3. OBIČNE DIFERENCIJALNE JEDNADŽBE

3.1. POJAM OBIČNE DIFERENCIJALNE JEDNADŽBE. CAUCHYJEV PROBLEM.

3.1.1. POJAM OBIČNE DIFERENCIJALNE JEDNADŽBE

- U dosadašnjem dijelu predmeta razmatrali smo jednadžbe koje su imale sljedeća zajednička obilježja:
- 1.) nepoznanica je bila realan broj;
- 2.) svaka jednadžba se mogla svesti na oblik $f(x) = 0$, gdje je f realna funkcija čiji je analitički izraz sadržavao nepoznanicu x i poznate ("konkretne") realne brojeve.
- **Obična diferencijalna jednadžba** (skraćeno: ODJ) je jednadžba sa sljedećim svojstvima:
- **1.)** nepoznanica je *realna funkcija jedne realne varijable*;
- **2.)** lijeva strana jednadžbe je izraz koji sadrži nepoznatu funkciju i/li *barem jednu njezinu derivaciju*.

3.1.1. POJAM OBIČNE DIFERENCIJALNE JEDNADŽBE

- Formalno, označimo $y = y(x)$, gdje je y funkcija, a x njezina nezavisna varijabla.
- **Obična diferencijalna jednadžba** (ODJ) je jednadžba oblika
  - $F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$
- gdje je F neka realna funkcija $n + 1$ realnih varijabli.
- **Red** ODJ jednak je najvišem redu derivacije nepoznate funkcije y.
- Posebno:
- ako je jednadžba oblika $F(x, y, y') = 0$, kažemo da je riječ o **običnoj diferencijalnoj jednadžbi 1. reda**;
- ako je jednadžba oblika $F(x, y, y', y'') = 0$, kažemo da je riječ o **običnoj diferencijalnoj jednadžbi 2. reda**.

3.1.2. RJEŠENJE OBIČNE DIFERENCIJALNE JEDNADŽBE

- Svaka funkcija $y = y(x)$ koja uvrštena u ODJ daje *identitet koji vrijedi za svaki* x *iz prirodne domene funkcije* y naziva se **rješenje obične diferencijalne jednadžbe.**
- Funkcija $y = y(x)$ **nije** rješenje ODJ ako njezinim uvrštavanjem u ODJ dobijemo izraz koji nije istinit za *barem jedan* x iz prirodne domene funkcije y.
- Krivulja (graf funkcije y) koja odgovara svakom pojedinom rješenju ODJ naziva se **integralna krivulja**.

3.1.3. POJAM OPĆEGA I PARTIKULARNOGA RJEŠENJA OBIČNE DIFERENCIJALNE JEDNADŽBE.

- U skladu s tim, **opće rješenje obične diferencijalne jednadžbe 1. reda** je *skup funkcija* $G(x, y, C) = 0$ takav da uvrštavanjem *svakoga* elementa toga skupa u ODJ dobivamo identitet ($C \in \mathbb{R}$ je proizvoljna konstanta).
- Analogno, **opće rješenje obične diferencijalne jednadžbe 2. reda** je *skup funkcija* $G(x, y, C_1, C_2) = 0$ takav da uvrštavanjem *svakoga* elementa toga skupa u ODJ dobivamo identitet ($C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ su proizvoljne konstante).
- Kao i neodređeni integral, opće rješenje ODJ je skup sastavljen od funkcija koje se međusobno razlikuju za vrijednost (barem jedne) realne konstante.
- **Važno**: U cijelom poglavlju pretpostavljat ćemo da je *svako* rješenje ODJ reda n *funkcija klase* C^n, tj. neprekidna funkcija takva da sve derivacije f', f'', ..., $f^{(n)}$ postoje i neprekidne su. (Vrlo često će te funkcije biti klase C^∞, tj. neprekidne funkcije koje imaju derivacije bilo kojega reda i te derivacije su neprekidne funkcije.)
- Pojedine elemente općega rješenja nazivamo **partikularna rješenja**. Njih dobivamo tako da umjesto nepoznatih realnih konstanti uvrstimo "konkretne" realne brojeve.
- I partikularna rješenja također moraju biti klase C^n.

3.1.4. POJAM OPĆEGA I PARTIKULARNOGA RJEŠENJA OBIČNE DIFERENCIJALNE JEDNADŽBE.

- Za razliku od "običnih" jednadžbi, za ODJ vrijedi tvrdnja:
- *Ako obična diferencijalna jednadžba ima barem jedno rješenje, onda ta jednadžba ima beskonačno mnogo rješenja.*
- Međutim, sva ta rješenja su „vrlo slična". Npr. lako se vidi da su funkcije $y_1 = x + 1$ i $y_2 = x + 2$ rješenja ODJ $y' = 1$. Može se pokazati da su sva rješenja te ODJ dana izrazom $y = x + C$, gdje je $C \in \mathbb{R}$.
- Dakle, *rješenja običnih diferencijalnih jednadžbi podudaraju se do na vrijednost nekih konstanti* (analogno kao i primitivne funkcije!).
- Nadalje, *u rješenjima običnih diferencijalnih jednadžbi* 1. *reda uvijek se pojavljuje jedna realna konstanta čija je vrijednost proizvoljna.*
- *U rješenjima običnih diferencijalnih jednadžbi* 2. *reda pojavljuju se dvije takve realne konstante.*

3.1.5. CAUCHYJEV PROBLEM

- Znamo da ako ODJ ima barem jedno rješenje, onda ta ODJ ima beskonačno mnogo različitih rješenja.
- U slučaju ODJ 1. reda, sva ta rješenja se razlikuju za točno jednu realnu konstantu (C), a u slučaju ODJ 2. reda, ta rješenja se razlikuju za točno dvije realne konstante (C_1 i C_2).
- Dodatnim *zadavanjem točno jedne vrijednosti nepoznate funkcije* y u proizvoljnoj točki iz njezine prirodne domene možemo postići da ODJ 1. *reda* ima *jedinstveno* rješenje.
- Dodatnim *zadavanjem točno dvije vrijednosti nepoznate funkcije* y u dvjema proizvoljnim različitim točkama iz njezine prirodne domene možemo postići da ODJ 2. reda ima jedinstveno rješenje.
- Ova dodatna zadavanja vode na tzv. *Cauchyjev problem* kojega smo već susreli kod neodređenih integrala.

3.1.5. CAUCHYJEV PROBLEM

- Ako umjesto n različitih vrijednosti funkcije y želimo odabrati točno jednu vrijednost $x_0 \in D(y)$, onda se Cauchyjev problem može formulirati ovako:

$$\begin{cases} F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0, \\ y(x_0) = a_1, \\ \ldots \\ y^{(n-1)}(x_0) = a_n. \end{cases}$$

- U ovom slučaju umjesto n različitih vrijednosti funkcije y zadajemo *vrijednost funkcije y u točki x_0*, te (ovisno o redu ODJ) *vrijednosti prve, druge, ...* $(n-1)$ *– ve derivacije te funkcije.*

3.1.5. CAUCHYJEV PROBLEM

- Opći oblik Cauchyjeva problema glasi:

$$\begin{cases} F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0, \\ y(x_1) = a_1, \\ \ldots \\ y(x_n) = a_n. \end{cases}$$

- pri čemu su $x_1, \ldots, x_n \in D(y)$ i $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ konstante
- Izrazi $y(x_1) = a_1, \ldots, y(x_n) = a_n$ nazivaju se **početni uvjeti**. Broj početnih uvjeta je *uvijek* jednak redu ODJ.
- Ako pripadna ODJ uopće ima rješenja, onda **Cauchyjev problem ima jedinstveno rješenje**.

3.1.5. CAUCHYJEV PROBLEM

- *Svaki* Cauchyjev problem za ODJ 1. reda ima *točno jedan* početni uvjet (obično: vrijednost funkcije y u nekoj točki iz njezine prirodne domene).
- *Svaki* Cauchyjev problem za ODJ 2. reda ima *točno dva početna uvjeta* (obično: vrijednost funkcije y i njezine prve derivacije u nekoj točki iz prirodne domene funkcije y ili vrijednosti funkcije y u dvjema različitim točkama iz njezine prirodne domene).

