1. Riješite sljedeće jednadžbe:

a) $y'' - 3 \cdot y' + 2 \cdot y = 0;$

b) $y'' + 5 \cdot y' + 6 \cdot y = 0;$

c) $y'' - 12 \cdot y' + 36 \cdot y = 0;$

d) $y'' + 10 \cdot y' + 25 \cdot y = 0;$

e) $y'' + 4 \cdot y = 0;$

f) $y'' + 2 \cdot y' + 2 \cdot y = 0;$

g) $y'' - 4 \cdot y' + 13 \cdot y = 0.$

2. Riješite sljedeće jednadžbe:

a) $y'' - 4 \cdot y' + 4 \cdot y = 4 \cdot x^2 - 12 \cdot x + 2;$

b) $y'' - 8 \cdot y' + 7 \cdot y = 14;$

c) $y'' + 2 \cdot y' + y = 9 \cdot e^{2 \cdot x};$

d) $y'' + y' - 2 \cdot y = 8 \cdot \cos(2 \cdot x) - 4 \cdot \sin(2 \cdot x);$

e) $y'' - 3 \cdot y' = (3 \cdot x - 2) \cdot \sin x - (x + 3) \cdot \cos x;$

f) $y'' + y' = 6 \cdot x + 2 \cdot e^x;$

g) $y'' + y' = 20 \cdot \sin^2 x;$

h) $y'' - y = 4 \cdot x \cdot e^x;$

i) $y'' - 4 \cdot y = 8 \cdot e^{2 \cdot x} \cdot \left(2 \cdot \cos(2 \cdot x) - \sin(2 \cdot x)\right).$

3. Riješite sljedeće Cauchyjeve probleme:

a) $\begin{cases} y'' + y' - 6 \cdot y = (10 \cdot x - 3) \cdot e^{2 \cdot x}, \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = -4. \end{cases}$

b) $\begin{cases} y'' - 2 \cdot y' + 10 \cdot y = 37 \cdot \sin(3 \cdot x) + 18 \cdot e^x, \\ y(0) = 10, \\ y'(0) = -5. \end{cases}$

RJEŠENJA ZADATAKA

Napomena: Ako se ne istakne drugačije, $C_1,\ C_2 \in \mathbb{R}$ su konstante.

1.

a) Karakteristična jednadžba (u daljnjem tekstu: K.J.) je $k^2 - 3 \cdot k + 2 = 0$. Njezina rješenja su $k_1 = 1$ i $k_2 = 2$. Zbog toga je $y = C_1 \cdot e^x + C_2 \cdot e^{2 \cdot x}$.

b) K.J.: $k^2 + 5 \cdot k + 6 = 0 \Rightarrow k_1 = -2,\ k_2 = -3 \Rightarrow y = C_1 \cdot e^{-2 \cdot x} + C_2 \cdot e^{-3 \cdot x}$.

c) K.J.: $k^2 - 12 \cdot k + 36 = 0 \Rightarrow k := k_1 = k_2 = 6 \Rightarrow y = (C_1 \cdot x + C_2) \cdot e^{6 \cdot x}$.

d) K.J.: $k^2 + 10 \cdot k + 25 = 0 \Rightarrow k := k_1 = k_2 = -5 \Rightarrow y = (C_1 \cdot x + C_2) \cdot e^{-5 \cdot x}$.

e) K.J.: $k^2 + 4 = 0 \Rightarrow k = 2 \cdot i \Rightarrow a = \mathrm{Re}(k) = 0,\ b = \mathrm{Im}(k) = 2 \Rightarrow y = C_1 \cdot \cos(2 \cdot x) + C_2 \cdot \sin(2 \cdot x)$.

f) K.J.: $k^2 + 2 \cdot k + 2 = 0 \Rightarrow k = -1 + i \Rightarrow a = -1,\ b = 1 \Rightarrow y = (C_1 \cdot \cos x + C_2 \cdot \sin x) \cdot e^{-x}$.

g) K.J.:$k^2 - 4 \cdot k + 13 = 0 \Rightarrow k = 2 + 3 \cdot i \Rightarrow a = 2,\ b = 3 \Rightarrow y = \left(C_1 \cdot \cos(3 \cdot x) + C_2 \cdot \sin(3 \cdot x)\right) \cdot e^{2 \cdot x}$.

2. S y_h označeno je rješenje pripadne homogene obične diferencijalne jednadžbe 2. reda, a s y_p partikularno rješenje zadane jednadžbe.

a) K.J.: $k^2 - 4 \cdot k + 4 = 0 \Rightarrow k = 2 \Rightarrow y_h = (C_1 \cdot x + C_2) \cdot e^{2 \cdot x}$.

$y_p = a \cdot x^2 + b \cdot x + c \Rightarrow (a,b,c) = (1,-1,1) \Rightarrow y_p = x^2 - x + 1$.

Rješenje zadatka je: $y = (C_1 \cdot x + C_2) \cdot e^{2 \cdot x} + x^2 - x + 1$.

b) K.J.: $k^2 - 8 \cdot k + 7 = 0 \Rightarrow k_1 = 1,\ k_2 = 7 \Rightarrow y_h = C_1 \cdot e^x + C_2 \cdot e^{7 \cdot x}$.

$y_p = a \Rightarrow a = 2 \Rightarrow y_p = 2$.

Rješenje zadatka je: $y = C_1 \cdot e^x + C_2 \cdot e^{7 \cdot x} + 2$.

c) K.J.: $k^2 + 2 \cdot k + 1 = 0 \Rightarrow k = -1 \Rightarrow y_h = (C_1 \cdot x + C_2) \cdot e^{-x}$.

$y_p = a \cdot e^{2 \cdot x} \Rightarrow a = 1 \Rightarrow y_p = e^{2 \cdot x}$.

Rješenje zadatka je $y = (C_1 \cdot x + C_2) \cdot e^{-x} + e^{2 \cdot x}$.

d) K.J.: $k^2 + k - 2 = 0 \Rightarrow k_1 = -2,\ k_2 = 1 \Rightarrow y_h = C_1 \cdot e^{-2x} + C_2 \cdot e^x$.

$y_p = a \cdot \cos(2 \cdot x) + b \cdot \sin(2 \cdot x) \Rightarrow (a,b) = (-1,1) \Rightarrow y_p = \sin(2 \cdot x) - \cos(2 \cdot x)$..

Rješenje zadatka je: $y = C_1 \cdot e^{-2x} + C_2 \cdot e^x + \sin(2 \cdot x) - \cos(2 \cdot x)$.

e) K.J.: $k^2 - 3 \cdot k = 0 \Rightarrow k_1 = 0,\ k_2 = 3 \Rightarrow y_h = C_1 \cdot e^{3 \cdot x} + C_2$.

$y_p = (a \cdot x + b) \cdot \cos x + (c \cdot x + d) \cdot \sin x \Rightarrow (a,b,c,d) = (1,0,0,0) \Rightarrow y_p = x \cdot \cos x$.

Rješenje zadatka je: $y = C_1 \cdot e^{3 \cdot x} + x \cdot \cos x + C_2$.

f) K.J.: $k^2+k=0 \Rightarrow k_1=-1,\ k_2=0 \Rightarrow y_h=C_1\cdot e^{-x}+C_2$.

$(y_p)_1=a\cdot x^2+b\cdot x \Rightarrow (a,b)=(3,-6) \Rightarrow (y_p)_1=3\cdot x^2-6\cdot x$

$(y_p)_2=d\cdot e^x \Rightarrow d=1 \Rightarrow (y_p)_2=e^x$.

Rješenje zadatka je: $y=C_1\cdot e^{-x}+e^x+3\cdot x^2-6\cdot x+C_2$.

g) K.J.: $k^2+k=0 \Rightarrow k_1=-1,\ k_2=0 \Rightarrow y_h=C_1\cdot e^{-x}+C_2$.

$y_p=a\cdot x+b\cdot\cos(2\cdot x)+c\cdot\sin(2\cdot x) \Rightarrow (a,b,c)=(10,2,-1) \Rightarrow y_p=10\cdot x+2\cdot\cos(2\cdot x)-\sin(2\cdot x)$.

Rješenje zadatka je: $y=C_1\cdot e^{-x}+2\cdot\cos(2\cdot x)-\sin(2\cdot x)+10\cdot x+C_2$.

h) K.J.: $k^2-1=0 \Rightarrow k_1=-1,\ k_2=1 \Rightarrow y_h=C_1\cdot e^{-x}+C_2\cdot e^x$.

$y_p=(a\cdot x^2+b\cdot x)\cdot e^x \Rightarrow (a,b)=(1,-1) \Rightarrow y_p=(x^2-x)\cdot e^x$.

Rješenje zadatka je: $y=C_1\cdot e^{-x}+(x^2-x+C_2)\cdot e^x$.

i) K.J.: $k^2-4=0 \Rightarrow k_1=-2,\ k_2=2 \Rightarrow y_h=C_1\cdot e^{-2\cdot x}+C_2\cdot e^{2\cdot x}$.

$y_p=\left(a\cdot\cos(2\cdot x)+b\cdot\sin(2\cdot x)\right)\cdot e^{2\cdot x} \Rightarrow (a,b)=(0,2) \Rightarrow y_p=2\cdot\sin(2\cdot x)\cdot e^{2\cdot x}$.

Rješenje zadatka je: $y=C_1\cdot e^{-2\cdot x}+\left(2\cdot\sin(2\cdot x)+C_2\right)\cdot e^{2\cdot x}$.

3. S y_h označeno je rješenje pripadne homogene obične diferencijalne jednadžbe 2. reda, s y_p partikularno rješenje zadane jednadžbe. a s y_o opće rješenje zadane jednadžbe.

a) K.J.: $k^2+k-6=0 \Rightarrow k_1=-3,\ k_2=2 \Rightarrow y_h=C_1\cdot e^{-3\cdot x}+C_2\cdot e^{2\cdot x}$.

$y_p=(a\cdot x^2+b\cdot x)\cdot e^{2\cdot x} \Rightarrow (a,b)=(1,-1) \Rightarrow y_p=(x^2-x)\cdot e^{2\cdot x}$.

Zbog toga je $y_o=C_1\cdot e^{-3\cdot x}+(x^2-x+C_2)\cdot e^{2\cdot x}$.

$y(0)=1 \Rightarrow C_1+C_2=1$,

$y'(0)=4 \Rightarrow -3\cdot C_1+2\cdot C_2=-3 \Rightarrow (C_1,C_2)=(1,0)$.

Rješenje zadatka je: $y=e^{-3\cdot x}+(x^2-x)\cdot e^{2\cdot x}$.

b) K.J.: $k^2-2\cdot k+10=0 \Rightarrow k=-1+3\cdot i \Rightarrow y_h=\left(C_1\cdot\cos(3\cdot x)+C_2\cdot\sin(3\cdot x)\right)\cdot e^x$.

$(y_p)_1=a\cdot\cos(3\cdot x)+b\cdot\sin(3\cdot x) \Rightarrow (a,b)=(6,1) \Rightarrow (y_p)_1=6\cdot\cos(3\cdot x)+\sin(3\cdot x)$,

$(y_p)_2=d\cdot e^x \Rightarrow d=2 \Rightarrow (y_p)_2=2\cdot e^x$. ;

Zbog toga je $y_o=\left(C_1\cdot\cos(3\cdot x)+C_2\cdot\sin(3\cdot x)+2\right)\cdot e^x+6\cdot\cos(3\cdot x)-\sin(3\cdot x)$.

$y(0)=10 \Rightarrow C_1+8=10 \Rightarrow C_1=2$,

$y'(0)=-5 \Rightarrow 3\cdot C_2+7=-5 \Rightarrow C_2=-4$.

Rješenje zadatka je: $y=2\cdot\left(\cos(3\cdot x)-2\cdot\sin(3\cdot x)+1\right)\cdot e^x+6\cdot\cos(3\cdot x)-\sin(3\cdot x)$.