Zadatak 1. Izvedite formule za rješenje homogene, odnosno nehomogene linearne obične diferencijalne jednadžbe 1. reda. Detaljno objasnite svaki korak u tim izvodima.

Rješenje: Najprije pretpostavimo da je zadana homogena obična diferencijalna jednadžba 1. reda $y' + p(x) \cdot y = 0$, gdje je p unaprijed zadana funkcija. Možemo je zapisati u obliku:

$$y' = -p(x) \cdot y .$$

Ova jednadžba je obična diferencijalna jednadžba 1. reda sa razdvojenim varijablama. Očitamo:

$$f(x) = -p(x), \quad g(y) = y,$$

pa uvrštavanjem u formulu za opće rješenje obične diferencijalne jednadžbe 1. reda sa razdvojenim varijablama dobijemo:

$$\begin{aligned}
&\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int -p(x) \cdot \mathrm{d}x + C, \\
&\ln|y| = \int -p(x) \cdot \mathrm{d}x + C, \\
&|y| = e^{\int -p(x)\cdot \mathrm{d}x + C}, \\
&|y| = e^{\int -p(x)\cdot \mathrm{d}x} \cdot \underbrace{e^{C}}_{=C_1}, \\
&|y| = C_1 \cdot e^{\int -p(x)\cdot \mathrm{d}x}.
\end{aligned}$$

U četvrtom smo koraku definirali novu konstantu $C_1 := e^C$. Budući da je vrijednost eksponencijalne funkcije uvijek strogo pozitivan realan broj, mora vrijediti relacija: $C_1 > 0$. Ostaje riješiti se „neugodne“ apsolutne vrijednosti na lijevoj strani posljednje jednakosti. Dosad je sve u redu: lijeva strana (apsolutna vrijednost nekoga realnoga broja) je nenegativna, a takva je i desna strana kao umnožak dviju vrijednosti eksponencijalne funkcije. Ako jednostavno izbrišemo apsolutnu vrijednost na lijevoj strani te jednakosti, nastaje problem: ne znamo predznak varijable y, a znamo predznak desne strane (on je pozitivan). Dakle, moramo postaviti uvjet $y > 0$ čime se ograničavamo na neprekidno derivabilne funkcije kojima se graf nalazi u prvom i/ili drugom kvadrantu (bez uključenja osi apscisa!). Čini se da smo time završili izvod.

Međutim, tu se pojavljuje dodatni problem. Nultočka funkcije $g(y) = y$ je $y = 0$ i ona jest rješenje polazne obične diferencijalne jednadžbe. Možemo li ikako obuhvatiti to rješenje dobivenim izrazom? Možemo, ako dozvolimo da vrijednost konstante C_1 bude nenegativan, a ne nužno strogo pozitivan realan broj. Dozvolimo tu mogućnost, pa „olabavimo“ uvjet $C_1 > 0$ na $C_1 \geq 0$. Očito, ako je $C_1 = 0$, onda je $y = 0$, pa smo ovim „oslabljenjem“ uvjeta „pokrili“ i taj slučaj. Zašto nismo razmatrali predznak drugoga faktora („e na integral…“) u gornjem izrazu? Razlog je jednostavan: vrijednosti eksponencijalne funkcije su nužno strogo pozitivne, pa ni na koji način ne možemo postići da $e^{\int -p(x)\cdot \mathrm{d}x}$ bude strogo negativan realan broj ili nula. Je li sad izvod završen?

Odgovor je i nadalje niječan. Postoje brojne funkcije kojima graf prolazi prvim i trećim kvadrantom ili drugim i četvrtim kvadrantom. U gornjem izvodu kažemo: uzimamo samo one dijelove tih grafova koji su u prvom ili drugom kvadrantu (uključujući i na osi apscisa). Time izravno utječemo na domenu rješenja koja se, zbog ovoga zahtjeva, ne mora podudarati s njegovom prirodnom domenom. Štoviše, time si namećemo dodatan posao rješavanja nejednadžbe $y(x) \geq 0$ kako bismo utvrdili skup svih vrijednosti nezavisne varijable za koje vrijedi polazna obična diferencijalna jednadžba. Posao rješavanja ove nejednadžbe u mnogim slučajevima može biti vrlo neugodan. Možemo li ga ikako izbjeći, odnosno možemo li dodatno „olabaviti“ postavljene uvjete tako da se domena rješenja jednadžbe podudara s prirodnom domenom funkcije y?

Odgovor je potvrdan, te vrlo jednostavan: možemo, dozvolimo li da C_1 bude *bilo koja* realna konstanta (a ne nužno nenegativna). Opet ne možemo „dirati“ član $e^{\int -p(x)\cdot \mathrm{d}x}$ jer je njegov predznak nužno pozitivan. Dozvolimo li da bude $C_1 \in \mathbb{R}$, onda će vrijednosti varijable y moći biti i pozitivni i negativni realni brojevi, pa će se domena rješenja y podudarati s prirodnom domenom te funkcije. Tako zaključujemo da je opće rješenje polazne jednadžbe dano izrazom:

$$y_h = C \cdot e^{-\int p(x)\cdot \mathrm{d}x},\ C \in \mathbb{R}.$$

Konstanti smo namjerno promijenili ime jer, kad ovu formulu promatramo i primjenjujemo zasebno, tj. nezavisno o gornjem izvodu, ne postoji nijedan opravdan razlog zbog kojega bi ta konstanta morala biti označena sa C_1. Također, da bismo naglasili da se radi o općem rješenju homogene linearne jednadžbe, to opće rješenje sugestivno smo označili s y_h. Time je izvod formule za rješenje homogene obične diferencijalne jednadžbe 1. reda završen. Primijetimo da za primjenu te formule trebamo „samo“ znati odrediti standardnu antiderivaciju unaprijed zadane funkcije p.

U nastavku promotrimo nehomogenu linearnu običnu diferencijalnu jednadžbu 1. reda

$$y' + p(x) \cdot y = q(x),$$

pri čemu su p i q unaprijed zadane funkcije. Odredimo formulu za njezino opće rješenje.

Osnovna ideja zasniva se na tzv. *metodi varijacije konstante* koju ćemo detaljnije objasniti na primjeru obične diferencijalne jednadžbe 2. reda. Grubo rečeno, ideja rješavanja je sljedeća. Odredimo pravilo „konkretne“ funkcije koja je *partikularno* rješenje zadane jednadžbe. (Dakle, zapravo određujemo *neko* partikularno rješenje zadane jednadžbe.) Označimo tu funkciju s y_p. Tada se može pokazati da je *opće rješenje* (tj. skup *svih* rješenja) zadane jednadžbe dan izrazom:

$$y = y_h + y_p = C \cdot e^{-\int p(x)\cdot \mathrm{d}x} + y_p,\ C \in \mathbb{R}.$$

Ova formula, a posebno njezina interpretacija, su jako važne jer odgovarajući analogoni vrijede i za druge tipove nehomogenih linearnih jednadžbi. Nju treba čitati ovako:

Opće rješenje **nehomogene** *linearne obične diferencijalne jednadžbe* 1. *reda dobije se tako da se općem rješenju pripadne* **homogene** *obične diferencijalne jednadžbe* 1. *reda pribroji* **bilo koje** *partikularno rješenje polazne jednadžbe.*

Iz gornje formule slijedi da je razlika dvaju partikularnih rješenja nehomogene linearne obične diferencijalne jednadžbe 1. reda *uvijek* jednaka nekom partikularnom rješenju pripadne **homogene** linearne obične diferencijalne jednadžbe 1. reda. Ova tvrdnja je svojevrsni analogon dobro nam poznate činjenice iz integralnoga računa: razlika dviju antiderivacija integrabilne funkcije *f* jednaka je konstanti. Ovdje razlika, nažalost, nije konstanta (osim u nekim vrlo posebnim slučajevima), nego partikularno rješenje pripadne homogene obične diferencijalne jednadžbe.

Preostaje odgovoriti na ključno pitanje: *kako odrediti partikularno rješenje* y_p? (Izraz za y_h već smo ranije odredili i zaključili da je za njega dovoljno znati integrirati funkciju *p*.) Tu primijenimo spomenutu metodu varijacije konstanti. *Varirati konstantu* zapravo znači dozvoliti da ta konstanta bude *funkcija varijable x*. Dakle, pretpostavimo da je:

$$y_p = C(x) \cdot e^{-\int p(x)\cdot \mathrm{d}x}.$$

Ovdje će biti vrlo bitno da se u eksponentu eksponencijalne funkcije nalazi standardna antiderivacija funkcije *p*, a ne neodređeni integral koji je skup funkcija. Naime, ako bi se u tom eksponentu nalazio neodređeni integral, onda bismo u tom eksponentu imali još jednu realnu konstantu, pa bismo naposljetku dobili da opće rješenje polazne jednadžbe zavisi o izboru najmanje dvije konstante, odnosno da za jedinstvenost toga rješenja moramo zadati barem dva početna uvjeta. To je u izravnoj suprotnosti s osnovnim svojstvom Cauchyjevih problema koje kaže da se jedinstvenost rješenja dobije zadavanjem točno onoliko početnih uvjeta koliko iznosi red promatrane obične diferencijalne jednadžbe. Naša promatrana obična diferencijalna jednadžba je jednadžba 1. reda, pa njezino opće rješenje sadrži točno jednu nepoznatu konstantu. U ovom će slučaju ta konstanta biti upravo konstanta koju „generira“ član y_h

Dakle, neka je $y_p = C(x) \cdot e^{-\int p(x) \cdot \mathrm{d}x}$. Ta funkcija je rješenje zadane nehomogene linearne obične diferencijalne jednadžbe, pa njezinim uvrštavanjem u tu jednadžbu moramo dobiti identitet. Zbog toga odredimo:

$$y_p' = C'(x) \cdot e^{-\int p(x) \cdot \mathrm{d}x} + C(x) \cdot e^{-\int p(x) \cdot \mathrm{d}x} \cdot \left(-\int p(x) \cdot \mathrm{d}x\right)'.$$

Derivacija standardne antiderivacije funkcije p je funkcija p. Zbog toga je:

$$\left(-\int p(x) \cdot \mathrm{d}x\right)' = -p(x),$$

odnosno

$$y_p' = C'(x) \cdot e^{-\int p(x) \cdot \mathrm{d}x} + C(x) \cdot e^{-\int p(x) \cdot \mathrm{d}x} \cdot (-p(x)).$$

Uvrštavanjem izraza

$$\begin{aligned} y_p &= C(x) \cdot e^{-\int p(x) \cdot \mathrm{d}x}, \\ y_p' &= C'(x) \cdot e^{-\int p(x) \cdot \mathrm{d}x} + C(x) \cdot e^{-\int p(x) \cdot \mathrm{d}x} \cdot (-p(x)), \end{aligned}$$

u promatranu običnu diferencijalnu jednadžbu dobijemo:

$$\begin{aligned} &C'(x) \cdot e^{-\int p(x) \cdot \mathrm{d}x} + C(x) \cdot e^{-\int p(x) \cdot \mathrm{d}x} \cdot (-p(x)) + p(x) \cdot C(x) \cdot e^{-\int p(x) \cdot \mathrm{d}x} = q(x), \\ &C'(x) \cdot e^{-\int p(x) \cdot \mathrm{d}x} = q(x), \\ &C'(x) = q(x) \cdot e^{\int p(x) \cdot \mathrm{d}x}. \end{aligned}$$

Odatle integriranjem odredimo $C(x)$ kao *standardnu antiderivaciju* desne strane jednakosti. Zašto baš standardnu antiderivaciju? Jednostavno: rekli smo da je y_p partikularno rješenje zadane jednadžbe, pa ono mora biti „konkretna“ funkcija bez dodatnih nepoznatih realnih konstanti.

Tako smo dobili:

$$C(x) = \int q(x) \cdot e^{\int p(x) \cdot \mathrm{d}x} \cdot \mathrm{d}x,$$

pa slijedi:

$$y = C \cdot e^{-\int p(x)\cdot \mathrm{d}x} + y_p,$$
$$y = C \cdot e^{-\int p(x)\cdot \mathrm{d}x} + C(x) \cdot e^{-\int p(x)\cdot \mathrm{d}x},$$
$$y = C \cdot e^{-\int p(x)\cdot \mathrm{d}x} + \left(\int q(x)\cdot e^{\int p(x)\cdot \mathrm{d}x} \cdot \mathrm{d}x\right) \cdot e^{-\int p(x)\cdot \mathrm{d}x},$$
$$y = e^{-\int p(x)\cdot \mathrm{d}x} \cdot \left(\int q(x)\cdot e^{\int p(x)\cdot \mathrm{d}x} \cdot \mathrm{d}x + C\right),\ C \in \mathbb{R}.$$

Time smo opće rješenje zadane jednadžbe izrazili (samo) pomoću funkcija p i q.

Primjedba 1. Ponovimo i zapamtimo sljedeće načelo koje se primjenjuje kod rješavanja *svih* nehomogenih linearnih jednadžbi (proizvoljnoga reda):

Opće rješenje nehomogene linearne jednadžbe **uvijek** *je jednako zbroju općega rješenja pripadne homogene linearne jednadžbe i* **bilo kojega** *partikularnoga rješenja zadane jednadžbe.*

S obzirom da se, kako ćemo kasnije vidjeti, rješavanje homogenih linearnih jednadžbi svodi na rješavanje određenih algebarskih jednadžbi, osnovni problem ostaje određivanje partikularnoga rješenja zadane jednadžbe. Opći algoritam za određivanje toga rješenja *ne postoji*. Ipak, u posebnim slučajevima može se „naslutiti“ oblik toga rješenja, pa se ono odredi npr. tzv. *metodom neodređenih koeficijenata*. Nju ćemo upoznati u sljedećoj točki.

Primjedba 2. Nehomogena linearna obična diferencijalna jednadžba 1. reda je *jedina* nehomogena linearna obična diferencijalna jednadžba kod koje je poznata konkretna formula za njezino opće rješenje. Ta formula je lako razumljiva i svodi se na određivanje standardnih antiderivacija dviju funkcija. To znači da za rješavanje ovoga tipa jednadžbi moramo dobro znati metode određivanja neodređenih integrala.

Primjedba 3. Zadatke koji slijede rješavat ćemo koristeći netom izvedene formule. Pritom nećemo naglašavati da u svakom zadatku određujemo standardne antiderivacije, da je C realna konstanta itd. Sva ta svojstva slijede izravno iz rješenja zadatka 1. Zbog toga je vrlo korisno dobro *razumjeti* rješenje toga zadatka.

Zadatak 2. Riješite jednadžbe:

a) $y' - y = 0;$

b) $x \cdot y' - y = 0;$

c) $x \cdot \ln x \cdot y' + y = 0;$

d) $y' + \operatorname{ctg} x \cdot y = 0.$

Rješenje: Sve zadane jednadžbe su homogene linearne obične diferencijalne jednadžbe 1. reda. Prema rješenju zadatka 1., za određivanje njihova općega rješenja dovoljno je „očitati" funkciju p, pri čemu koeficijent uz y' nužno mora biti jednak 1. Svaku od tih jednadžbi, dakako, možemo riješiti i kao jednadžbu 1. reda sa razdvojenim varijablama (jer homogena linearna obična diferencijalna jednadžba 1. reda pripada u jednadžbe 1. reda sa razdvojenim varijablama), ali time bismo zapravo ponavljali izvod formule za opće rješenje učinjen u rješenju zadatka 1.

Ponovimo: u **svim** rezultatima zadataka $C \in \mathbb{R}$ je konstanta.

a) U ovome je slučaju $p(x) = -1$, pa je traženo opće rješenje:

$$y = C \cdot e^{-\int (-1)\cdot \mathrm{d}x} = C \cdot e^{\int 1\cdot \mathrm{d}x} = C \cdot e^{x}.$$

b) Zapišimo jednadžbu u obliku:

$$y' - \frac{1}{x} \cdot y = 0,$$

pa očitamo: $p(x) = -\frac{1}{x}$. Tako slijedi:

$$y = C \cdot e^{-\int \frac{-1}{x}\cdot \mathrm{d}x} = C \cdot e^{\int \frac{1}{x}\cdot \mathrm{d}x} = C \cdot e^{\ln|x|} = C \cdot |x|.$$

Pojavila se (opet!) „neugodna" apsolutna vrijednost koja nema derivaciju u nuli. Podsjetimo da svako rješenje obične diferencijalne jednadžbe 1. reda obavezno mora biti neprekidno derivabilna funkcija na svojoj prirodnoj domeni. Zbog toga smijemo izbrisati apsolutnu vrijednost i naposljetku dobiti:

$$y = C \cdot x.$$

Pravilo (vrijedi samo kod rješavanja običnih diferencijalnih jednadžbi!):

$$e^{\ln A} = A, \text{ za svaki izraz } A.$$

Primjedba 4. Zašto ovo pravilo ne vrijedi kod (ne)određenih integrala? Konkretno, zašto *ne* vrijedi: $\int \operatorname{ctg} x \cdot \mathrm{d}x = \ln(\sin x) + C$, nego $\int \operatorname{ctg} x \cdot \mathrm{d}x = \ln|\sin x| + C$? Vrlo jednostavno: funkcija $\operatorname{ctg} x$ je neprekidna, pa time i integrabilna npr. na intervalu $\left\langle \pi, \frac{3}{2}\cdot\pi \right\rangle$. Zbog toga ona na tom intervalu ima svoju standardnu antiderivaciju. No, ta standardna antiderivacija *ne može* biti funkcija ln(sin x) jer ta funkcija uopće nije definirana na navedenom intervalu. Za razliku od nje, funkcija

$\ln|\sin x|$ je definirana na navedenom intervalu i njezina je derivacija upravo $\operatorname{ctg} x$. Prema tome, kod neodređenih integrala *ne smijemo* primijeniti gornji identitet, nego moramo ostaviti znak apsolutne vrijednosti. Kod običnih diferencijalnih jednadžbi 1. reda pretpostavke su bitno drugačije, pa zbog toga vrijedi gornji identitet. (Teorija koja se krije iza ovih zaključaka je puno dublja i izlazi izvan okvira ovoga predmeta, pa je ovdje izostavljamo.)

c) Zapišimo zadanu jednadžbu u obliku:

$$y' + \frac{1}{x \cdot \ln x} \cdot y = 0,$$

pa očitamo: $p(x) = \dfrac{1}{x \cdot \ln x}$. Metodom zamjene odredimo standardnu antiderivaciju ove funkcije:

$$\int p(x) \cdot \mathrm{d}x = \int \frac{1}{x \cdot \ln x} \cdot \mathrm{d}x = \left\{\begin{array}{l} \text{zamjena:} \\ t := \ln x, \\ \mathrm{d}t = \frac{1}{x} \cdot \mathrm{d}x \end{array}\right\} = \int \frac{1}{t} \cdot \mathrm{d}t = \ln|t| = \ln|\ln x|.$$

Zbog toga je:

$$y = C \cdot e^{-\ln|\ln x|} = C \cdot e^{\ln\left(|\ln x|^{-1}\right)} = C \cdot |\ln x|^{-1} = \frac{C}{|\ln x|}.$$

Sad već uobičajenim „brisanjem“ apsolutne vrijednosti dobivamo konačno rješenje:

$$y = \frac{C}{\ln x}.$$

d) Odmah očitamo: $p(x) = \operatorname{ctg} x$, pa je traženo opće rješenje:

$$y = C \cdot e^{-\int \operatorname{ctg} x \cdot \mathrm{d}x} = C \cdot e^{-\ln|\sin x|} = C \cdot e^{\ln\left(|\sin x|^{-1}\right)} = C \cdot |\sin x|^{-1} = \frac{C}{|\sin x|} \Rightarrow y = \frac{C}{\sin x}.$$

Zadatak 3. Riješite jednadžbe:

a) $y' - y = e^{2 \cdot x}$;

b) $x \cdot y' - y = x^2$;

c) $x \cdot y' + 2 \cdot y = 6 \cdot x^4$;

d) $x \cdot y' + y = e^x$;

e) $x^2 \cdot y' + (1 - 2 \cdot x) \cdot y = x^2$.

Rješenje: U svim podzadacima riječ je o nehomogenoj linearnoj običnoj diferencijalnoj jednadžbi 1. reda. Formulu za opće rješenje te jednadžbe izveli smo u zadatku 1. U toj se formuli pojavljuju dvije standardne antiderivacije. S obzirom da ne možemo unaprijed predvidjeti metode za njihovo određivanje, najbolje je odrediti svaku zasebno, pa ih potom uvrstiti u spomenutu formulu. Tako ćemo i napraviti u rješenju svakoga podzadatka.

Ponovimo da će u svim rješenjima $C \in \mathbb{R}$ biti konstanta.

a) Očitamo: $p(x) = -1,\ q(x) = e^{2 \cdot x},$ pa odredimo spomenute standardne antiderivacije:

$$\int p(x) \cdot \mathrm{d}x = \int (-1) \cdot \mathrm{d}x = -x,$$

$$\int q(x) \cdot e^{\int p(x) \cdot \mathrm{d}x} \cdot \mathrm{d}x = \int e^{2 \cdot x} \cdot e^{-x} \cdot \mathrm{d}x = \int e^{x} \cdot \mathrm{d}x = e^{x}.$$

Zbog toga je opće rješenje zadane jednadžbe:

$$y = e^{-(-x)} \cdot \left(e^{x} + C\right) = e^{x} \cdot \left(e^{x} + C\right) = C \cdot e^{x} + e^{2 \cdot x}.$$

Primjedba 5. Iz gornjega zapisa općega rješenja se izvrsno vidi njegova struktura. Pribrojnik $C \cdot e^{x}$ predstavlja y_h, tj. opće rješenje pripadne homogene linearne obične diferencijalne jednadžbe 1. reda $y' - y = 0$. Pribrojnik $e^{2 \cdot x}$ predstavlja y_p, tj. partikularno („konkretno“) rješenje zadane jednadžbe.

b) Zapišimo zadanu jednadžbu u obliku:

$$y' - \frac{1}{x} \cdot y = x.$$

Očitamo: $p(x) = -\frac{1}{x},\ q(x) = x,$ pa odredimo:

$$\int p(x) \cdot \mathrm{d}x = \int \left(-\frac{1}{x}\right) \cdot \mathrm{d}x = -\ln x,$$

$$\int q(x) \cdot e^{\int p(x) \cdot \mathrm{d}x} \cdot \mathrm{d}x = \int x \cdot e^{-\ln x} \cdot \mathrm{d}x = \int x \cdot e^{\ln\left(x^{-1}\right)} \cdot \mathrm{d}x = \int x \cdot x^{-1} \cdot \mathrm{d}x = \int 1 \cdot \mathrm{d}x = x.$$

Radi skraćenja postupka rješavanja i izbjegavanja ponavljanja ranije analize, ovdje smo odmah napisali da je $\int \left(-\frac{1}{x}\right) \cdot \mathrm{d}x = -\ln x$. Tako konačno dobivamo:

$$y = e^{-(-\ln x)} \cdot (x + C) = e^{\ln x} \cdot (x + C) = x \cdot (x + C) = C \cdot x + x^{2}.$$

Pribrojnik $y_h = C \cdot x$ je rješenje pripadne homogene linearne obične diferencijalne jednadžbe $y' - \frac{1}{x} \cdot y = 0$. Pribrojnik $y_p = x^2$ je partikularno rješenje zadane jednadžbe.

c) Zapišimo zadanu jednadžbu u obliku:

$$y' + \frac{2}{x} \cdot y = 6 \cdot x^3.$$

Očitamo: $p(x) = \frac{2}{x}$, $q(x) = 6 \cdot x^3$. Odredimo:

$$\int p(x) \cdot \mathrm{d}x = \int \frac{2}{x} \cdot \mathrm{d}x = 2 \cdot \int \frac{1}{x} \cdot \mathrm{d}x = 2 \cdot \ln x,$$

$$\int q(x) \cdot e^{\int p(x) \cdot \mathrm{d}x} \cdot \mathrm{d}x = \int 6 \cdot x^3 \cdot e^{2 \cdot \ln x} \cdot \mathrm{d}x = \int 6 \cdot x^3 \cdot e^{\ln\left(x^2\right)} \cdot \mathrm{d}x = \int 6 \cdot x^3 \cdot x^2 \cdot \mathrm{d}x = \int 6 \cdot x^5 \cdot \mathrm{d}x = 6 \cdot \frac{1}{5+1} \cdot x^{5+1} = x^6.$$

Tako je:

$$y = e^{-2 \cdot \ln x} \cdot \left(x^6 + C\right) = e^{\ln\left(x^{-2}\right)} \cdot \left(x^6 + C\right) = x^{-2} \cdot \left(x^6 + C\right) = C \cdot x^{-2} + x^4 = \frac{C}{x^2} + x^4.$$

U ovom su slučaju $y_h = \frac{C}{x^2}$ i $y_p = x^4$.

d) Zapišimo zadanu jednadžbu u obliku:

$$y' + \frac{1}{x} \cdot y = \frac{e^x}{x}.$$

Očitamo: $p(x) = \frac{1}{x}$, $q(x) = \frac{e^x}{x}$. Odredimo:

$$\int p(x) \cdot \mathrm{d}x = \int \frac{1}{x} \cdot \mathrm{d}x = \ln x,$$

$$\int q(x) \cdot e^{\int p(x) \cdot \mathrm{d}x} \cdot \mathrm{d}x = \int \frac{e^x}{x} \cdot e^{\ln x} \cdot \mathrm{d}x = \int \frac{e^x}{x} \cdot x \cdot \mathrm{d}x = \int e^x \cdot \mathrm{d}x = e^x.$$

Tako je:

$$y = e^{-\ln x} \cdot \left(e^x + C\right) = e^{\ln\left(x^{-1}\right)} \cdot \left(e^x + C\right) = x^{-1} \cdot \left(e^x + C\right) = \frac{C + e^x}{x} = \frac{C}{x} + \frac{e^x}{x}.$$

U ovom su slučaju $y_h = \frac{C}{x}$ i $y_p = \frac{e^x}{x}$.

e) Zapišimo zadanu jednadžbu u obliku:

$$y' + \left(\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}\right) \cdot y = 1.$$

Očitamo: $p(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}$, $q(x) = 1$. Odredimo:

$$\int p(x) \cdot dx = \int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}\right) \cdot dx = \int \frac{1}{x^2} \cdot dx - 2 \cdot \int \frac{1}{x} \cdot dx = \int x^{-2} \cdot dx - 2 \cdot \ln x = \frac{1}{-2+1} \cdot x^{-2+1} - 2 \cdot \ln x = -\frac{1}{x} - 2 \cdot \ln x,$$

$$\int q(x) \cdot e^{\int p(x) \cdot dx} \cdot dx = \int 1 \cdot e^{\frac{-1}{x} - 2 \cdot \ln x} \cdot dx = \int \frac{e^{\frac{-1}{x}}}{e^{2 \cdot \ln x}} \cdot dx = \int \frac{e^{\frac{-1}{x}}}{e^{\ln\left(x^2\right)}} \cdot dx = \int \frac{e^{\frac{-1}{x}}}{x^2} \cdot dx = \left\{\begin{aligned} &\text{zamjena:} \\ &t := -\frac{1}{x}, \\ &dt = \frac{1}{x^2} \cdot dx \end{aligned}\right\} = \int e^t \cdot dt = e^t = e^{-\frac{1}{x}}.$$

Tako je:

$$y = e^{-\left(\frac{-1}{x} - 2 \cdot \ln x\right)} \cdot \left(e^{\frac{-1}{x}} + C\right) = e^{\frac{1}{x} + 2 \cdot \ln x} \cdot \left(e^{\frac{-1}{x}} + C\right) = e^{\frac{1}{x}} \cdot e^{2 \cdot \ln x} \cdot \left(e^{\frac{-1}{x}} + C\right) = e^{\frac{1}{x}} \cdot e^{\ln\left(x^2\right)} \cdot \left(e^{\frac{-1}{x}} + C\right) =$$

$$= e^{\frac{1}{x}} \cdot x^2 \cdot \left(e^{\frac{-1}{x}} + C\right) = C \cdot x^2 \cdot e^{\frac{1}{x}} + x^2.$$

U ovom su slučaju $y_h = C \cdot x^2 \cdot e^{\frac{1}{x}}$ i $y_p = x^2$.

Zadatak 4. Izvedite formulu za opće rješenje Bernoullijeve obične diferencijalne jednadžbe zadane s:

$$y' + p(x) \cdot y = q(x) \cdot y^k,$$

gdje su p i q realne funkcije jedne realne varijable, a $k \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$. Detaljno objasnite svaki korak u izvodu.

Rješenje: Uvodno pojasnimo zašto pretpostavljamo da je $k \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$. Uzmimo najprije da je $k = 0$. Tada dobivamo jednadžbu:

$$y' + p(x) \cdot y = q(x) \cdot y^0 \Leftrightarrow y' + p(x) \cdot y = q(x).$$

Dobivena jednadžba je nehomogena linearna obična diferencijalna jednadžba 1. reda. Formulu za njezino opće rješenje izveli smo u zadatku 1.

Uzmimo sada da je $k=1$. Tada dobivamo jednadžbu:

$$y' + p(x)\cdot y = q(x)\cdot y^1 \Leftrightarrow y' + p(x)\cdot y = q(x)\cdot y \Leftrightarrow y' + (p(x)-q(x))\cdot y = 0.$$

Označimo li $r(x) = p(x)-q(x)$, vidimo da je dobivena jednadžba homogena linearna obična diferencijalna jednadžba 1. reda. Formulu za njezino opće rješenje također smo izveli u zadatku 1.

Dakle, navedenu pretpostavku uvodimo zato da bismo eliminirali ranije obrađene slučajeve (ne)homogene linearne obične diferencijalne jednadžbe 1. reda.

Podijelimo zadanu jednadžbu s y^k. Dobijemo:

$$\frac{y'}{y^k} + p(x)\cdot\frac{y}{y^k} = q(x) \Leftrightarrow \frac{y'}{y^k} + p(x)\cdot\frac{1}{y^{k-1}} = q(x).$$

Zamijenimo:

$$u := \frac{1}{y^{k-1}} = y^{1-k},$$

$$u' = (1-k)\cdot y^{(1-k)-1}\cdot y' = (1-k)\cdot y^{-k}\cdot y' = (1-k)\cdot\frac{y'}{y^k} \Rightarrow \frac{y'}{y^k} = \frac{u'}{1-k}.$$

Istaknimo da je *u*, analogno kao i *y*, funkcija varijable *x*. Dobivamo:

$$\frac{u'}{1-k} + p(x)\cdot u = q(x) \Leftrightarrow u' + (1-k)\cdot p(x)\cdot u = (1-k)\cdot q(x).$$

Označimo li $p_1(x) := (1-k)\cdot p(x)$, $q(x) = (1-k)\cdot q(x)$, dobivamo nehomogenu linearnu običnu diferencijalnu jednadžbu 1. reda:

$$u' + p_1(x)\cdot u = q_1(x).$$

Njezino opće rješenje, prema zadatku 1., glasi:

$$u = e^{-\int p_1(x)\cdot dx}\cdot\left(\int q_1(x)\cdot e^{\int p_1(x)\cdot dx}\cdot dx + C\right),\ C\in\mathbb{R}.$$

U ovu formulu uvrstimo $u := y^{1-k}$, $p_1(x) := (1-k)\cdot p(x)$, $q(x) = (1-k)\cdot q(x)$, pa dobijemo:

$$y^{1-k} = e^{-\int (1-k)\cdot p_1(x)\cdot dx}\cdot\left(\int (1-k)\cdot q(x)\cdot e^{\int (1-k)\cdot p(x)\cdot dx}\cdot dx + C\right) =$$

$$= e^{(k-1)\cdot\int p_1(x)\cdot dx}\cdot\left((1-k)\cdot\int q(x)\cdot e^{(1-k)\cdot\int p(x)\cdot dx}\cdot dx + C\right),\ C\in\mathbb{R}.$$

Napomena 1. Gore izvedenu formulu možemo dodatno pojednostavniti na sljedeći način. Pretpostavimo najprije da je $1-k>0$, odnosno da je $k<1$. U tom slučaju označimo:

$$g(x)=e^{(1-k)\cdot\int p(x)\cdot\mathrm{d}x}.$$

Tada izvedenu formulu možemo zapisati u obliku:

$$y^{1-k}=\frac{(1-k)\cdot\int q(x)\cdot g(x)\cdot\mathrm{d}x+C}{g(x)}.$$

Pretpostavimo sada da je $1-k<0$, odnosno da je $k>1$. Tada invertiranjem gornje formule (tj. potenciranjem na eksponent –1) slijedi:

$$y^{k-1}=\frac{g(x)}{(1-k)\cdot\int q(x)\cdot g(x)\cdot\mathrm{d}x+C}.$$

Ove oblike primjenjivat ćemo zavisno o predznaku broja $1-k$. Taj predznak utvrđujemo zato da kao eksponent uz y na lijevoj strani jednadžbe uvijek dobijemo strogo pozitivan realan broj. Ako je $1-k>0$, praktičnije je primijeniti prvi oblik. Ako je $1-k<0$, praktičnije je primijeniti drugi oblik. U oba slučaja opće rješenje ne dobivamo u eksplicitnom, nego u implicitnom obliku. Takvo se rješenje naziva **prvi integral** zadane obične diferencijalne jednadžbe. U literaturi se često navode zadaci koji počinju riječima *Odredite prvi integral jednadžbe...* U takvim zadacima se želi istaknuti da se kao konačno rješenje zadatka prihvaća opće rješenje zadane jednadžbe zapisano u implicitnom obliku.

Napomena 2. I u gore izvedenim formulama se *ne* pojavljuju neodređeni integrali, nego standardne antiderivacije funkcija p i $q\cdot g$. Ovo treba imati na umu prilikom rješavanja zadataka.

Zadatak 5. Riješite jednadžbe:

a) $x\cdot y^{'}+y+x^2\cdot y^2=0;$

b) $2\cdot x\cdot y\cdot y^{'}-y^2+x=0;$

c) $x\cdot y^{'}+y=x\cdot\ln x\cdot y^2.$

Rješenje: U svim trima podzadacima radi se o Bernoullijevoj običnoj diferencijalnoj jednadžbi. Zbog toga ćemo očitati pripadne veličine k, p i q, te, zavisno o predznaku izraza $1-k$, primijeniti jednu od formula iz gornje napomene. Pritom ćemo zasebno odrediti dvije standardne antiderivacije koje se pojavljuju u tim formulama.

a) Zapišimo zadanu jednadžbu u obliku:

$$y' + \frac{1}{x} \cdot y = -x \cdot y^2.$$

Očitamo: $p(x) = \frac{1}{x}$, $q(x) = -x$, $k = 2$. Budući da je $1-k = 1-2 = -1 < 0$, primjenjujemo drugu formulu iz Napomene 1. Odredimo:

$$\int p(x) \cdot \mathrm{d}x = \int \frac{1}{x} \cdot \mathrm{d}x = \ln x,$$
$$g(x) = e^{(1-k)\cdot \int p(x)\cdot \mathrm{d}x} = e^{(1-2)\cdot \ln x} = e^{-\ln x} = e^{\ln\left(x^{-1}\right)} = x^{-1},$$
$$\int q(x) \cdot g(x) \cdot \mathrm{d}x = \int (-x) \cdot x^{-1} \cdot \mathrm{d}x = \int (-1) \cdot \mathrm{d}x = -x.$$

Tako konačno dobivamo:

$$y^{2-1} = \frac{x^{-1}}{(1-2)\cdot(-x) + C} \Leftrightarrow y = \frac{\frac{1}{x}}{x+C} = \frac{1}{x \cdot (x+C)} = \frac{1}{x^2 + C \cdot x}.$$

Oprez: Faktor $1-k$ **ne množi** konstantu C (jer bismo tu konstantu već u formuli označili s C_1), nego samo standardnu antiderivaciju funkcije $q \cdot g$.

b) Zapišimo zadanu jednadžbu u obliku:

$$y' - \frac{1}{2 \cdot x} \cdot y = \frac{1}{2 \cdot y} \Leftrightarrow y' - \frac{1}{2 \cdot x} \cdot y = \frac{1}{2} \cdot y^{-1}.$$

Očitamo: $p(x) = \frac{-1}{2 \cdot x}$, $q(x) = \frac{1}{2}$, $k = -1$. Budući da je $1-k = 1-(-1) = 2 > 0$, primjenjujemo prvu formulu iz Napomene 1. Odredimo:

$$\int p(x) \cdot \mathrm{d}x = \int \frac{-1}{2 \cdot x} \cdot \mathrm{d}x = -\frac{1}{2} \cdot \int \frac{1}{x} \cdot \mathrm{d}x = -\frac{1}{2} \cdot \ln x,$$
$$g(x) = e^{(1-k)\cdot \int p(x)\cdot \mathrm{d}x} = e^{(1-(-1))\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot \ln x} = e^{-\ln x} = e^{\ln\left(x^{-1}\right)} = x^{-1},$$
$$\int q(x) \cdot g(x) \cdot \mathrm{d}x = \int -\frac{1}{2} \cdot x^{-1} \cdot \mathrm{d}x = \frac{-1}{2} \cdot \int \frac{1}{x} \cdot \mathrm{d}x = -\frac{1}{2} \cdot \ln x.$$

Tako konačno dobivamo:

$$y^{1-(-1)} = \frac{(1-(-1)) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \ln x + C}{x^{-1}} \Leftrightarrow y^2 = \frac{-\ln x + C}{\frac{1}{x}} = x \cdot (-\ln x + C) = C \cdot x - \ln x.$$

c) Zapišimo zadanu jednadžbu u obliku:

$$y' + \frac{1}{x} \cdot y = \ln x \cdot y^2.$$

Očitamo: $p(x) = \frac{1}{x}$, $q(x) = \ln x$, $k = 2$. Budući da je $1 - k = 1 - 2 = -1 < 0$, primjenjujemo drugu formulu iz Napomene 1. Odredimo:

$$\int p(x) \cdot \mathrm{d}x = \int \frac{1}{x} \cdot \mathrm{d}x = \ln x,$$

$$g(x) = e^{(1-k)\cdot \int p(x)\cdot \mathrm{d}x} = e^{(1-2)\cdot \ln x} = e^{-\ln x} = e^{\ln\left(x^{-1}\right)} = x^{-1},$$

$$\int q(x) \cdot g(x) \cdot \mathrm{d}x = \int \ln x \cdot x^{-1} \cdot \mathrm{d}x = \int \ln x \cdot \frac{1}{x} \cdot \mathrm{d}x = \left\{ \begin{array}{l} \text{zamjena:} \\ t := \ln x, \\ \mathrm{d}t = \frac{1}{x} \cdot \mathrm{d}x \end{array} \right\} = \int t \cdot \mathrm{d}t = \frac{1}{1+1} \cdot t^{1+1} = \frac{1}{2} \cdot t^2 = \frac{1}{2} \cdot \ln^2 x.$$

Tako konačno dobivamo:

$$y^{2-1} = \frac{x^{-1}}{(1-(-2)) \cdot \frac{1}{2} \cdot \ln^2 x + C} \Leftrightarrow y = \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{2} \cdot \ln^2 x + C} = \frac{1}{x \cdot \left(-\frac{1}{2} \cdot \ln^2 x + C\right)} = \frac{1}{C \cdot x - \frac{1}{2} \cdot x \cdot \ln^2 x} =$$

$$= \frac{1}{\frac{2 \cdot C \cdot x - x \cdot \ln^2 x}{2}} = \frac{2}{2 \cdot C \cdot x - x \cdot \ln^2 x} = \frac{2}{C_1 \cdot x - x \cdot \ln^2 x},$$

gdje je $C_1 = 2 \cdot C \in \mathbb{R}$ konstanta. (Funkcija $f(x) = 2 \cdot x$ je bijekcija sa skupa $\mathbb{R}$ u samoga sebe, pa, ako je $C \in \mathbb{R}$, onda je i $2 \cdot C \in \mathbb{R}$ (i to iz cijeloga skupa $\mathbb{R}$, a ne iz nekoga njegovoga pravoga podskupa!)).

Zadatak 6. Ravninska krivulja K ima svojstvo da je koeficijent smjera bilo koje njezine tangente jednak zbroju koordinata dirališta te tangente. Krivulja K prolazi ishodištem pravokutnoga koordinatnoga sustava u ravnini. Odredite njezinu jednadžbu.

Rješenje: Postupimo potpuno analogno kao u sličnim zadacima iz točke 3.2. Pretpostavimo da je ta krivulja graf funkcije $y = y(x)$. Neka je $T = \left(x_T, y_T\right) \in K$ bilo koja točka krivulje. Koeficijent smjera tangente povučene na K u T jednak je:

$$k_t = y'(x_T).$$

Prema zahtjevu zadatka, taj koeficijent mora biti jednak zbroju koordinata točke T:

$$k_t = x_T + y_T,$$

pa izjednačavanjem desnih strana dobivenih izraza dobivamo jednadžbu:

$$y'(x_T) = x_T + y_T.$$

„Brisanjem“ indeksa i točke x_T iz izraza $y'(x_T)$ dobivamo običnu diferencijalnu jednadžbu:

$$y' = x + y.$$

Zapišimo je u obliku:

$$y' - y = x.$$

Prepoznajemo da se radi o nehomogenoj linearnoj običnoj diferencijalnoj jednadžbi 1. reda. Očitamo: $p(x) = -1,\ q(x) = x,$ pa odredimo:

$$\int p(x)\cdot \mathrm{d}x = \int(-1)\cdot \mathrm{d}x = -x,$$

$$\int q(x)\cdot e^{\int p(x)\cdot \mathrm{d}x}\cdot \mathrm{d}x = \int x\cdot e^{-x}\cdot \mathrm{d}x = \begin{vmatrix} u = x & v = \int e^{-x}\cdot \mathrm{d}x = -e^{-x} \\ \mathrm{d}u = \mathrm{d}x & \mathrm{d}v = e^{-x}\cdot \mathrm{d}x \end{vmatrix} = x\cdot\left(e^{-x}\right) - \int -e^{-x}\cdot \mathrm{d}x =$$

$$= -x\cdot e^{-x} + \int e^{-x}\cdot \mathrm{d}x = -x\cdot e^{-x} - e^{-x}.$$

Opće rješenje ove nehomogene linearne obične diferencijalne jednadžbe 1. reda je:

$$y = e^{-(-x)}\cdot\left(-x\cdot e^{-x} - e^{-x} + C\right) = e^{x}\cdot\left(-x\cdot e^{-x} - e^{-x} + C\right) = C\cdot e^{x} - x - 1.$$

Iz uvjeta da krivulja mora prolaziti ishodištem slijedi da je $y(0) = 0.$ Uvrštavanjem $x = y = 0$ u pravilo funkcije y dobivamo jednadžbu $C - 1 = 0$, a odatle je $C = 1$. Dakle, tražena krivulja je K... $y = e^{x} - x - 1$.

Zadatak 7. Ravninska krivulja K ima svojstvo da je odsječak na osi apscisa bilo koje njezine tangente jednak kvadratu ordinate dirališta te tangente. Odredite jednadžbu krivulje K.

Rješenje: Postupimo potpuno analogno kao u prethodnom zadatku. Pretpostavimo da je ta krivulja graf funkcije $y = y(x)$. Neka je $T = \left(x_T, y_T\right) \in K$ bilo koja točka krivulje. Jednadžba tangente povučene na K u T glasi:

$$y = y'(x_T)\cdot(x - x_T) + y_T.$$

Njezin odsječak na osi apscisa dobijemo rješavajući jednadžbu $y=0$ po nepoznanici *x*. Imamo:

$$0=y'(x_T)\cdot(x-x_T)+y_T \Leftrightarrow x-x_T=-\frac{y_T}{y'(x_T)} \Rightarrow x=x_T-\frac{y_T}{y'(x_T)}.$$

Prema zahtjevu zadatka, ta vrijednost mora biti jednaka kvadratu ordinate dirališta. Diralište je točka *T*, a njezina je ordinata y_T. Zbog toga dobivamo jednadžbu:

$$x_T-\frac{y_T}{y'(x_T)}=y_T^2.$$

Odatle izrazimo $y'(x_T)$:

$$\frac{y_T}{y'(x_T)}=y_T^2-x_T \Leftrightarrow y'(x_T)=\frac{y_T}{y_T^2-x_T}.$$

„Brisanjem“ indeksa i točke x_T iz izraza $y'(x_T)$ dobivamo običnu diferencijalnu jednadžbu:

$$y'=\frac{y}{x-y^2}.$$

Ovu jednadžbu transformirajmo ovako:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y}{x-y^2} \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{x-y^2}{y} \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{1}{y}\cdot x-y \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}-\frac{1}{y}\cdot x=-y \Leftrightarrow x'-\frac{1}{y}\cdot x=-y.$$

Dakle, bilo nam je jednostavnije shvatiti *x* kao funkciju varijable *y* (što smijemo kad se radi o ravninskim krivuljama), pa dobiti nehomogenu linearnu običnu diferencijalnu jednadžbu 1. reda s nepoznanicom $x=x(y)$. Očitamo: $p(y)=-\frac{1}{y}$, $q(y)=-y$, pa uvrštavanjem u formulu za opće rješenje ovoga tipa jednadžbe dobijemo:

$$x=e^{-\int\left(-\frac{1}{y}\right)\cdot\mathrm{d}y}\cdot\left(\int e^{\int\frac{-1}{y}\cdot\mathrm{d}y}\cdot(-y)\cdot\mathrm{d}y+C\right)=e^{\int\frac{1}{y}\cdot\mathrm{d}y}\cdot\left(\int e^{-\ln y}\cdot(-y)\cdot\mathrm{d}y+C\right)=e^{\ln y}\cdot\left(\int e^{\ln\left(y^{-1}\right)}\cdot(-y)\cdot\mathrm{d}y+C\right)=$$

$$=y\cdot\left(\int y^{-1}\cdot(-y)\cdot\mathrm{d}y+C\right)=y\cdot\left(-\int 1\cdot\mathrm{d}y+C\right)=y\cdot(-y+C)=-y^2+C\cdot y.$$

Odatle je $y^2+C\cdot y+x=0$ i to je tražena (implicitna) jednadžba krivulje *K*.

Domaća zadaća

1. Riješite jednadžbe:

a) $y' - 3 \cdot x^2 \cdot y = 0;$

b) $y' + 2 \cdot \operatorname{tg}(2 \cdot t) \cdot y = 0.$

2. Riješite jednadžbe:

a) $x \cdot y' + y = \ln x;$

b) $t^2 \cdot y' - t \cdot y = 3 \cdot \sqrt{t}\,.$

3. Riješite jednadžbe:

a) $x \cdot y' - y = \sqrt{y}\;;$

b) $2 \cdot x \cdot y' + 4 \cdot y = x \cdot y^2.$

4. Ravninska krivulja K ima svojstvo da je koeficijent smjera *bilo koje* njezine tangente dvostruko manji od razlike apscise i ordinate pripadnoga dirališta. Krivulja K prolazi ishodištem pravokutnoga koordinatnoga sustava u ravnini. Odredite njezinu jednadžbu.

5. Odredite jednadžbu integralne krivulje koja prolazi točkom $A = \left(\frac{\pi}{2}, 4\right)$ i zadana je običnom diferencijalnom jednadžbom $y' - (\operatorname{ctg} t) \cdot y = y^2 \cdot \cos t.$

Rezultati zadataka za domaću zadaću

Napomena: U svim rezultatima zadataka je $C \in \mathbb{R}$ konstanta.

1. **a)** $y = C \cdot e^{x^3}$; **b)** $y = C \cdot \cos(2 \cdot t).$

2. **a)** $y = \dfrac{C}{x} + \ln x - 1,$ **b)** $y = C \cdot t - \dfrac{2}{\sqrt{t}}.$

3. **a)** $y = \left(C \cdot \sqrt{x} - 1\right)^2$; **b)** $y = \dfrac{2}{C \cdot x^2 + x}.$

4. $y = 2 \cdot e^{\frac{-x}{2}} + x - 2.$

5. $y = \dfrac{4 \cdot \sin t}{2 + \cos(2 \cdot t)}.$