

3.4. LINEARNE OBIČNE DIFERENCIJALNE JEDNADŽBE 2. REDA

**HOMOGENE I NEHOMOGENE LINEARNE
DIFERENCIJALNE JEDNADŽBE 2. REDA**

3.4.1. POJAM LINEARNE OBIČNE DIFERENCIJALNE JEDNADŽBE 2. REDA

- *Linearna obična diferencijalna jednačina 2. reda* (u daljnjem tekstu: linearna ODJ 2. reda) može biti:
- s konstantnim koeficijentima;
- s varijabilnim koeficijentima (tj. s koeficijentima koji su funkcije varijabli x , y ili y').
- Mi ćemo promatrati isključivo linearne ODJ 2. reda s konstantnim koeficijentima.
- Opći oblik takvih jednačina je:
- $y'' + p \cdot y' + q \cdot y = f(x)$,
- gdje su $p, q \in \mathbb{R}$ konstantni koeficijenti, a f realna funkcija jedne realne varijable.

3.4.2. HOMOGENA LINEARNA ODJ 2. REDA

- Ako je $f \equiv 0$ (nulfunkcija), linearnu ODJ 2. reda nazivamo *homogenom*.
- *Karakteristična jednačžba* pridružena homogenoj ODJ 2. reda je kvadratna jednačžba
- $k^2 + p \cdot k + q = 0$.
- Kao i svaka kvadratna jednačžba, i karakteristična jednačžba može imati ili dva različita realna rješenja ili točno jedno realno rješenje ili dva konjugirano-kompleksna rješenja.
- Ovisno o karakteru rješenja karakteristične jednačžbe izvode se formule za opće rješenje homogene ODJ 2. reda (vidjeti tablicu u odjeljku 3.4.3.).

3.4.3. OPĆA RJEŠENJA HOMOGENE ODJ 2. REDA

tip rješenja karakteristične jednadžbe	opće rješenje homogene ODJ 2. reda
$k_1, k_2 \in \mathbb{R}, k_1 \neq k_2$	$y = C_1 \cdot e^{k_1 \cdot x} + C_2 \cdot e^{k_2 \cdot x}$
$k_1 = k_2 =: k \in \mathbb{R}$	$y = (C_1 + C_2 \cdot x) \cdot e^{k \cdot x}$
$k_1 = a + b \cdot i, k_2 = \overline{k_1} \ (b > 0)$	$y = e^{a \cdot x} \cdot [C_1 \cdot \cos(b \cdot x) + C_2 \cdot \sin(b \cdot x)]$

3.4.4. NEHOMOGENA LINEARNA ODJ 2. REDA

- ▶ Algoritam za određivanje općega rješenja *bilo koje* nehomogene linearne ODJ 2. reda:
- ▶ 1. Riješiti pripadnu *homogenu* linearnu ODJ 2. reda.
- ▶ 2. Odrediti bilo koje *partikularno* rješenje zadane ODJ.
- ▶ 3. Opće rješenje zadane nehomogene linearne ODJ 2. reda jednako je zbroju općega rješenja pripadne homogene linearne ODJ 2. reda i *bilo kojega* partikularnoga rješenja zadane nehomogene linearne ODJ 2. reda.
- ▶ Opće rješenje pripadne homogene ODJ 2. reda odredi se kako je to opisano u 3.4.3.
- ▶ Partikularno rješenje općenito je vrlo teško odrediti, ali u određenim slučajevima postoje neka pravila (vidjeti tablicu u odjeljku 3.4.5).

3.4.5. ODREĐIVANJE PARTIKULARNOGA RJEŠENJA U POSEBNIM SLUČAJEVIMA

oblik funkcije f	tip partikularnoga rješenja
<p>polinom stupnja n</p> $P_n(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + a_1 \cdot x + a_0$	$p(x) = x^s \cdot (A_n \cdot x^n + \dots + A_1 \cdot x + A_0),$ <p>gdje je:</p> $s = \begin{cases} 0, & \text{ako } 0 \text{ nije rješenje karakteristične jednačbe;} \\ 1, & \text{ako je } 0 \text{ jednostruko rješenje karakteristične jednačbe;} \\ 2, & \text{ako je } 0 \text{ dvostruko rješenje karakteristične jednačbe.} \end{cases}$
<p>eksponencijalna funkcija ili zbroj eksponencijalnih funkcija</p> $a \cdot e^{b \cdot x} \text{ ili } \sum_{i=1}^n a_i \cdot e^{b_i \cdot x}$	$p(x) = \check{C} \cdot x^s \cdot e^{b \cdot x},$ <p>gdje je:</p> $s = \begin{cases} 0, & \text{ako } b \text{ nije rješenje karakteristične jednačbe;} \\ 1, & \text{ako je } b \text{ jednostruko rješenje karakteristične jednačbe;} \\ 2, & \text{ako je } b \text{ dvostruko rješenje karakteristične jednačbe.} \end{cases}$
$a \cdot \sin(b \cdot x), a \cdot \cos(b \cdot x)$ ili zbroj $c \cdot \cos(b \cdot x) + d \cdot \sin(b \cdot x)$	$p(x) = x^s \cdot [M \cdot \cos(b \cdot x) + N \cdot \sin(b \cdot x)],$ <p>gdje je:</p> $s = \begin{cases} 0, & \text{ako } z = b \cdot i \text{ nije rješenje karakteristične jednačbe;} \\ 1, & \text{ako } z = b \cdot i \text{ jest rješenje karakteristične jednačbe.} \end{cases}$
<p>umnožak polinoma stupnja n i eksponencijalne funkcije</p> $(a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + a_1 \cdot x + a_0) \cdot e^{b \cdot x}$	$p(x) = x^s \cdot (c_n \cdot x^n + c_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + c_1 \cdot x + c_0) \cdot e^{b \cdot x},$ <p>gdje je:</p> $s = \begin{cases} 0, & \text{ako } b \text{ nije rješenje karakteristične jednačbe;} \\ 1, & \text{ako je } b \text{ jednostruko rješenje karakteristične jednačbe;} \\ 2, & \text{ako je } b \text{ dvostruko rješenje karakteristične jednačbe.} \end{cases}$

3.4.5. ODREĐIVANJE PARTIKULARNOGA RJEŠENJA U POSEBNIM SLUČAJEVIMA

oblik funkcije f	tip partikularnoga rješenja
$e^{a \cdot x} \cdot \cos(b \cdot x), e^{a \cdot x} \cdot \sin(b \cdot x),$ $e^{a \cdot x} \cdot [\cos(b \cdot x) + \sin(b \cdot x)]$	$p(x) = x^s \cdot e^{a \cdot x} \cdot [M \cdot \cos(b \cdot x) + N \cdot \sin(b \cdot x)],$ gdje je: $s = \begin{cases} 0, & \text{ako } k = a + b \cdot i \text{ nije rješenje karakteristične jednačbe;} \\ 1, & \text{ako } k = a + b \cdot i \text{ jest rješenje karakteristične jednačbe;} \end{cases}$
$P_n(x) \cdot \cos(b \cdot x), P_n(x) \cdot \sin(b \cdot x),$ $P_n(x) \cdot \cos(b \cdot x) + P_m(x) \cdot \sin(b \cdot x),$ gdje su: $P_n(x)$ = polinom stupnja n ; $P_m(x)$ = polinom stupnja m .	$p(x) = x^s \cdot [Q_l(x) \cdot \cos(b \cdot x) + R_l(x) \cdot \sin(b \cdot x)],$ gdje su: $s = \begin{cases} 0, & \text{ako } k = a + b \cdot i \text{ nije rješenje karakteristične jednačbe;} \\ 1, & \text{ako } k = a + b \cdot i \text{ jest rješenje karakteristične jednačbe;} \end{cases}$ $l = \max\{m, n\}.$
$P_n(x) \cdot e^{a \cdot x} \cdot \cos(b \cdot x), P_n(x) \cdot e^{a \cdot x} \cdot \sin(b \cdot x),$ $e^{a \cdot x} \cdot [P_n(x) \cdot \cos(b \cdot x) + P_m(x) \cdot \sin(b \cdot x)],$ gdje su: $P_n(x)$ = polinom stupnja n ; $P_m(x)$ = polinom stupnja m .	$p(x) = x^s \cdot e^{a \cdot x} \cdot [Q_l(x) \cdot \cos(b \cdot x) + R_l(x) \cdot \sin(b \cdot x)],$ gdje su: $s = \begin{cases} 0, & \text{ako } k = a + b \cdot i \text{ nije rješenje karakteristične jednačbe;} \\ 1, & \text{ako } k = a + b \cdot i \text{ jest rješenje karakteristične jednačbe;} \end{cases}$ $l = \max\{m, n\}.$

3.4.6. PRINCIP SUPERPOZICIJE RJEŠENJA

- Pretpostavimo da ODJ 2. reda ima oblik:

$$y'' + p \cdot y' + q \cdot y = \sum_{i=1}^n f_i(x)$$

- gdje su f_i realne funkcije jedne realne varijable, za svaki $i = 1, 2, \dots, n$.
- Nadalje, za svaki $i = 1, 2, \dots, n$ neka je y_i opće rješenje jednadžbe $y'' + p \cdot y' + q \cdot y = f_i$. Tada je opće rješenje gornje ODJ dano s:

$$y = \sum_{i=1}^n y_i$$

- Ovaj se princip naziva *princip superpozicije* (općih) *rješenja* ODJ 2. reda i vrlo je koristan za primjenu u zadacima.