Zadatak 1. Izvedite formulu za rješenje obične diferencijalne jednadžbe 1. reda sa razdvojenim varijablama za svaki oblik posebno.

Rješenje: Uzmimo najprije da je $y = y(x)$ i da je obična diferencijalna jednadžba 1. reda sa razdvojenim varijablama zadana u obliku $y' = f(x) \cdot g(y)$. Znamo da derivaciju funkcije možemo napisati kao količnik diferencijala funkcije i diferencijala njezine nezavisne varijable, tj. u obliku $y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$. Lijeve strane navedenih jednakosti su jednake, pa takve moraju biti i desne strane. Tako redom dobivamo:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x) \cdot g(y) \qquad / \cdot \frac{\mathrm{d}x}{g(y)}$$
$$\frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = f(x) \cdot \mathrm{d}x.$$

U posljednjem koraku opravdavamo naziv „sa razdvojenim varijablama“. Kako vidimo, množenjem jednadžbe izrazom $\frac{\mathrm{d}x}{g(y)}$ postigli smo da se na svakoj strani jednadžbe pojavljuje *točno jedna varijabla*: na lijevoj strani ta je varijabla ujedno i nepoznata funkcija (y), dok je na desnoj strani ta varijabla jednaka varijabli nepoznate funkcije y (tj. x). Također, na svakoj strani se pojavljuje i diferencijal pripadne varijable: na lijevoj strani to je dy, a na desnoj dx. Zbog toga smijemo integrirati obje strane dobivene jednakosti:

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = \int f(x) \cdot \mathrm{d}x + C.$$

Pojasnimo svaku stranu dobivene jednakosti. Integrale ovdje shvaćamo kao *standardne antiderivacije* funkcija $\frac{1}{g}$, odnosno f. Naime, ako bismo i na lijevoj i na desnoj strani pisali konstante integracije koje dobivamo integriranjem, onda bismo konstantu s lijeve strane mogli prebaciti na desnu stranu (promijenivši joj predznak) i zbrojiti s konstantom integracije dobivenom na desnoj strani. Zbroj dviju konstanti je ponovno konstanta, pa smo taj zbroj odmah zamijenili konstantom C na desnoj strani jednakosti.

Zašto se konstanta C ne nalazi na lijevoj strani jednakosti? Mora li ona biti na desnoj strani te jednakosti? Odgovor je potvrdan. Naime, prisjetimo se da je nepoznanica y funkcija varijable x, pa nam je krajnji cilj izraziti y pomoću x, tj. dobiti pravilo funkcije y kad god je to moguće. Ako bi konstanta C bila na lijevoj strani, onda bismo je u postupku određivanja pravila funkcije y morali prebaciti na desnu stranu tako da y

„ostane sam“ na lijevoj strani jednakosti. To „prebacivanje“ izbjegavamo tako da konstantu C odmah pišemo na desnoj strani jednakosti.

Ako je obična diferencijalna jednadžba 1. reda sa razdvojenim varijablama zadana u „proširenom“ obliku

$$f_1(x)\cdot g_1(y)\cdot \mathrm{d}x + f_2(x)\cdot g_2(y)\cdot \mathrm{d}y = 0,$$

onda redom imamo:

$$\begin{aligned}
&f_1(x)\cdot g_1(y)\cdot \mathrm{d}x + f_2(x)\cdot g_2(y)\cdot \mathrm{d}y = 0, \quad / \cdot \frac{1}{f_2(x)\cdot g_1(y)}\\
&\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\cdot \mathrm{d}x + \frac{g_2(y)}{g_1(y)}\cdot \mathrm{d}y = 0.
\end{aligned}$$

Integriramo obje strane ove jednakosti. Uočimo da prvi pribrojnik sadrži samo funkcije varijable x i diferencijal te varijable, dok drugi pribrojnik sadrži samo funkcije varijable y i diferencijal te varijable. Time ponovno opravdavamo naziv „sa razdvojenim varijablama“. Zbroj dviju funkcija integrira se tako da se zasebno integrira svaki pribrojnik. Integral konstante 0 jednak je nepoznatoj realnoj konstanti C. Tako dobivamo:

$$\int \frac{f_1(x)}{f_2(x)}\cdot \mathrm{d}x + \int \frac{g_2(y)}{g_1(y)}\cdot \mathrm{d}y = C,\ C \in \mathbb{R}.$$

Time smo izveli obje navedene formule i riješili zadatak.

Zadatak 2. Riješite sljedeće jednadžbe:

a) $y' = 3\cdot x^2$;

b) $y' = \dfrac{x\cdot\sqrt{1+x^2}}{y\cdot e^y}$.

Rješenje: Sve navedene jednadžbe su obične diferencijalne jednadžbe 1. reda sa razdvojenim varijablama. Zbog toga ih možemo rješavati koristeći ranije izvedene formule. Ako je potrebno, prije rješavanja ih moramo svesti na jedan od oblika spomenute jednadžbe koje smo koristili u rješenju zadatka 1. kako bismo mogli „očitati“ funkcije f i g. Naglasimo još jednom da ćemo u postupku rješavanja jednadžbi određivati *standardne antiderivacije*, a ne neodređene integrale.

a) Zadana jednadžba već ima oblik $y' = f(x)\cdot g(y)$. Može nas zbuniti činjenica da na desnoj strani jednadžbe nema izraza koji sadrži varijablu y. No, nema razloga za

„uzbunu". U rješenju zadatka 1. nigdje nismo pretpostavili da f i g ne mogu biti konstantne funkcije. U ovom zadatku imamo slučaj da je $g(y)=1$.

Zadatak je namjerno zadan kako bismo pokazali da ne treba robovati gore izvedenim formulama. Što zapravo trebamo odrediti? Treba odrediti sve funkcije y koje derivirane daju $3\cdot x^2$. Znamo li mi odrediti te funkcije bez rješavanja običnih diferencijalnih jednadžbi? Naravno da znamo. Te funkcije određuju se integriranjem izraza $3\cdot x^2$, tj. traženi skup funkcija jednak je *neodređenom integralu* funkcije $f(x)=3\cdot x^2$. Tako odmah dobivamo:

$$y=\int 3\cdot x^2\cdot \mathrm{d}x=3\cdot\frac{1}{2+1}\cdot x^{2+1}=x^3+C.$$

U napomeni u točki 3.2.1. s predavanja piše da prilikom ispisivanja rješenja treba uzeti i funkcije oblika $y=A$, gdje je A bilo koje realno rješenje jednadžbe $g(y)=0$. Međutim, u ovom je slučaju $g(y)=1$, a ta funkcija ne može poprimiti vrijednost 0 ni za koji realan broj. Dakle, skup svih rješenja zadane jednadžbe je:

$$y=x^3+C,\ C\in\mathbb{R}.$$

Potpuno isto rješenje dobivamo i primjenom prve formule izvedene u zadatku 1. Uvjerite se u to sami.

b) Zapišimo zadanu jednadžbu u obliku:

$$y'=\left(x\cdot\sqrt{1+x^2}\right)\cdot\left(\frac{1}{y\cdot e^y}\right).$$

Odavde očitamo:

$$f(x)=x\cdot\sqrt{1+x^2},\ g(y)=\frac{1}{y\cdot e^y}.$$

Odmah uočimo da jednadžba $g(y)=0$ nema nijedno realno rješenje. Naime, razlomak kojemu je brojnik jednak 1 nikada ne može biti jednak nuli. Zbog toga u daljnjem postupku rješavanja više ne razmatramo taj slučaj i ne uzimamo ga u obzir prilikom ispisa konačnoga rješenja zadatka.

Zasebno odredimo potrebne standardne antiderivacije. Standardnu derivaciju funkcije f odredimo koristeći metodu zamjene, dok standardnu derivaciju funkcije $\frac{1}{g}$ odredimo koristeći metodu djelomične integracije. Dobivamo:

$$\int f(x)\cdot \mathrm{d}x=\int x\cdot\sqrt{1+x^2}\cdot \mathrm{d}x=\left\{\begin{array}{l}\text{zamjena:}\\ t:=1+x^2,\\ \mathrm{d}t=2\cdot x\cdot \mathrm{d}x\Rightarrow x\cdot \mathrm{d}x=\frac{1}{2}\cdot \mathrm{d}t\end{array}\right\}=\int\sqrt{t}\cdot\frac{1}{2}\cdot \mathrm{d}t=\frac{1}{2}\cdot\int t^{\frac{1}{2}}\cdot \mathrm{d}t=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}+1}\cdot t^{\frac{1}{2}+1}=\frac{1}{3}\cdot t^{\frac{3}{2}}=$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\left(1+x^2\right)^{\frac{3}{2}},$$

$$\int\frac{1}{g(y)}\cdot \mathrm{d}y=\int y\cdot e^y\cdot \mathrm{d}y=\left|\begin{array}{ll}u=y & v=\int e^y\cdot \mathrm{d}y=e^y\\ \mathrm{d}u=\mathrm{d}y & \mathrm{d}v=e^y\cdot \mathrm{d}y\end{array}\right|=y\cdot e^y-\int e^y\cdot \mathrm{d}y=y\cdot e^y-e^y.$$

Tako konačno rješenje dobivamo u implicitnom obliku:

$$y\cdot e^y+e^y=\frac{1}{3}\cdot\left(1+x^2\right)^{\frac{3}{2}}+C,\ C\in\mathbb{R}.$$

Taj oblik je potpuno korektan: ako možemo, trebamo odrediti pravilo funkcije y, ali u ovom slučaju to nije moguće, pa rješenje ostavljamo u implicitnom obliku.

Zadatak 3. Riješite sljedeće Cauchyjeve probleme:

a) $\begin{cases}(x^2-1)\cdot y'=x\cdot y,\\ y\left(\sqrt{2}\right)=1.\end{cases}$

b) $\begin{cases}y'+y=y^2,\\ y(0)=\frac{1}{2}.\end{cases}$

c) $\begin{cases}(\cos y)\cdot y'=\sin y\cdot\cos z,\\ y(0)=\frac{\pi}{2}.\end{cases}$

d) $\begin{cases}y'=y^2\cdot\cos z+\cos z,\\ y(0)=0.\end{cases}$

e) $\begin{cases}\sin(y)\cdot t\cdot y'+\cos y=0,\\ y\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{3}.\end{cases}$

Rješenje: Za razliku od prethodnih zadataka, rješenje svakoga od ovih četiriju podzadatka je *jedinstveno*. Početni uvjet omogućit će nam eliminaciju zasebnih podslučajeva oblika $y=A$, gdje je A realno rješenje jednadžbe $g(y)=0$.

a) Zapišimo zadanu jednadžbu u obliku:

$$y' = \frac{x}{x^2-1} \cdot y.$$

Odavde očitamo:

$$f(x) = \frac{x}{x^2-1},\ g(y) = y.$$

Jednadžba $g(y)=0$ ekvivalentna je jednadžbi $y=0$. Dakle, konstantna funkcija $y=0$ je rješenje obične diferencijalne jednadžbe. Međutim, ta funkcija ne zadovoljava uvjet $y\left(\sqrt{2}\right)=1$ jer je $y\left(\sqrt{2}\right)=0$. Zbog toga u daljnjem postupku rješavanja ovu funkciju zanemarujemo.

Standardnu antiderivaciju funkcije f odredit ćemo koristeći metodu zamjene. Standardnu antiderivaciju funkcije $\frac{1}{g}$ odredit ćemo tablično. Imamo redom:

$$\int f(x)\cdot \mathrm{d}x = \int \frac{x}{x^2-1}\cdot \mathrm{d}x = \left\{\begin{array}{l}\text{zamjena:}\\ t := x^2-1,\\ \mathrm{d}t = 2\cdot x\cdot \mathrm{d}x \Rightarrow x\cdot \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\cdot \mathrm{d}t\end{array}\right\} = \int \frac{\frac{1}{2}}{t}\cdot \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\cdot\int\frac{1}{t}\cdot \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\cdot \ln|t| = \frac{1}{2}\cdot \ln\left|x^2-1\right|,$$

$$\int \frac{1}{g(y)}\cdot \mathrm{d}y = \int \frac{1}{y}\cdot \mathrm{d}y = \ln|y|.$$

Uvrštavanjem obaju izraza u prvu od dviju formula izvedenih u rješenju zadatka 1. dobivamo:

$$\ln|y| = \frac{1}{2}\cdot \ln\left|x^2-1\right| + C.$$

U ovu jednakost uvrstimo početni uvjet, tj. $x=\sqrt{2},\ y=1,$ pa dobijemo *linearnu jednadžbu s jednom nepoznanicom C*:

$$\underbrace{\ln|1|}_{=\ln 1=0} = \frac{1}{2}\cdot \underbrace{\ln\left|\left(\sqrt{2}\right)^2-1\right|}_{=\ln|2-1|=\ln|1|=\ln 1=0} + C \Leftrightarrow 0 = \frac{1}{2}\cdot 0 + C \Leftrightarrow C = 0.$$

Tako smo dobili:

$$\ln|y| = \frac{1}{2}\cdot \ln\left|x^2-1\right|,$$

$$\ln|y| = \ln\left(|x^2-1|^{\frac{1}{2}}\right),$$

$$|y| = |x^2-1|^{\frac{1}{2}}.$$

Čini nam se da smo upali u problem. Kako iz ove jednakosti u kojoj se pojavljuju čak dvije apsolutne vrijednosti, i to na različitim stranama jednakosti, dobiti pravilo funkcije y? Vrlo jednostavno: riješit ćemo se obaju znakova apsolutne vrijednosti *na potpuno isti način* kao što smo ih se riješili prilikom određivanja vrijednosti nepoznate konstante C. Što smo tada radili?

Najprije smo računali $\ln|1|$. Što smo ovdje napravili sa znakom apsolutne vrijednosti? „Obrisali“ smo ga jer je pod znakom apsolutne vrijednosti bio strogo pozitivan realan broj 1. Isto to činimo i sa znakom apsolutne vrijednosti u izrazu $|y|$: brišemo ga, pa dobijemo: y.

Računali smo i $\frac{1}{2}\cdot\ln\left|\left(\sqrt{2}\right)^2-1\right|$. Što smo tu napravili sa znakom apsolutne vrijednosti? Pod tim znakom je bio broj $\left(\sqrt{2}\right)^2-1=2-1=1$, tj. strogo pozitivan realan broj, pa smo obrisali znak apsolutne vrijednosti. Isto to činimo i sa znakom apsolutne vrijednosti u izrazu $|x^2-1|^{\frac{1}{2}}$: brišemo ga, pa dobijemo: $\left(x^2-1\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x^2-1}.$

Tako smo se riješili obaju znakova apsolutne vrijednosti i dobili konačno rješenje:

$$y=\sqrt{x^2-1}.$$

b) Zadanu jednadžbu zapišimo u obliku:

$$y' = y^2 - y.$$

Sada imamo slučaj „dualan“ onom iz zadatka 2.a): ovdje su $f(x)=1,\ g(y)=y^2-y.$ Pogledajmo najprije slučaj kad je $g(y)=0$. Iz jednadžbe $y^2-y=0$ slijedi $y_1=0,$ $y_2=1.$ Dakle, konstantne funkcije $y=0$ i $y=1$ su rješenja zadane jednadžbe. Međutim, nijedna od njih nije rješenje zadatka jer ni za jednu od njih ne vrijedi $y(0)=\frac{1}{2}$. Zbog toga ih zanemarujemo u nastavku rješavanja zadatka.

Odredimo standardne antiderivacije funkcija f i $\frac{1}{g}$. Prvu standardnu antiderivaciju dobit ćemo tablično, dok ćemo drugu odrediti postupkom kojega smo obradili u točki 1.5. Imamo redom:

$$\int f(x)\cdot \mathrm{d}x=\int 1\cdot \mathrm{d}x=x,$$

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)}=\int \frac{\mathrm{d}y}{y^2-y}=\int \frac{\mathrm{d}y}{\left(y-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}=\left\{\begin{matrix}\text{zamjena:}\\ t:=y-\frac{1}{2},\\ \mathrm{d}t=\mathrm{d}y\end{matrix}\right\}=\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2-\frac{1}{4}}=\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=$$

$$=\frac{1}{2\cdot\frac{1}{2}}\cdot\ln\left|\frac{t-\frac{1}{2}}{t+\frac{1}{2}}\right|=\ln\left|\frac{\left(y-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}}{\left(y-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}}\right|=\ln\left|\frac{y-1}{y}\right|=\ln\left|\frac{y}{y}-\frac{1}{y}\right|=\ln\left|1-\frac{1}{y}\right|.$$

Tako slijedi:

$$\ln\left|1-\frac{1}{y}\right|=x+C.$$

U ovu jednakost uvrstit ćemo početni uvjet, tj. $x=0,\ y=\frac{1}{2}$:

$$\ln\left|1-\frac{1}{\frac{1}{2}}\right|=0+C\Leftrightarrow \underbrace{\ln|1-2|}_{=\ln|-1|=\ln 1=0}=C\Leftrightarrow C=0.$$

Zbog toga je:

$$\ln\left|1-\frac{1}{y}\right|=x,$$

$$\left|1-\frac{1}{y}\right|=e^x.$$

Iz ove jednakosti možemo izraziti y pomoću x. Ponovno se najprije moramo osloboditi neugodne apsolutne vrijednosti. U tome će nam ponovno pomoći početni uvjet. Postupimo kao u prethodnom podzadatku. Ako u izraz

$$\left|1-\frac{1}{y}\right|=e^x$$

uvrstimo $x=0,\ y=\frac{1}{2}$, dobit ćemo istinitu jednakost $\left|1-\frac{1}{\frac{1}{2}}\right|=e^0$. Kako se u toj jednakosti riješiti znaka apsolutne vrijednosti? Pod tim znakom nalazi se broj

$1-\frac{1}{\frac{1}{2}}=1-2=-1$, pa ne smijemo jednostavno „obrisati“ znak apsolutne vrijednosti jer bismo tako dobili netočnu jednakost $-1=e^0$. Zbog toga se znaka apsolutne vrijednosti rješavamo tako da broju unutar apsolutne vrijednosti promijenimo predznak. To znači da *potpuno isti* postupak (promjena predznaka izraza pod znakom apsolutne vrijednosti) moramo primijeniti i ako se u jednakosti $\left|1-\frac{1}{y}\right|=e^x$ želimo riješiti znaka apsolutne vrijednosti. Tako sada imamo:

$$-\left(1-\frac{1}{y}\right)=e^x,$$

$$-1+\frac{1}{y}=e^x,$$

$$\frac{1}{y}=e^x+1,$$

$$y=\frac{1}{e^x+1}.$$

c) Zadanu jednadžbu transformiramo ovako:

$$y' = \frac{\sin y}{\cos y}\cdot\cos z \Leftrightarrow y' = \operatorname{tg} y\cdot\cos z.$$

Ponovno najprije razmotrimo slučaj kad je $\operatorname{tg} y=0$. Ova jednadžba ima beskonačno mnogo različitih realnih rješenja i ona su dana izrazom $y=\frac{\pi}{4}+k\cdot\pi,\ k\in\mathbb{Z}$. Međutim, nijedna konstantna funkcija oblika $y=\frac{\pi}{4}+k\cdot\pi,\ k\in\mathbb{Z}$, nema svojstvo $y(0)=\frac{\pi}{2}$ koje mora imati traženo rješenje. Zbog toga te funkcije zanemarujemo u nastavku rješenja zadatka.

Preostaje očitati:

$$f(z)=\cos z,\ g(y)=\operatorname{tg} y,$$

pa odrediti:

$$\int f(z)\cdot \mathrm{d}z=\int\cos z\cdot\mathrm{d}z=\sin z,$$

$$\int\frac{\mathrm{d}y}{g(y)}=\int\frac{\mathrm{d}y}{\operatorname{tg} y}=\int\operatorname{ctg} y\cdot\mathrm{d}y=\ln|\sin y|.$$

Uvrštavanjem tih izraza u prvu od dviju formula izvedenih u zadatku 1. dobivamo:

$$\ln|\sin y| = \sin z + C.$$

U ovu jednakost uvrstimo $z = 0,\ y = \dfrac{\pi}{2},$ pa dobijemo:

$$\underbrace{\ln\left|\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right|}_{=\ln|1|=\ln 1=0} = \sin 0 + C \Leftrightarrow 0 = 0 + C \Leftrightarrow C = 0.$$

Tako slijedi:

$$\ln|\sin y| = \sin z.$$

Sad već znamo „trik“ za rješavanje znaka apsolutne vrijednosti. U izrazu $\ln\left|\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\right|$ smo je obrisali jer je pod tim znakom bio strogo pozitivan realan broj 1. Dakle, smijemo je obrisati i u izrazu $\ln|\sin y|$. Dobijemo:

$$\ln(\sin y) = \sin z \Leftrightarrow \sin y = e^{\sin z} \Rightarrow y = \arcsin\left(e^{\sin z}\right).$$

d) Zadanu jednadžbu zapišemo u obliku:

$$y' = \left(y^2 + 1\right) \cdot \cos z.$$

Očitamo:

$$f(z) = \cos z,\ g(y) = y^2 + 1.$$

Jednadžba $g(y) = 0$ nema nijedno realno rješenje jer je $y^2 + 1 > 0,\ \forall y \in \mathbb{R}.$ U ovom slučaju, dakle, ne moramo zasebno razmatrati konstantne funkcije oblika $y = A.$

Standardne antiderivacije funkcija f i $\dfrac{1}{g}$ odredimo tablično:

$$\int f(z) \cdot \mathrm{d}z = \int \cos z \cdot \mathrm{d}z = \sin z,$$
$$\int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = \int \frac{\mathrm{d}y}{y^2 + 1} = \operatorname{arctg} y.$$

Uvrštavanjem u prvu od dviju formula iz zadatka 1. dobijemo:

$$\operatorname{arctg} y = \sin z + C.$$

U ovu jednakost uvrstimo $x = y = 0$, pa slijedi:

$$\underbrace{\operatorname{arctg} 0}_{=0} = \underbrace{\sin 0}_{=0} + C \Leftrightarrow 0 = 0 + C \Leftrightarrow C = 0.$$

Tako konačno dobivamo:

$$\operatorname{arctg} y = \sin z \Rightarrow y = \operatorname{tg}(\sin z).$$

e) Zadanu jednadžbu transformiramo ovako:

$$\begin{aligned}
&\sin(y)\cdot t\cdot y' + \cos y = 0,\\
&\sin(y)\cdot t\cdot y' = -\cos y, \quad / : \sin(y)\cdot t\\
&y' = -\frac{\cos y}{\sin y}\cdot\frac{1}{t},\\
&y' = -\operatorname{ctg} y\cdot\frac{1}{t}.
\end{aligned}$$

Očitamo:

$$f(t) = \frac{1}{t},\ g(y) = -\operatorname{ctg} y.$$

Sva realna rješenja jednadžbe $g(y) = 0$, odnosno jednadžbe $\operatorname{ctg} y = 0$ su $y = \frac{\pi}{2} + k\cdot\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. Nijedna konstantna funkcija oblika $y = \frac{\pi}{2} + k\cdot\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. ne zadovoljava početni uvjet $y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$. Zbog toga ih zanemarujemo u nastavku rješavanja zadatka.

Odredimo standardne antiderivacije funkcija f i $\frac{1}{g}$. Obje te antiderivacije su tablične:

$$\int f(t)\cdot \mathrm{d}t = \int \frac{1}{t}\cdot \mathrm{d}t = \ln|t|,$$

$$\int \frac{1}{g(y)}\cdot \mathrm{d}y = \int \frac{1}{-\operatorname{ctg} y}\cdot \mathrm{d}y = -\int \operatorname{tg} y\cdot \mathrm{d}y = -\left(-\ln|\cos y|\right) = \ln|\cos y|.$$

Uvrštavanjem u prvu od dviju formula iz zadatka 1. dobivamo:

$$\ln|\cos y| = \ln|t| + C\,.$$

U ovu jednakost uvrstimo $t = \frac{1}{2},\ y = \frac{\pi}{3}$, pa dobijemo:

$$\ln\left|\underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)}_{=\frac{1}{2}}\right| = \ln\left|\frac{1}{2}\right| + C \Leftrightarrow \ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\right) + C \Leftrightarrow C = 0.$$

Dakle,

$$\ln|\cos y| = \ln|t|.$$

Vidimo da smo pri određivanju konstante C „obrisali“ oba znaka apsolutne vrijednosti jer je pod tim znakovima bio strogo pozitivan realan broj $\frac{1}{2}$. Zbog toga te znakove „brišemo“ i u gornjoj jednakosti, pa konačno dobijemo:

$$\ln(\cos y) = \ln t \Rightarrow \cos y = t \Rightarrow y = \arccos t.$$

Zadatak 4. Ravninska krivulja K ima svojstvo da svaka njezina točka T raspolavlja odsječak između koordinatnih osi normale povučene na K u T. Odredite jednadžbu krivulje K.

Rješenje: Prve dvije riječi u formulaciji zadatka su ključne: *ravninska krivulja*. One izravno povlače da rješenje zadatka ne mora nužno biti graf neke realne funkcije jedne realne varijable, nego to rješenje može biti i npr. krivulja zadana implicitno (kao npr. središnja jedinična kružnica čija je jednadžba $x^2 + y^2 = 1$)). Mi zapravo tražimo vezu između prve i druge koordinate svake točke krivulje, pri čemu unaprijed ne znamo hoće li ta veza biti funkcijska (tj. je li krivulja K graf neke funkcije) ili implicitna.

Iako ne znamo prirodu veze među koordinatama svake točke krivulje K, pretpostavit ćemo da je ta krivulja graf neke funkcije. Točnije, pretpostavit ćemo da je jednadžba krivulje K dana u obliku $y = y(x)$ i da je $T = (x_T, y_T) \in K$ *bilo koja* točka krivulje K. Jednadžba normale povučene na K u T glasi:

$$y - y_T = \frac{-1}{y'(x_T)} \cdot (x - x_T).$$

Ovdje treba dobro pripaziti: y koji se pojavljuje na lijevoj strani gornje jednadžbe pravca *nema nikakve veze* s y koji se pojavljuje u izrazu $y = y(x)$. Jednostavno, riječ je o istom slovu kojega ovdje koristimo za oznake dviju različitih zavisnih varijabli (prva se odnosi na krivulju K, a druga na normalu).

U zadatku se spominje odsječak normale između koordinatnih osi. Zbog toga je primjereno i korisno zapisati jednadžbu normale u segmentnom obliku jer upravo iz toga oblika izravno možemo „očitati“ sjecišta normale s koordinatnim osima. (Jasno, ta sjecišta možemo dobiti i analitički rješavanjem odgovarajućih jednadžbi. Za vježbu, odredite ih na taj način.) Tako redom imamo:

$$y = \frac{-1}{y'(x_T)} \cdot x + \frac{x_T}{y'(x_T)} + y_T,$$

$$\frac{1}{y'(x_T)} \cdot x + y = \frac{x_T}{y'(x_T)} + y_T,$$

$$\frac{\frac{x}{y'(x_T)}}{\frac{x_T}{y'(x_T)} + y_T} + \frac{y}{\frac{x_T}{y'(x_T)} + y_T} = 1,$$

$$\frac{x}{x_T + y'(x_T) \cdot y_T} + \frac{y}{\frac{x_T}{y'(x_T)} + y_T} = 1.$$

Sjecište normale s osi apscisa označimo sa S_x, a sjecište normale s osi ordinata sa S_y. Iz gornje jednadžbe normale zapisane u segmentnom obliku očitamo:

$$S_x = \left(x_T + y'(x_T) \cdot y_T, 0\right),\ S_y = \left(0, \frac{x_T}{y'(x_T)} + y_T\right).$$

Odsječak normale između koordinatnih osi je dužina $\overline{S_x S_y}$. Koordinate njezina polovišta P su aritmetička sredina prvih, odnosno drugih koordinata njezinih krajeva. Dakle,

$$P = \left(\frac{x_T + y'(x_T) \cdot y_T + 0}{2}, \frac{0 + \frac{x_T}{y'(x_T)} + y_T}{2}\right) = \left(\frac{x_T + y'(x_T) \cdot y_T}{2}, \frac{x_T + y'(x_T) \cdot y_T}{2 \cdot y'(x_T)}\right).$$

Prema zahtjevu zadatka, polovište P mora biti jednako točki T. Taj zahtjev će biti ispunjen ako prva koordinata točke P bude jednaka prvoj koordinati točke T i ako druga koordinata točke P bude jednaka drugoj koordinati točke T. Tako dobivamo:

$$\left(\frac{x_T + y'(x_T) \cdot y_T}{2}, \frac{x_T + y'(x_T) \cdot y_T}{2 \cdot y'(x_T)}\right) = (x_T, y_T) \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{x_T + y'(x_T) \cdot y_T}{2} = x_T, \\ \frac{x_T + y'(x_T) \cdot y_T}{2 \cdot y'(x_T)} = y_T \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_T + y'(x_T) \cdot y_T = 2 \cdot x_T, \\ x_T + y'(x_T) \cdot y_T = 2 \cdot y'(x_T) \cdot y_T \end{cases} \Leftrightarrow y'(x_T) \cdot y_T = x_T.$$

Primijetite da smo dvije jednadžbe naposljetku sveli na jednu (koja se formalno ponavlja dvaput, ali „kopiju“ te jednadžbe, naravno, ne pišemo). U zadacima ovoga tipa ta „pojava“ će se redovito događati.

Posljednja jednadžba predstavlja vezu između dviju koordinata točke T. Ta veza nije ni eksplicitna, ni implicitna jer se u njoj pojavljuje derivacija funkcije y. To znači da je dobivena veza opisana običnom diferencijalnom jednadžbom 1. reda. Ona vrijedi za *svaku* točku T krivulje K, pa možemo maknuti indekse i točku x_T u izrazu $y'(x_T)$ kako bismo dobili uobičajeni zapis obične diferencijalne jednadžbe:

$$y' \cdot y = x.$$

Zapišimo tu jednadžbu u obliku:

$$y' = x \cdot \frac{1}{y},$$

pa vidimo da se radi o običnoj diferencijalnoj jednadžbi 1. reda sa razdvojenim varijablama. Očitamo: $f(x) = x,\ g(y) = \frac{1}{y}$, pa odmah vidimo da jednadžba $g(y) = 0$ nema nijedno realno (ali ni kompleksno!) rješenje. Standardne antiderivacije funkcija f i $\frac{1}{g}$ su tablične, pa odmah možemo pisati:

$$\int \frac{1}{\frac{1}{y}} \cdot \mathrm{d}y = \int x \cdot \mathrm{d}x + C \Leftrightarrow \int y \cdot \mathrm{d}y = \int x \cdot \mathrm{d}x + C \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot y^2 = \frac{1}{2} \cdot x^2 + C \Leftrightarrow y^2 = x^2 + 2 \cdot C.$$

Funkcija $h(x) = 2 \cdot x$ je bijekcija sa skupa $\mathbb{R}$ na samoga sebe. To znači da, ako je C konstanta, onda je i $2 \cdot C$ također konstanta, i to iz istoga skupa ($\mathbb{R}$). Zbog toga možemo označiti $C_1 = 2 \cdot C$ i zaključiti da je $C_1 \in \mathbb{R}$ *bilo koja* konstanta. (Da funkcija h nije bijekcija, morali bismo utvrditi kojem podskupu skupa $\mathbb{R}$ pripada C_1.) Prema tome, rješenje zadatka je *familija ravninskih krivulja* implicitno zadanih jednadžbom:

$$y^2 = x^2 + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

Napomena: Dobivena familija ravninskih krivulja je familija hiperbola.

Zadatak 5. Ravninska krivulja K prolazi točkom $A = (2, 4)$. Odsječak bilo koje njezine tangente određen diralištem tangente i osi apscisa ima polovište u sjecištu te tangente s osi ordinata. Odredite jednadžbu krivulje K.

Rješenje: Postupimo potpuno analogno kao u prethodnom zadatku. Pretpostavimo da je jednadžba krivulje K dana u obliku $y = y(x)$ i da je $T = (x_T, y_T) \in K$ *bilo koja* točka krivulje K. Jednadžba tangente povučene na K u T glasi:

$$y - y_T = y'(x_T) \cdot (x - x_T).$$

Zapišimo tu jednadžbu u segmentnom obliku:

$$\begin{aligned} &y = y'(x_T) \cdot x - y'(x_T) \cdot x_T + y_T, \\ &-y'(x_T) \cdot x + y = -y'(x_T) \cdot x_T + y_T, \\ &\frac{-y'(x_T) \cdot x}{-y'(x_T) \cdot x_T + y_T} + \frac{y}{-y'(x_T) \cdot x_T + y_T} = 1, \\ &\frac{x}{x_T - \frac{y_T}{y'(x_T)}} + \frac{y}{-y'(x_T) \cdot x_T + y_T} = 1. \end{aligned}$$

Sjecište tangente s osi apscisa označimo sa S_x, a sjecište tangente s osi ordinata sa S_y. Iz gornje jednadžbe normale zapisane u segmentnom obliku očitamo:

$$S_x = \left(x_T - \frac{y_T}{y'(x_T)}, 0 \right),\ S_y = \left(0, -y'(x_T) \cdot x_T + y_T \right).$$

Odsječak tangente određen diralištem tangente i osi apscisa je dužina $\overline{TS_x}$. Odredimo njezino polovište P:

$$P = \left(\frac{x_T + x_T - \frac{y_T}{y'(x_T)}}{2}, \frac{y_T + 0}{2} \right) = \left(\frac{2 \cdot x_T \cdot y'(x_T) - y_T}{2 \cdot y'(x_T)}, \frac{y_T}{2} \right).$$

Prema zahtjevu zadatka, točka P mora biti jednaka točki S_y. Izjednačavanjem pripadnih koordinata dobivamo:

$$\begin{cases} 0 = \dfrac{2 \cdot x_T \cdot y'(x_T) - y_T}{2 \cdot y'(x_T)}, \\ -y'(x_T) \cdot x_T + y_T = \dfrac{y_T}{2} \end{cases} \Rightarrow 2 \cdot x_T \cdot y'(x_T) - y_T = 0.$$

(Ponovno se ista jednadžba pojavljuje dvaput, pa ne pišemo njezinu „kopiju“.) „Brisanjem“ indeksa i x_T u članu $y'(x_T)$ dobivamo običnu diferencijalnu jednadžbu:

$$2 \cdot x \cdot y' - y = 0.$$

Ovu jednadžbu zapišemo u obliku:

$$y' = \frac{1}{2 \cdot x} \cdot y,$$

pa vidimo da se radi o običnoj diferencijalnoj jednadžbi 1. reda sa razdvojenim varijablama. Očitamo:

$$f(x) = \frac{1}{2 \cdot x},\ g(y) = y.$$

Jednadžba $g(y) = 0$ ima jedinstveno rješenje $y = 0$. Međutim, pravac $y = 0$ ne prolazi točkom A, pa on ne može biti rješenje zadatka. Zbog toga ga zanemarujemo u nastavku rješavanja.

Standardne antiderivacije funkcija f i $\frac{1}{g}$ su tablične:

$$\int f(x) \cdot \mathrm{d}x = \int \frac{1}{2 \cdot x} \cdot \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \cdot \int \frac{1}{x} \cdot \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \cdot \ln|x|,$$
$$\int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = \int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \ln|y|.$$

Uvrštavanjem u prvu od dviju formula dobivenih u rješenju zadatka 1. dobivamo:

$$\ln|y| = \frac{1}{2} \cdot \ln|x| + C.$$

Krivulja mora prolaziti točkom A, što znači da uvrštavanjem koordinata te točke u gornju jednakost moramo dobiti identitet. Dakle, uvrstimo $x = 2,\ y = 4,$ pa dobijemo:

$$\ln|4| = \frac{1}{2} \cdot \ln|2| + C \Leftrightarrow \ln 4 = \frac{1}{2} \cdot \ln 2 + C \Leftrightarrow$$
$$C = \ln 4 - \frac{1}{2} \cdot \ln 2 = \ln\left(2^2\right) - \frac{1}{2} \cdot \ln 2 = 2 \cdot \ln 2 - \frac{1}{2} \cdot \ln 2 = \frac{3}{2} \cdot \ln 2.$$

Zbog toga je:

$$\ln|y| = \frac{1}{2} \cdot \ln|x| + \frac{3}{2} \cdot \ln 2.$$

Iz ove jednakosti treba izraziti *y*. Ponovimo „trik“ s uklanjanjem znakova apsolutne vrijednosti koji smo vidjeli u rješenjima podzadataka zadatka 3. Kad smo određivali vrijednost konstante *C*, jednostavno smo izbrisali znakove apsolutne vrijednosti jer su se pod njima nalazili strogo pozitivni realni brojevi 4 i 2. Potpuno analogno postupimo i u ovom slučaju. „Brišemo“ znakove apsolutne vrijednosti, pa dalje, korištenjem osnovnih svojstava logaritamske funkcije, slijedi:

$$\ln y = \frac{1}{2}\cdot \ln x + \frac{3}{2}\cdot \ln 2 \Leftrightarrow 2\cdot \ln y = \ln x + 3\cdot \ln 2 \Leftrightarrow \ln\left(y^2\right) = \ln x + \ln\left(2^3\right) \Leftrightarrow$$
$$\ln\left(y^2\right) = \ln\left(x\cdot 2^3\right) \Leftrightarrow y^2 = x\cdot 2^3 \Leftrightarrow y^2 = 8\cdot x.$$

Dakle, tražena je krivulja parabola $y^2 = 8\cdot x.$

Zadatak 6. Napišite jednadžbu krivulje koja prolazi točkom $A = (3,\, 5)$ i ima svojstvo da je koeficijent smjera tangente povučene u bilo kojoj njezinoj točki jednak količniku apscise i ordinate pripadnoga dirališta.

Rješenje: Postupimo potpuno analogno kao u prethodnim zadacima. Koeficijent smjera tangente u točki $T = (x_T, y_T)$ jednak je $y'(x_T)$, pa dobivamo jednadžbu:

$$y'(x_T) = \frac{x_T}{y_T}.$$

„Brisanjem“ indeksa i x_T u članu $y'(x_T)$, te kvadriranjem i sređivanjem dobivamo:

$$y' = \frac{x}{y} = x\cdot\frac{1}{y}.$$

Očitamo:

$$f(x) = x,\ g(y) = \frac{1}{y}.$$

Jednadžba $g(y) = 0$ nema realnih rješenja, pa ne moramo razmatrati zasebne slučajeve. Standardne antiderivacije funkcija f i $\frac{1}{g}$ su tablične:

$$\int f(x)\cdot \mathrm{d}x = \int x\cdot \mathrm{d}x = \cdot\frac{1}{1+1}\cdot x^{1+1} = \frac{1}{2}\cdot x^2,$$
$$\int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = \int \frac{\mathrm{d}y}{\frac{1}{y}} = \int y\cdot \mathrm{d}y = \frac{1}{1+1}\cdot y^{1+1} = \frac{1}{2}\cdot y^2,$$

pa uvrštavanjem u prvu od dviju formula iz zadatka 1. dobivamo:

$$\frac{1}{2}\cdot y^2 = \frac{1}{2}\cdot x^2 + C.$$

Dobivena krivulja mora prolaziti točkom *A*, što znači da njezine koordinate moraju zadovoljavati jednadžbu krivulje. Zbog toga u gornji izraz uvrstimo $x=3,\ y=5$, pa slijedi:

$$\frac{1}{2}\cdot 5^2=\frac{1}{2}\cdot 3^2+C \Leftrightarrow C=\frac{1}{2}\cdot\left(5^2-3^2\right)=\frac{1}{2}\cdot(25-9)=\frac{1}{2}\cdot 16=8.$$

Tako dalje imamo:

$$\frac{1}{2}\cdot y^2=\frac{1}{2}\cdot x^2+16 \Leftrightarrow y^2=x^2+16.$$

Zadatak 7. Odredite jednadžbu ravninske krivulje koja prolazi točkom $A=(1,-1)$ i ima svojstvo da je koeficijent smjera normale u bilo kojoj njezinoj točki dvostruko veći od kvadrata količnika apscise i ordinate te točke.

Rješenje: Postupimo potpuno analogno kao u prethodnim zadacima. Koeficijent smjera normale u točki $T=(x_T, y_T)$ jednak je $-\frac{1}{y'(x_T)}$, pa dobivamo jednadžbu:

$$-\frac{1}{y'(x_T)}=2\cdot\left(\frac{x_T}{y_T}\right)^2.$$

„Brisanjem“ indeksa i x_T u članu $y'(x_T)$, te kvadriranjem i sređivanjem dobivamo:

$$y'=\frac{-1}{2\cdot x^2}\cdot y^2.$$

Očitamo:

$$f(x)=-\frac{1}{2\cdot x^2},\ g(y)=y^2.$$

Jednadžba $g(y)=0$ ima jedino rješenje $y=0$. Međutim, pravac $y=0$ očito ne prolazi točkom *A*, pa ga zanemarujemo u nastavku rješavanja zadatka.

Standardne antiderivacije funkcija f i $\frac{1}{g}$ su tablične:

$$\int f(x)\cdot \mathrm{d}x=\int\frac{-1}{2\cdot x^2}\cdot \mathrm{d}x=\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\int x^{-2}\cdot \mathrm{d}x=\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{-2+1}\cdot x^{-2+1}=\frac{1}{2}\cdot x^{-1}=\frac{1}{2\cdot x}$$
$$\int\frac{\mathrm{d}y}{g(y)}=\int\frac{\mathrm{d}y}{y^2}=\int y^{-2}\cdot \mathrm{d}y=\frac{1}{-2+1}\cdot y^{-2+1}=-\frac{1}{y},$$

pa uvrštavanjem u prvu od dviju formula iz zadatka 1. dobivamo:

$$-\frac{1}{y}=\frac{1}{2\cdot x}+C.$$

Dobivena krivulja mora prolaziti točkom A, što znači da njezine koordinate moraju zadovoljavati jednadžbu krivulje. Zbog toga u gornji izraz uvrstimo $x=1,\ y=-1$, pa slijedi:

$$-\frac{1}{-1}=\frac{1}{2\cdot 1}+C\Leftrightarrow 1=\frac{1}{2}+C\Rightarrow C=\frac{1}{2}.$$

Tako dalje imamo:

$$-\frac{1}{y}=\frac{1}{2\cdot x}+\frac{1}{2}\Rightarrow y=\frac{-1}{\frac{1}{2\cdot x}+\frac{1}{2}}=\frac{-2\cdot x}{x+1}.$$

Zadatak 8. Riješite jednadžbu: $x+x\cdot y=y^{'}\cdot(y+x\cdot y)$.

Rješenje: Zadanu jednadžbu transformiramo ovako:

$$x+x\cdot y=y^{'}\cdot(y+x\cdot y)\Leftrightarrow y^{'}=\frac{x+x\cdot y}{y+x\cdot y}=\frac{\frac{x}{x\cdot y}+\frac{x\cdot y}{x\cdot y}}{\frac{y}{x\cdot y}+\frac{x\cdot y}{x\cdot y}}=\frac{\frac{1}{y}+1}{\frac{1}{x}+1}=\frac{1}{\frac{1}{x}+1}\cdot\left(\frac{1}{y}+1\right)=\frac{x}{x+1}\cdot\left(\frac{1}{y}+1\right)\Rightarrow$$

$$y^{'}=\left(1-\frac{1}{x+1}\right)\cdot\left(\frac{1}{y}+1\right).$$

Očitamo:

$$f(x)=1-\frac{1}{x+1},\ g(y)=\frac{1}{y}+1.$$

Iz jednadžbe $g(y)=0$ slijedi $\frac{1}{y}+1=0$, odnosno $y=-1$. Uvrstimo li $y=-1$ u zadanu jednadžbu, dobit ćemo identitet $0=0$, pa je ova funkcija rješenje zadane jednadžbe.

Integrali funkcija f i $\frac{1}{g}$ su „skoro-tablični“:

$$\int f(x)\cdot \mathrm{d}x=\int\left(1-\frac{1}{x+1}\right)\cdot \mathrm{d}x=\int 1\cdot \mathrm{d}x-\int\frac{1}{x+1}\cdot \mathrm{d}x=x-\ln\left|x+1\right|,$$

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = \int \frac{\mathrm{d}y}{\frac{1}{y}+1} = \int \frac{\mathrm{d}y}{\frac{y+1}{y}} = \int \frac{y}{y+1}\cdot \mathrm{d}y = \int \left(1-\frac{1}{y+1}\right)\cdot \mathrm{d}y = \int 1\cdot \mathrm{d}y - \int \frac{1}{y+1}\cdot \mathrm{d}y = y-\ln\left|y+1\right|.$$

Uvrštavanjem u prvu od dviju formula iz zadatka 1. dobivamo:

$$y-\ln|y+1| = x-\ln|x+1|+C,$$
$$y-x = \ln|y+1|-\ln|x+1|+C,$$
$$y-x = \ln\left|\frac{y+1}{x+1}\right|+C,\ C\in\mathbb{R}.$$

Dobiveni izraz, zajedno s funkcijom $y=-1$, predstavlja rješenje zadatka jer iz gornje jednakosti ne možemo eksplicitno izraziti varijablu y pomoću varijable x.

Zadatak 9. Riješite jednadžbu: $3\cdot y' = 2\cdot e^{2\cdot x-3\cdot y}$.

Rješenje: Zapišimo jednadžbu u obliku

$$y' = \left(2\cdot e^{2\cdot x}\right)\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot e^{-3\cdot y}\right),$$

pa očitamo:

$$f(x) = 2\cdot e^{2\cdot x},\ g(y) = \frac{1}{3}\cdot e^{-3\cdot y}.$$

Očito je $g(y)>0,\ \forall y\in\mathbb{R}$, pa ne moramo zasebno razmatrati slučaj nultočaka funkcije g.

Integrali funkcija f i $\frac{1}{g}$ su „skoro-tablični“:

$$\int f(x)\cdot \mathrm{d}x = \int 2\cdot e^{2\cdot x}\cdot \mathrm{d}x = e^{2\cdot x},$$
$$\int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = \int \frac{\mathrm{d}y}{\frac{1}{3}\cdot e^{-3\cdot y}} = \int 3\cdot e^{3\cdot y}\cdot \mathrm{d}y = e^{3\cdot y}.$$

Tako konačno dobivamo:

$$e^{3\cdot y} = e^{2\cdot x}+C \Rightarrow 3\cdot y = \ln\left(e^{2\cdot x}+C\right) \Rightarrow y = \frac{1}{3}\cdot\ln\left(e^{2\cdot x}+C\right),\ C\in\mathbb{R}.$$

Domaća zadaća

Riješite sljedeće Cauchyjeve probleme:

1. $\begin{cases} y' = 6 \cdot t^5, \\ y(0) = 1. \end{cases}$

2. $\begin{cases} y' - \sqrt{1-y^2} = 0, \\ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1. \end{cases}$ (Pretpostavite da je nezavisna varijabla označena s x.)

3. $\begin{cases} y' = \dfrac{2 \cdot t \cdot y}{t^2+1}, \\ y(2) = 5. \end{cases}$

4. $\begin{cases} 4 \cdot y - x \cdot y' = 8, \\ y(2) = 50. \end{cases}$

5. $\begin{cases} t \cdot \mathrm{d}y = y \cdot \ln y \cdot \mathrm{d}t, \\ y(4) = e^2. \end{cases}$

6. Odredite jednadžbu ravninske krivulje koja prolazi točkom $A = (1, -3)$ i ima svojstvo da je koeficijent smjera bilo koje njezine tangente jednak kvadratu umnoška koordinata dirališta te tangente.

Rezultati zadataka za domaću zadaću:

1. $y = t^6 + 1.$

2. $y = \sin x.$

3. $y = t^2 + 1.$

4. $y = 3 \cdot x^4 + 2.$

5. $y = e^{\frac{t}{2}}.$

6. $y = -\dfrac{3}{x^3}.$