3.3. LINEARNE OBIČNE DIFERENCIJALNE JEDNADŽBE 1. REDA

HOMOGENE LINEARNE OBIČNE DIFERENCIJALNE JEDNADŽBE 1. REDA.

NEHOMOGENE LINEARNE OBIČNE DIFERENCIJALNE JEDNADŽBE 1. REDA.

BERNOULLIJEVA OBIČNA DIFERENCIJALNA JEDNADŽBA.

3.3.1. LINEARNA OBIČNA DIFERENCIJALNA JEDNADŽBA 1. REDA

- Svaku običnu diferencijalnu jednadžbu oblika
- $y' + p(x) \cdot y = q(x)$
- gdje su p i q realne funkcije jedne realne varijable nazivamo **linearna (obična) diferencijalna jednadžba 1. reda** (u daljnjem tekstu skraćeno: linearna ODJ 1. reda)
- Ako je $q \equiv 0$ (nulfunkcija), linearna ODJ 1. reda je **homogena**. Takva jednadžba je zapravo *jednadžba sa razdvojenim varijablama*.
- U suprotnom, tj. ako je $q(x) \neq 0$ za barem jedan $x \in D(q)$, linearna ODJ 1. reda je **nehomogena**.

3.3.2. OPĆE RJEŠENJE LINEARNE ODJ 1. REDA

- Metodom varijacije konstanti (vidjeti vježbe) može se pokazati da je opće rješenje *nehomogene* linearne ODJ 1. reda dano izrazom:

$$y = e^{-\int p(x)\cdot \mathrm{d}x} \cdot \left(\int e^{\int p(x)\cdot \mathrm{d}x} \cdot q(x) \cdot \mathrm{d}x + C \right), \ C \in \mathbb{R}.$$

- Odatle slijedi da, ako je $Q \equiv 0$, tj. ako je linearna ODJ 1. reda *homogena*, onda je njezino opće rješenje dano izrazom:

$$y = C \cdot e^{-\int p(x)\cdot \mathrm{d}x}, \ C \in \mathbb{R}.$$

3.3.3. NAPOMENA

- Osim prema “gotovim” formulama, linearne ODJ 1. reda mogu se rješavati i drugim metodama (npr. već spomenutom metodom varijacije konstanti).
- Te metode u svojoj osnovi ponovno vode na primjenu navedenih formula pa ih u ovoj točki nećemo posebno razmatrati. (Razmatrat ćemo ih kasnije kod rješavanja ODJ 2. reda.)

3.3.4. BERNOULLIJEVA ODJ

- Običnu diferencijalnu jednadžbu 1. reda oblika
  - $y' + p(x) \cdot y = q(x) \cdot y^k$,
- gdje su p i q realne funkcije jedne realne varijable, a $k \in \mathbb{R} \backslash \{0, 1\}$, nazivamo **Bernoullijevom običnom diferencijalnom jednadžbom**.
- Ta jednadžba rješava se zamjenama (vidjeti vježbe)

$$u = \frac{1}{y^{k-1}} \text{ i } u' = (1-k) \cdot \frac{y'}{y^k}$$

- kojima se dobije nehomogena linearna ODJ 1. reda (s nepoznanicom $u = u(x)$).

3.3.4. BERNOULLIJEVA ODJ

- Tako se dobije **prvi integral** Bernoullijeve jednadžbe, tj. njezino opće rješenje zapisano u implicitnom obliku:

$$y^{k-1} = \frac{e^{(1-k)\cdot\int p(x)\cdot \mathrm{d}x}}{(1-k)\cdot\int e^{(1-k)\cdot\int p(x)\cdot \mathrm{d}x}\cdot q(x)\cdot \mathrm{d}x + C}$$