

## **3.4. LINEARNE OBIČNE DIFERENCIJALNE JEDNADŽBE**

### **2. REDA S KONSTANTNIM KOEFICIJENTIMA**

**HOMOGENE I NEHOMOGENE LINEARNE  
DIFERENCIJALNE JEDNADŽBE 2. REDA S  
KONSTANTNIM KOEFICIJENTIMA**

### 3.4.1. POJAM LINEARNE OBIČNE DIFERENCIJALNE JEDNADŽBE 2. REDA S KONSTATNIM KOEFICIJENTIMA

- **Linearna obična diferencijalna jednadžba 2. reda** (u dalnjem tekstu: linearna ODJ 2. reda) može biti:
  - s konstantnim koeficijentima;
  - s varijabilnim koeficijentima (tj. s koeficijentima koji su funkcije nezavisne varijable).
- Promatrati ćemo isključivo linearne ODJ 2. reda s konstantnim koeficijentima.
- Opći oblik takvih jednadžbi je:
- $y'' + p \cdot y' + q \cdot y = f(x)$ ,
- gdje su  $p, q \in \mathbb{R}$  (konstantni) koeficijenti, a  $f$  realna funkcija jedne realne varijable.
- Funkciju  $f$  najčešće nazivamo **funkcija smetnje** (zbog fizikalnih razloga).

### 3.4.2. HOMOGENA LINEARNA ODJ 2. REDA

- Ako je  $f \equiv 0$  (nulfunkcija), linearu ODJ 2. reda nazivamo **homogenom**.
- **Karakteristična jednadžba** pridružena homogenoj ODJ 2. reda je kvadratna jednadžba
- $k^2 + p \cdot k + q = 0$ .
- Kao i svaka kvadratna jednadžba, i karakteristična jednadžba može imati ili dva različita realna rješenja ili jedinstveno realno rješenje ili dva konjugirano-kompleksna rješenja.
- Zavisno o karakteru rješenja karakteristične jednadžbe izvode se formule za opće rješenje homogene ODJ 2. reda (vidjeti tablicu u odjeljku 3.4.3.).

### 3.4.3. OPĆA RJEŠENJA HOMOGENE ODJ 2. REDA

tip rješenja karakteristične jednadžbe	opće rješenje homogene ODJ 2. reda
$k_1, k_2 \in \mathbb{R}, \quad k_1 \neq k_2$	$y = C_1 \cdot e^{k_1 \cdot x} + C_2 \cdot e^{k_2 \cdot x}$
$k_1 = k_2 =: k \in \mathbb{R}$	$y = (C_1 + C_2 \cdot x) \cdot e^{k \cdot x}$
$k_1 = a + b \cdot i, \quad k_2 = \overline{k_1} \quad (b > 0)$	$y = e^{ax} \cdot (C_1 \cdot \cos(b \cdot x) + C_2 \cdot \sin(b \cdot x))$

### 3.4.4. NEHOMOGENA LINEARNA ODJ 2. REDA

- ▶ Algoritam za određivanje općega rješenja *bilo koje* nehomogene linearne ODJ 2. reda:
  - ▶ 1. Riješiti pripadnu *homogenu* linearnu ODJ 2. reda.
  - ▶ 2. Odrediti *bilo koje* *partikularno* rješenje zadane ODJ.
  - ▶ 3. Opće rješenje zadane nehomogene linearne ODJ 2. reda jednako je zbroju općega rješenja pripadne homogene linearne ODJ 2. reda i *bilo kojega* partikularnoga rješenja zadane nehomogene linearne ODJ 2. reda.
- ▶ Opće rješenje pripadne homogene ODJ 2. reda odredi se kako je to opisano u 3.4.2.
- ▶ Partikularno rješenje općenito je vrlo teško odrediti, ali u određenim slučajevima postoji neka pravila (vidjeti tablicu u odjeljku 3.4.5).

### 3.4.5. ODREĐIVANJE PARTIKULARNOGA RJEŠENJA U POSEBNIM SLUČAJEVIMA

oblik funkcije smetnje $f$	tip partikularnoga rješenja
polinom stupnja $n$ $P_n(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + a_1 \cdot x + a_0$	$p(x) = x^s \cdot (A_n \cdot x^n + \dots + A_1 \cdot x + A_0),$ gdje je: $s = \begin{cases} 0, & \text{ako } 0 \text{ nije rješenje karakteristične jednadžbe;} \\ 1, & \text{ako je } 0 \text{ jednostruko rješenje karakteristične jednadžbe;} \\ 2, & \text{ako je } 0 \text{ dvostruko rješenje karakteristične jednadžbe.} \end{cases}$
eksponencijalna funkcija ili zbroj eksponencijalnih funkcija $a \cdot e^{b \cdot x} \text{ ili } \sum_{i=1}^n a_i \cdot e^{b_i \cdot x}$	$p(x) = \check{C} \cdot x^s \cdot e^{b \cdot x},$ gdje je: $s = \begin{cases} 0, & \text{ako } b \text{ nije rješenje karakteristične jednadžbe;} \\ 1, & \text{ako je } b \text{ jednostruko rješenje karakteristične jednadžbe;} \\ 2, & \text{ako je } b \text{ dvostruko rješenje karakteristične jednadžbe.} \end{cases}$
$a \cdot \sin(b \cdot x), a \cdot \cos(b \cdot x)$ ili zbroj $c \cdot \cos(b \cdot x) + d \cdot \sin(b \cdot x)$	$p(x) = x^s \cdot (M \cdot \cos(b \cdot x) + N \cdot \sin(b \cdot x)),$ gdje je: $s = \begin{cases} 0, & \text{ako } z = b \cdot i \text{ nije rješenje karakteristične jednadžbe;} \\ 1, & \text{ako } z = b \cdot i \text{ jest rješenje karakteristične jednadžbe.} \end{cases}$
umnožak polinoma stupnja $n$ i eksponencijalne funkcije $(a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + a_1 \cdot x + a_0) \cdot e^{b \cdot x}$	$p(x) = x^s \cdot (c_n \cdot x^n + c_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + c_1 \cdot x + c_0) \cdot e^{b \cdot x},$ gdje je: $s = \begin{cases} 0, & \text{ako } b \text{ nije rješenje karakteristične jednadžbe;} \\ 1, & \text{ako je } b \text{ jednostruko rješenje karakteristične jednadžbe;} \\ 2, & \text{ako je } b \text{ dvostruko rješenje karakteristične jednadžbe.} \end{cases}$

### 3.4.5. ODREĐIVANJE PARTIKULARNOGA RJEŠENJA U POSEBNIM SLUČAJEVIMA

oblik funkcije smetnje $f$	tip partikularnoga rješenja
$e^{ax} \cdot \cos(bx)$ , $e^{ax} \cdot \sin(bx)$ , $e^{ax} \cdot (\cos(bx) + \sin(bx))$	$p(x) = x^s \cdot e^{ax} \cdot (M \cdot \cos(bx) + N \cdot \sin(bx)),$ gdje je: $s = \begin{cases} 0, & \text{ako } k = a + b \cdot i \text{ nije rješenje karakteristične jednadžbe;} \\ 1, & \text{ako } k = a + b \cdot i \text{ jest rješenje karakteristične jednadžbe;} \end{cases}$
$P_n(x) \cdot \cos(bx)$ , $P_n(x) \cdot \sin(bx)$ , $P_n(x) \cdot \cos(bx) + P_m(x) \cdot \sin(bx)$ , gdje su: $P_n(x)$ = polinom stupnja $n$ ; $P_m(x)$ = polinom stupnja $m$ .	$p(x) = x^s \cdot (Q_l(x) \cdot \cos(bx) + R_l(x) \cdot \sin(bx)),$ gdje su: $s = \begin{cases} 0, & \text{ako } k = a + b \cdot i \text{ nije rješenje karakteristične jednadžbe;} \\ 1, & \text{ako } k = a + b \cdot i \text{ jest rješenje karakteristične jednadžbe;} \end{cases}$ $l = \max\{m, n\}$ .
$P_n(x) \cdot e^{ax} \cdot \cos(bx)$ , $P_n(x) \cdot e^{ax} \cdot \sin(bx)$ , $e^{ax} \cdot (P_n(x) \cdot \cos(bx) + P_m(x) \cdot \sin(bx))$ , gdje su: $P_n(x)$ = polinom stupnja $n$ ; $P_m(x)$ = polinom stupnja $m$ .	$p(x) = x^s \cdot e^{ax} \cdot (Q_l(x) \cdot \cos(bx) + R_l(x) \cdot \sin(bx)),$ gdje su: $s = \begin{cases} 0, & \text{ako } k = a + b \cdot i \text{ nije rješenje karakteristične jednadžbe;} \\ 1, & \text{ako } k = a + b \cdot i \text{ jest rješenje karakteristične jednadžbe;} \end{cases}$ $l = \max\{m, n\}$ .

### 3.4.6. PRINCIP SUPERPOZICIJE RJEŠENJA

- Pretpostavimo da ODJ 2. reda ima oblik:

$$y'' + p \cdot y' + q \cdot y = \sum_{i=1}^n f_i(x)$$

- gdje su  $f_i$  realne funkcije jedne realne varijable, za svaki  $i = 1, 2, \dots, n$ .
- Nadalje, za svaki  $i = 1, 2, \dots, n$  neka je  $y_i$  opće rješenje jednadžbe  $y'' + p \cdot y' + q \cdot y = f_i$ .
- Tada je opće rješenje gornje ODJ dano s:

$$y = \sum_{i=1}^n y_i$$

- Ovaj se princip naziva **princip superpozicije** (općih) rješenja ODJ 2. reda i vrlo je koristan za primjenu u zadacima.