

 TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU <small>POLYTECHNICUM ZAGRBIENSE</small>	KATEDRA ZA ZAJEDNIČKE PREDMETE	Matematika 2 <small>(prediplomski stručni studij elektrotehnike)</small>	3.2. ODJ 1. REDA SA RAZDVOJENIM (SEPARIRANIM) VARIJABLAMA. NEKE HOMOGENE ODJ 1. REDA – zadaci
--	---	--	--

1. Riješite sljedeće jednadžbe:

- a) $y' = 3 \cdot x^2$;
- b) $y' = \operatorname{ctg} x$;
- c) $x \cdot y' + y = 0$;
- d) $x \cdot y \cdot y' + x^2 = 1$;
- e) $y' = (y-1) \cdot (y-2)$;
- f) $x \cdot e^x \cdot dx - y \cdot dy = 0$.

2. Ravninska krivulja K ima svojstvo da svaka njezina točka T raspolaže odsječak između koordinatnih osi normale povučene na K u T . Odredite jednadžbu krivulje K .

3. Ravninska krivulja K prolazi točkom $A = (2, 4)$. Odsječak bilo koje njezine tangente određen diralištem tangente i osi apscisa ima polovište u sjecištu te tangente s osi ordinata. Odredite jednadžbu krivulje K .

4. Riješite sljedeće jednadžbe:

- a) $y' = \frac{y}{x} - 1$;
- b) $(x-y) \cdot y \cdot dx - x^2 \cdot dy = 0$.

5. Ravninska krivulja K ima svojstvo da je odsječak kojega na osi ordinata odsijeca bilo koja njezina tangenta jednak apscisi dirališta te tangente. Odredite jednadžbu krivulje K .

6. Ravninska krivulja K ima svojstvo da je odsječak kojega na osi ordinata odsijeca bilo koja njezina normala jednak udaljenosti dirališta pripadne tangente od ishodišta koordinatnoga sustava. Odredite jednadžbu krivulje K .

 KATEDRA ZA ZAJEDNIČKE PREDMETE <small>TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU POLYTECHNICUM ZAGABRIENSE</small>	Matematika 2 <small>(prediplomski stručni studij elektrotehnike)</small>	3.2. ODJ 1. REDA SA RAZDVOJENIM (SEPARIRANIM) VARIJABLAMA. NEKE HOMOGENE ODJ 1. REDA – zadaci
--	--	--

RJEŠENJA ZADATAKA

Napomena: Ne istaknemo li drugačije, u svim rješenjima zadatka je $C \in \mathbb{R}$ konstanta.

1.

a) $y = \int 3 \cdot x^2 \cdot dx = x^3 + C;$

b) $y = \int \operatorname{ctg} x \cdot dx = \ln |\sin x| + C;$

c) $x \cdot y' + y = 0 \Leftrightarrow x \cdot y' = -y \Leftrightarrow x \cdot \frac{dy}{dx} = -y \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x} \Leftrightarrow \ln y = -\ln x + \ln C \Leftrightarrow y = \frac{C}{x}, C \in \mathbb{R}^+;$

d) $x \cdot y \cdot y' + x^2 = 1 \Leftrightarrow y \cdot y' = \frac{1-x^2}{x} \Leftrightarrow y \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} - x \Leftrightarrow \int y \cdot dy = \int \left(\frac{1}{x} - x \right) \cdot dx \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot y^2 = \ln x - \frac{1}{2} \cdot x^2 + \frac{1}{2} \cdot C \Leftrightarrow x^2 + y^2 = \ln(x^2) + C;$

e) $y' = (1-y) \cdot (2-y) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = (1-y) \cdot (2-y) \Rightarrow \frac{dy}{(1-y) \cdot (2-y)} = dx \Rightarrow \int \frac{dy}{(1-y) \cdot (2-y)} = \int dx$

$\frac{1}{(1-y) \cdot (2-y)} = \frac{A_1}{1-y} + \frac{A_2}{2-y} \Rightarrow 1 = -(A_1 + A_2) \cdot y + (2 \cdot A_1 + A_2) \Rightarrow A_1 + A_2 = 0, 2 \cdot A_1 + A_2 = 1 \Rightarrow$

$A_1 = 1, A_2 = -1 \Rightarrow \frac{1}{(1-y) \cdot (2-y)} = \frac{1}{1-y} - \frac{1}{2-y}$

$\int \frac{dy}{(1-y) \cdot (2-y)} = \int dx \Leftrightarrow \int \left(\frac{1}{1-y} - \frac{1}{2-y} \right) \cdot dy = \int dx \Rightarrow -\ln(1-y) + \ln(2-y) = x + C \Rightarrow$

$\ln \frac{2-y}{1-y} = x + C;$

f) $x \cdot e^x \cdot dx - y \cdot dy = 0 \Leftrightarrow y \cdot dy = x \cdot e^x \cdot dx \Leftrightarrow \int y \cdot dy = \int x \cdot e^x \cdot dx$

$\int x \cdot e^x \cdot dx = \begin{cases} u = x & v = \int e^x \cdot dx = e^x \\ du = 1 \cdot dx & dv = e^x \cdot dx \end{cases} = x \cdot e^x - \int 1 \cdot e^x \cdot dx = x \cdot e^x - e^x = (x-1) \cdot e^x$

$\int y \cdot dy = \int x \cdot e^x \cdot dx \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot y^2 = (x-1) \cdot e^x + \frac{1}{2} \cdot C \Leftrightarrow y = \sqrt{2 \cdot (x-1) \cdot e^x + C}.$

2. Iz zadanih podataka dobivamo običnu diferencijalnu jednadžbu:

$$y' = \frac{x}{y}.$$

Riješimo tu jednadžbu:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} \Leftrightarrow y \cdot dy = x \cdot dx \Leftrightarrow \int y \cdot dy = \int x \cdot dx \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot y^2 = \frac{1}{2} \cdot x^2 + \frac{1}{2} \cdot C \Leftrightarrow y^2 - x^2 = C.$$

Prema tome, tražene krivulje su sve krivulje porodice $y^2 - x^2 = C$.

3. Iz zadanih podataka dobivamo sljedeći Cauchyjev problem:

$$\begin{cases} y' = \frac{y}{2 \cdot x}, \\ y(2) = 4. \end{cases}$$

 KATEDRA ZA ZAJEDNIČKE PREDMETE <small>TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU POLYTECHNICUM ZAGABRIENSE</small>	Matematika 2 <small>(preddiplomski stručni studij elektrotehnike)</small>	3.2. ODJ 1. REDA SA RAZDVOJENIM (SEPARIRANIM) VARIJABLAMA. NEKE HOMOGENE ODJ 1. REDA – zadaci
--	---	--

Riješimo taj problem. Najprije riješimo običnu diferencijalnu jednadžbu:

$$\frac{dy}{y} = \frac{1}{2} \cdot \frac{dx}{x} \Leftrightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x} \Leftrightarrow \ln y = \frac{1}{2} \cdot \ln x + \ln C, \quad C \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow y^2 = C \cdot x, \quad C \in \mathbb{R}^+.$$

Nepoznatu konstantu C odredit ćemo iz činjenice da krivulja mora prolaziti točkom A . Uvrštenjem $x = 2, y = 4$ dobiva se jednadžba $2 \cdot C = 16$ iz koje je $C = 8$. Dakle, tražena krivulja je parabola $y^2 = 8 \cdot x$.

4. a) Zadana jednadžba je očito homogena. Zamjenimo $y = u \cdot x$, gdje je $u = u(x)$ nepoznata funkcija. Deriviranjem te jednakosti dobijemo:

$$y' = u' \cdot x + u,$$

pa uvrštavanjem u zadanu jednadžbu dobivamo:

$$u' \cdot x + u = u - 1,$$

odnosno

$$u' \cdot x = -1.$$

Riješimo ovu jednadžbu:

$$\frac{du}{dx} = -\frac{1}{x} \Leftrightarrow du = -\frac{dx}{x} \Leftrightarrow \int du = -\int \frac{dx}{x} \Leftrightarrow u = -\ln x + C \Leftrightarrow u = C - \ln x.$$

Stoga je konačno

$$y = u \cdot x = C \cdot x - x \cdot \ln x.$$

b) Polaznu jednadžbu najprije zapišimo u obliku

$$y' = \frac{y}{x} - \left(\frac{y}{x} \right)^2.$$

Ta jednadžba je očito homogena. Zamjenom $y = u \cdot x$ i $y' = u' \cdot x + u$, gdje je $u = u(x)$ nepoznata funkcija, dobivamo:

$$u' \cdot x + u = u - u^2,$$

odnosno

$$u' \cdot x = -u^2.$$

Riješimo tu jednadžbu:

$$\frac{du}{dx} \cdot x = -u^2 \Leftrightarrow -\frac{du}{u^2} = \frac{dx}{x} \Leftrightarrow \int -\frac{du}{u^2} = \int \frac{dx}{x} \Leftrightarrow \frac{1}{u} = \ln x + C \Leftrightarrow u = \frac{1}{\ln x + C}.$$

Stoga je konačno

 KATEDRA ZA ZAJEDNIČKE PREDMETE <small>TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU</small> <small>POLYTECHNICUM ZAGRBIENSE</small>	Matematika 2 <small>(prediplomski stručni studij elektrotehnike)</small>	3.2. ODJ 1. REDA SA RAZDVOJENIM (SEPARIRANIM) VARIJABLAMA. NEKE HOMOGENE ODJ 1. REDA – zadaci
---	--	--

$$y = u \cdot x = \frac{x}{\ln x + C}.$$

5. Iz zadanih podataka dobivamo homogenu običnu diferencijalnu jednadžbu 1. reda:

$$y' = \frac{y}{x} - 1.$$

Ovu jednadžbu riješili smo u zadatku 4. a). Stoga su tražene krivulje svi elementi familije $y = C \cdot x - x \cdot \ln x$.

6. Iz zadanih podataka dobivamo homogenu običnu diferencijalnu jednadžbu 1. reda:

$$y = \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} + \frac{y}{x}.$$

Zamjenom $y = u \cdot x$ i $y' = u' \cdot x + u$, gdje je $u = u(x)$ nepoznata funkcija, dobivamo:

$$\begin{aligned} u' \cdot x + u &= \sqrt{1 + u^2} + u, \\ \frac{du}{\sqrt{1 + u^2}} &= \frac{dx}{x}, \\ \int \frac{du}{\sqrt{1 + u^2}} &= \int \frac{dx}{x}, \\ \ln \left(u + \sqrt{1 + u^2} \right) &= \ln x + \ln C, \\ u + \sqrt{1 + u^2} &= C \cdot x, \\ \frac{y}{x} + \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} &= C \cdot x, \\ 1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2 &= \left(C \cdot x - \frac{y}{x}\right)^2, \\ 1 &= C^2 \cdot x^2 - 2 \cdot C \cdot y, \\ y &= \frac{C^2 \cdot x^2 - 1}{2 \cdot C} = \frac{C}{2} \cdot \left(x^2 - \frac{1}{C^2}\right), \quad C \in \mathbb{R}^+. \end{aligned}$$

Dakle, tražene krivulje su svi elementi porodice parabola

$$y = \frac{C}{2} \cdot x^2 - \frac{1}{2 \cdot C}, \quad C \in \mathbb{R}^+.$$