

 <b>TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU</b> <b>POLYTECHNICUM ZAGREBIENSE</b> <b>Elektrotehnički odjel</b>	<b>Matematika 2</b> (preddiplomski stručni studij elektrotehnike)	3.2. ODJ 1. reda sa razdvojenim (separiranim) varijablama. Neke homogene ODJ 1. reda. - zadaci
--	---	--

1. Riješite sljedeće jednadžbe:

- a)**  $y' = 3 \cdot x^2$ ;
- b)**  $y' = \operatorname{ctg} x$ ;
- c)**  $x \cdot y' + y = 0$ ;
- d)**  $x \cdot y \cdot y' + x^2 = 1$ ;
- e)**  $y' = (y-1) \cdot (y-2)$ ;
- f)**  $x \cdot e^x \cdot dx - y \cdot dy = 0$ .

2. Ravninska krivulja  $K$  ima svojstvo da svaka njezina točka  $T$  raspolavlja odsječak između koordinatnih osi normale povučene na  $K$  u  $T$ . Odredite jednadžbu krivulje  $K$ .
3. Ravninska krivulja  $K$  prolazi točkom  $A = (2, 4)$ . Odsječak bilo koje njezine tangente određen diralištem tangente i osi apscisa ima polovište u sjecištu te tangente s osi ordinata. Odredite jednadžbu krivulje  $K$ .
4. Riješite sljedeće jednadžbe:
- a)**  $y' = \frac{y}{x} - 1$ ;
  - b)**  $(x-y) \cdot y \cdot dx - x^2 \cdot dy = 0$ .
5. Ravninska krivulja  $K$  ima svojstvo da je odsječak kojega na osi ordinata odsijeca bilo koja njezina tangenta jednak apscisi dirališta te tangente. Odredite jednadžbu krivulje  $K$ .
6. Ravninska krivulja  $K$  ima svojstvo da je odsječak kojega na osi ordinata odsijeca bilo koja njezina normala jednak udaljenosti dirališta pripadne tangente od ishodišta koordinatnoga sustava. Odredite jednadžbu krivulje  $K$ .

 TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU POLYTECHNICUM ZAGREBIENSE Elektrotehnički odjel	<b>Matematika 2</b> (preddiplomski stručni studij elektrotehnike)	3.2. ODJ 1. reda sa razdvojenim (separiranim) varijablama. Neke homogene ODJ 1. reda. - zadaci
---	---	--

## RJEŠENJA ZADATAKA

*Napomena:* Ne istaknemo li drugačije, u svim rješenjima zadataka je  $C \in \mathbb{R}$  konstanta.

**1.**

a)  $y = \int 3 \cdot x^2 \cdot x = x^3 + C;$

b)  $y = \int \operatorname{ctg} x \cdot dx = \ln |\sin x| + C;$

c)  $x \cdot y' + y = 0 \Leftrightarrow x \cdot y' = -y \Leftrightarrow x \cdot \frac{dy}{dx} = -y \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x} \Leftrightarrow \ln y = -\ln x + \ln C \Leftrightarrow y = \frac{C}{x}, C \in \mathbb{R}^+;$

d)  $x \cdot y \cdot y' + x^2 = 1 \Leftrightarrow y \cdot y' = \frac{1-x^2}{x} \Leftrightarrow y \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} - x \Leftrightarrow \int y \cdot dy = \int \left( \frac{1}{x} - x \right) \cdot dx \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot y^2 = \ln x - \frac{1}{2} \cdot x^2 + \frac{1}{2} \cdot C \Leftrightarrow x^2 + y^2 = \ln(x^2) + C;$

e)  $y' = (1-y) \cdot (2-y) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = (1-y) \cdot (2-y) \Leftrightarrow \frac{dy}{(1-y) \cdot (2-y)} = dx \Leftrightarrow \int \frac{dy}{(1-y) \cdot (2-y)} = \int dx$

$\frac{1}{(1-y) \cdot (2-y)} = \frac{A_1}{1-y} + \frac{A_2}{2-y} \Rightarrow 1 = -(A_1 + A_2) \cdot y + (2 \cdot A_1 + A_2) \Rightarrow A_1 + A_2 = 0, 2 \cdot A_1 + A_2 = 1 \Rightarrow$

$A_1 = 1, A_2 = -1 \Rightarrow \frac{1}{(1-y) \cdot (2-y)} = \frac{1}{1-y} - \frac{1}{2-y}$

$\int \frac{dy}{(1-y) \cdot (2-y)} = \int dx \Leftrightarrow \int \left( \frac{1}{1-y} - \frac{1}{2-y} \right) dy = \int dx \Rightarrow -\ln(1-y) + \ln(2-y) = x + C \Rightarrow$

$\ln \frac{2-y}{1-y} = x + C \Rightarrow y = \frac{C \cdot e^x - 2}{C \cdot e^x - 1}, C \in \mathbb{R}^+;$

f)  $x \cdot e^x \cdot dx - y \cdot dy = 0 \Leftrightarrow y \cdot dy = x \cdot e^x \cdot dx \Leftrightarrow \int y \cdot dy = \int x \cdot e^x \cdot dx$

$\int x \cdot e^x \cdot dx = \begin{cases} u = x & v = \int e^x \cdot dx = e^x \\ du = 1 \cdot dx & dv = e^x \cdot dx \end{cases} = x \cdot e^x - \int 1 \cdot e^x \cdot dx = x \cdot e^x - e^x = (x-1) \cdot e^x$

$\int y \cdot dy = \int x \cdot e^x \cdot dy \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot y^2 = (x-1) \cdot e^x + \frac{1}{2} \cdot C \Leftrightarrow y = \sqrt{2 \cdot (x-1) \cdot e^x + C}.$

**2.** Iz zadanih podataka dobivamo običnu diferencijalnu jednadžbu:

$$y' = \frac{x}{y}.$$

Riješimo tu jednadžbu:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} \Leftrightarrow y \cdot dy = x \cdot dx \Leftrightarrow \int y \cdot dy = \int x \cdot dx \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot y^2 = \frac{1}{2} \cdot x^2 + \frac{1}{2} \cdot C \Leftrightarrow y^2 - x^2 = C.$$

Prema tome, tražene krivulje su sve krivulje porodice  $y^2 - x^2 = C$ .

**3.** Iz zadanih podataka dobivamo sljedeći Cauchyjev problem:

 TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU POLYTECHNICUM ZAGREBIENSE Elektrotehnički odjel	<b>Matematika 2</b> (preddiplomski stručni studij elektrotehnike)	3.2. ODJ 1. reda sa razdvojenim (separiranim) varijablama. Neke homogene ODJ 1. reda. - zadaci
---	---	--

$$\begin{cases} y' = \frac{y}{2 \cdot x}, \\ y(2) = 4. \end{cases}$$

Riješimo taj problem. Najprije riješimo običnu diferencijalnu jednadžbu:

$$\frac{dy}{y} = \frac{1}{2} \cdot \frac{dx}{x} \Leftrightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x} \Leftrightarrow \ln y = \frac{1}{2} \cdot \ln x + \ln C, \quad C \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow y^2 = C \cdot x, \quad C \in \mathbb{R}^+.$$

Nepoznatu konstantu  $C$  odredit ćemo iz činjenice da krivulja mora prolaziti točkom  $A$ . Uvrštenjem  $x = 2, y = 4$  dobiva se jednadžba  $2 \cdot C = 16$  iz koje je  $C = 8$ . Dakle, tražena krivulja je parabola  $y^2 = 8 \cdot x$ .

**4. a)** Zadana jednadžba je očito homogena. Zamijenimo  $y = u \cdot x$ , gdje je  $u = u(x)$  nepoznata funkcija. Deriviranjem te jednakosti dobijemo:

$$y' = u' \cdot x + u,$$

pa uvrštavanjem u zadanu jednadžbu dobivamo:

$$u' \cdot x + u = u - 1,$$

odnosno

$$u' \cdot x = -1.$$

Riješimo ovu jednadžbu:

$$\frac{du}{dx} = -\frac{1}{x} \Leftrightarrow du = -\frac{dx}{x} \Leftrightarrow \int du = -\int \frac{dx}{x} \Leftrightarrow u = -\ln x + C \Leftrightarrow u = C - \ln x.$$

Zbog toga je konačno

$$y = u \cdot x = C \cdot x - x \cdot \ln x.$$

**b)** Polaznu jednadžbu najprije zapišimo u obliku

$$y' = \frac{y}{x} - \left( \frac{y}{x} \right)^2.$$

Ta jednadžba je očito homogena. Zamjenom  $y = u \cdot x$  i  $y' = u' \cdot x + u$ , gdje je  $u = u(x)$  nepoznata funkcija, dobivamo jednadžbu:

$$u' \cdot x + u = u - u^2,$$

 <b>TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU</b> <b>POLYTECHNICUM ZAGREBIENSE</b> <b>Elektrotehnički odjel</b>	<b>Matematika 2</b> (preddiplomski stručni studij elektrotehnike)	3.2. ODJ 1. reda sa razdvojenim (separiranim) varijablama. Neke homogene ODJ 1. reda. - zadaci
--	---	--

odnosno jednadžbu

$$u' \cdot x = -u^2.$$

Riješimo tu jednadžbu:

$$\frac{du}{dx} \cdot x = -u^2 \Leftrightarrow -\frac{du}{u^2} = \frac{dx}{x} \Leftrightarrow \int -\frac{du}{u^2} = \int \frac{dx}{x} \Leftrightarrow \frac{1}{u} = \ln x + C \Leftrightarrow u = \frac{1}{\ln x + C}.$$

Zbog toga je konačno rješenje:

$$y = u \cdot x = \frac{x}{\ln x + C}.$$

**5.** Iz zadanih podataka dobivamo homogenu običnu diferencijalnu jednadžbu 1. reda:

$$y' = \frac{y}{x} - 1.$$

Ovu jednadžbu riješili smo u zadatku 4. a). Zbog toga su tražene krivulje svi elementi familije  $y = C \cdot x - x \cdot \ln x$ .

**6.** Iz zadanih podataka dobivamo homogenu običnu diferencijalnu jednadžbu 1. reda:

$$y = \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} + \frac{y}{x}.$$

Zamjenom  $y = u \cdot x$  i  $y' = u' \cdot x + u$ , gdje je  $u = u(x)$  nepoznata funkcija, dobivamo:

$$\begin{aligned} u' \cdot x + u &= \sqrt{1+u^2} + u \Rightarrow \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \ln\left(u + \sqrt{1+u^2}\right) = \ln x + \ln C \Rightarrow u + \sqrt{1+u^2} = C \cdot x \Rightarrow \frac{y}{x} + \sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} = C \cdot x \Rightarrow \\ &\Rightarrow 1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2 = \left(C \cdot x - \frac{y}{x}\right)^2 \Rightarrow 1 = C^2 \cdot x^2 - 2 \cdot C \cdot y \Rightarrow \\ &\Rightarrow y = \frac{C^2 \cdot x^2 - 1}{2 \cdot C} = \frac{C}{2} \cdot \left(x^2 - \frac{1}{C^2}\right), \quad C \in \mathbb{R}^+. \end{aligned}$$

Dakle, tražene krivulje su sve krivulje iz porodice parabola

$$y = \frac{C}{2} \cdot x^2 - \frac{1}{2 \cdot C}, \quad C \in \mathbb{R}^+.$$