

3.3. LINEARNE OBIČNE DIFERENCIJALNE JEDNADŽBE 1. REDA

HOMOGENE LINEARNE OBIČNE
DIFERENCIJALNE JEDNADŽBE 1. REDA.

NEHOMOGENE LINEARNE OBIČNE
DIFERENCIJALNE JEDNADŽBE 1. REDA.

BERNOULLIJEVA OBIČNA
DIFERENCIJALNA JEDNADŽBA.

3.3.1. LINEARNA OBIČNA DIFERENCIJALNA JEDNADŽBA 1. REDA

- Svaku običnu diferencijalnu jednadžbu oblika
- $y' + P(x) \cdot y = Q(x)$
- gdje su P i Q realne funkcije jedne realne varijable nazivamo **linearna (obična) diferencijalna jednadžba 1. reda** (u dalnjem tekstu skraćeno: linearna ODJ 1. reda)
- Ako je $Q \equiv 0$ (nulfunkcija), linearna ODJ 1. reda je **homogena**. Takva jednadžba je zapravo *jednadžba sa razdvojenim varijablama*.
- U suprotnom, tj. ako je $Q(x) \neq 0$ za barem jedan $x \in D(Q)$, linearna ODJ 1. reda je **nehomogena**.

3.3.2. OPĆE RJEŠENJE LINEARNE ODJ 1. REDA

- Metodom varijacije konstanti može se pokazati da je opće rješenje *nehomogene* linearne ODJ 1. reda dano izrazom:

$$y = e^{-\int P(x) \cdot dx} \cdot \left(\int e^{\int P(x) \cdot dx} \cdot Q(x) \cdot dx + C \right), \quad C \in \mathbb{R}.$$

- Odatle slijedi da, ako je $Q \equiv 0$, tj. ako je linearne ODJ 1. reda *homogena*, onda je njezino opće rješenje dano izrazom:

$$y = C \cdot e^{-\int P(x) \cdot dx}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

3.3.3. NAPOMENA

- Osim prema “gotovim” formulama, linearne ODJ 1. reda mogu se rješavati i drugim metodama (npr. već spomenutom metodom varijacije konstanti).
- Te metode u svojoj osnovi ponovno vode na primjenu navedenih formula pa ih u ovoj točki nećemo posebno razmatrati. (Razmatrat ćemo ih kasnije kod rješavanja ODJ 2. reda.)

3.3.4. BERNOULLIJEVA ODJ

- Običnu diferencijalnu jednadžbu 1. reda oblika
 - $y' + P(x) \cdot y = Q(x) \cdot y^k,$
- gdje su P i Q realne funkcije jedne realne varijable, a $k \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, nazivamo **Bernoullijevom običnom diferencijalnom jednadžbom**.
- Ta jednadžba rješava se zamjenama

$$u = \frac{1}{y^{k-1}} \quad \text{i} \quad u' = (1-k) \cdot \frac{y'}{y^k}$$

- kojima se dobije nehomogena linearna ODJ 1. reda (s nepoznanim $u = u(x)$).

3.3.4. BERNOULLIJEVA ODJ

- Tako se dobije opće rješenje polazne Bernoullijeve jednadžbe zapisano u implicitnom obliku:

$$y^{k-1} = \frac{e^{(1-k) \cdot \int P(x) \cdot dx}}{(1-k) \cdot \int e^{(1-k) \cdot \int P(x) \cdot dx} \cdot Q(x) \cdot dx + C}$$