *y* rješenje *ODJ*. Nadalje, $y(0) = 2\cdot e^0 = 2$, pa je funkcija *y* doista rješenje *CP*.

b) $y' = 6\cdot x^2$, $y'' = 12\cdot x \Rightarrow y'' - 12\cdot x = 12\cdot x - 12\cdot x = 0$, pa je funkcija *y* rješenje *ODJ*. Nadalje, $y(0) = 2\cdot 0^3 + 1 = 1$, $y'(0) = 6\cdot 0^2 = 0$, pa je funkcija *y* doista rješenje *CP*.

c) $y' = \cos x - \sin x$, $y'' = -\sin x - \cos x \Rightarrow y'' + y = -\sin x - \cos x + \sin x + \cos x = 0$, pa je funkcija *y* rješenje *ODJ*. Nadalje, $y(0) = \cos 0 + \sin 0 = 1 + 0 = 1$, $y'(0) = \cos 0 - \sin 0 = 1 - 0 = 1$, pa je funkcija *y* doista rješenje *CP*.