3.4. LINEARNE OBIČNE DIFERENCIJALNE JEDNADŽBE 2. REDA

HOMOGENE I NEHOMOGENE LINEARNE DIFERENCIJALNE JEDNADŽBE 2. REDA

3.4.1. POJAM LINEARNE OBIČNE DIFERENCIJALNE JEDNADŽBE 2. REDA

- **Linearna obična diferencijalna jednadžba 2. reda** (u daljnjem tekstu: linearna ODJ 2. reda) može biti:
- s konstantnim koeficijentima;
- s varijabilnim koeficijentima (tj. s koeficijentima koji su funkcije nezavisne varijable).
- Mi ćemo promatrati isključivo linearne ODJ 2. reda s konstantnim koeficijentima.
- Opći oblik takvih jednadžbi je:
- $y'' + p \cdot y' + q \cdot y = f(x)$,
- gdje su $p, q \in \mathbb{R}$ (konstantni) koeficijenti, a f realna funkcija jedne realne varijable.

3.4.2. HOMOGENA LINEARNA ODJ 2. REDA

- Ako je $f \equiv 0$ (nulfunkcija), linearnu ODJ 2. reda nazivamo **homogenom**.
- **Karakteristična jednadžba** pridružena homogenoj ODJ 2. reda je kvadratna jednadžba
- $k^2 + p \cdot k + q = 0.$
- Kao i svaka kvadratna jednadžba, i karakteristična jednadžba može imati ili dva različita realna rješenja ili jedinstveno realno rješenje ili dva (različita) konjugirano-kompleksna rješenja.
- Zavisno o karakteru rješenja karakteristične jednadžbe izvode se formule za opće rješenje homogene ODJ 2. reda (vidjeti tablicu u odjeljku 3.4.3.).

3.4.3. OPĆA RJEŠENJA HOMOGENE ODJ 2. REDA

tip rješenja karakteristične jednadžbe	**opće rješenje homogene ODJ 2. reda**
$k_1,\ k_2 \in \mathbb{R},\ \ k_1 \neq k_2$	$y = C_1 \cdot e^{k_1 \cdot x} + C_2 \cdot e^{k_2 \cdot x}$
$k_1 = k_2 =: k \in \mathbb{R}$	$y = (C_1 + C_2 \cdot x) \cdot e^{k \cdot x}$
$k_1 = a + b \cdot i,\ k_2 = \overline{k_1}\ \ (b > 0)$	$y = e^{a \cdot x} \cdot \left(C_1 \cdot \cos(b \cdot x) + C_2 \cdot \sin(b \cdot x)\right)$

3.4.4. NEHOMOGENA LINEARNA ODJ 2. REDA

- Algoritam za određivanje općega rješenja *bilo koje* nehomogene linearne ODJ 2. reda:
- **1.** Riješiti pripadnu *homogenu* linearnu ODJ 2. reda.
- **2.** Odrediti bilo koje *partikularno* rješenje zadane ODJ.
- **3.** Opće rješenje zadane nehomogene linearne ODJ 2. reda jednako je zbroju općega rješenja pripadne homogene linearne ODJ 2. reda i *bilo kojega* partikularnoga rješenja zadane nehomogene linearne ODJ 2. reda.
- Opće rješenje pripadne homogene ODJ 2. reda odredi se kako je to opisano u 3.4.2.
- Partikularno rješenje općenito je vrlo teško odrediti, ali u određenim slučajevima postoje neka pravila (vidjeti tablicu u odjeljku 3.4.5).

3.4.5. ODREĐIVANJE PARTIKULARNOGA RJEŠENJA U POSEBNIM SLUČAJEVIMA

oblik funkcije *f*	**tip partikularnoga rješenja**
polinom stupnja n $P_n(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot x + a_0$	$p(x) = x^s \cdot (A_n \cdot x^n + \ldots + A_1 \cdot x + A_0)$, gdje je: $s = \begin{cases} 0, \text{ ako 0 nije rješenje karakteristične jednadžbe;} \\ 1, \text{ako je 0 jednostruko rješenje karakteristične jednadžbe;} \\ 2, \text{ako je 0 dvostruko rješenje karakteristične jednadžbe.} \end{cases}$
eksponencijalna funkcija ili zbroj eksponencijalnih funkcija $a \cdot e^{b \cdot x}$ ili $\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot e^{b_i \cdot x}$	$p(x) = \check{C} \cdot x^s \cdot e^{b \cdot x}$, gdje je: $s = \begin{cases} 0, \text{ ako } b \text{ nije rješenje karakteristične jednadžbe;} \\ 1, \text{ako je } b \text{ jednostruko rješenje karakteristične jednadžbe;} \\ 2, \text{ako je } b \text{ dvostruko rješenje karakteristične jednadžbe.} \end{cases}$
$a \cdot \sin(b \cdot x)$, $a \cdot \cos(b \cdot x)$ ili zbroj $c \cdot \cos(b \cdot x) + d \cdot \sin(b \cdot x)$	$p(x) = x^s \cdot \left(M \cdot \cos(b \cdot x) + N \cdot \sin(b \cdot x)\right)$, gdje je: $s = \begin{cases} 0, \text{ ako } z = b \cdot i \text{ nije rješenje karakteristične jednadžbe;} \\ 1, \text{ ako } z = b \cdot i \text{ jest rješenje karakteristične jednadžbe.} \end{cases}$
umnožak polinoma stupnja n i eksponencijalne funkcije $(a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot x + a_0) \cdot e^{b \cdot x}$	$p(x) = x^s \cdot (c_n \cdot x^n + c_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + c_1 \cdot x + c_0) \cdot e^{b \cdot x}$, gdje je: $s = \begin{cases} 0, \text{ ako } b \text{ nije rješenje karakteristične jednadžbe;} \\ 1, \text{ ako je } b \text{ jednostruko rješenje karakteristične jednadžbe;} \\ 2, \text{ ako je } b \text{ dvostruko rješenje karakteristične jednadžbe.} \end{cases}$

3.4.5. ODREĐIVANJE PARTIKULARNOGA RJEŠENJA U POSEBNIM SLUČAJEVIMA

oblik funkcije f	**tip partikularnoga rješenja**
$e^{a\cdot x}\cdot\cos(b\cdot x),\ e^{a\cdot x}\cdot\sin(b\cdot x),$ $e^{a\cdot x}\cdot\left(\cos(b\cdot x)+\sin(b\cdot x)\right)$	$p(x)=x^s\cdot e^{a\cdot x}\cdot\left(M\cdot\cos(b\cdot x)+N\cdot\sin(b\cdot x)\right),$ gdje je: $s=\begin{cases}0, \text{ ako } k=a+b\cdot i \text{ nije rješenje karakteristične jednadžbe;}\\ 1, \text{ ako } k=a+b\cdot i \text{ jest rješenje karakteristične jednadžbe;}\end{cases}$
$P_n(x)\cdot\cos(b\cdot x),\quad P_n\cdot\sin(b\cdot x),$ $P_n(x)\cdot\cos(b\cdot x)+P_m(x)\cdot\sin(b\cdot x),$ gdje su: $P_n(x)=$ polinom stupnja n; $P_m(x)=$ polinom stupnja m.	$p(x)=x^s\cdot\left(Q_l(x)\cdot\cos(b\cdot x)+R_l(x)\cdot\sin(b\cdot x)\right),$ gdje su: $s=\begin{cases}0, \text{ ako } k=a+b\cdot i \text{ nije rješenje karakteristične jednadžbe;}\\ 1, \text{ ako } k=a+b\cdot i \text{ jest rješenje karakteristične jednadžbe;}\end{cases}$ $l=\max\{m,n\}.$
$P_n(x)\cdot e^{a\cdot x}\cdot\cos(b\cdot x),\ \ P_n\cdot e^{a\cdot x}\cdot\sin(b\cdot x),$ $e^{a\cdot x}\cdot\left(P_n(x)\cdot\cos(b\cdot x)+P_m(x)\cdot\sin(b\cdot x)\right),$ gdje su: $P_n(x)=$ polinom stupnja n; $P_m(x)=$ polinom stupnja m.	$p(x)=x^s\cdot e^{a\cdot x}\cdot\left(Q_l(x)\cdot\cos(b\cdot x)+R_l(x)\cdot\sin(b\cdot x)\right),$ gdje su: $s=\begin{cases}0, \text{ ako } k=a+b\cdot i \text{ nije rješenje karakteristične jednadžbe;}\\ 1, \text{ ako } k=a+b\cdot i \text{ jest rješenje karakteristične jednadžbe;}\end{cases}$ $l=\max\{m,n\}.$

3.4.6. PRINCIP SUPERPOZICIJE RJEŠENJA

- Pretpostavimo da ODJ 2. reda ima oblik:

$$y'' + p \cdot y' + q \cdot y = \sum_{i=1}^{n} f_i(x)$$

- gdje su f_i realne funkcije jedne realne varijable, za svaki $i = 1, 2, ..., n$.
- Nadalje, za svaki $i = 1, 2, ..., n$ neka je y_i opće rješenje jednadžbe $y'' + p \cdot y' + q \cdot y = f_i$.
- Tada je opće rješenje gornje ODJ dano s:

$$y = \sum_{i=1}^{n} y_i$$

- Ovaj se princip naziva **princip superpozicije** (općih) *rješenja* ODJ 2. reda i vrlo je koristan za primjenu u zadacima.