

| | | |
|---|---|---|
|  TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU POLYTECHNICUM ZAGREBIENSE Elektrotehnički odjel | Matematika 2 (preddiplomski stručni studij elektrotehnike) | 3.5. Laplaceova transformacija – riješeni zadaci |
|---|---|---|

Napomena: Prepostavljamo da je svaki Laplaceov transformat funkcija varijable s . Takoder, radi kratkoće i jasnoće zapisa označavamo $\mathcal{L}\{f\} = F$. (**Oprez:** Laplaceova transformacija preslikava *funkciju* u *funkciju*, pa je nužno pisati i varijablu.)

Zadatak 1. Dokažite da funkcija $f(x) = e^{x^2}$ nije funkcija eksponencijalnoga rasta.

Rješenje: Prepostavimo suprotno, tj. da je funkcija f funkcija eksponencijalnoga rasta. Prema definiciji svojstva eksponencijalnoga rasta, postoje konstante $a, M > 0$ takve da za svaki $x > 0$ vrijedi nejednakost:

$$|f(x)| \leq M \cdot e^{ax}.$$

Primijetimo da vrijedi jednakost:

$$|f(x)| = \left| e^{\underbrace{x^2}_{>0}} \right| = e^{x^2}.$$

Uvrštavanjem te jednakosti u izraz $|f(x)| \leq M \cdot e^{ax}$ dobivamo:

$$\begin{aligned} e^{x^2} &\leq M \cdot e^{ax}, \quad / : e^{ax} > 0 \\ e^{x^2 - ax} &\leq M, \quad / \ln \\ x^2 - ax &\leq \ln M. \end{aligned}$$

Posljednja nejednakost mora vrijediti za svaki $x > 0$, pa prijelazom na graničnu vrijednost dobivamo:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - ax) &\leq \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln M, \\ +\infty &\leq \ln M, \end{aligned}$$

što je nemoguće. Naša pretpostavka je, dakle, bila pogrešna, tj. f nije eksponencijalnoga rasta.

Zadatak 2. Dokažite svojstvo linearnosti Laplaceove transformacije.

Rješenje: Neka su f i g funkcije koje imaju Laplaceove transformate i neka su $a, b \in \mathbb{R}$ konstante. Tvrdimo da i funkcija $h = a \cdot f + b \cdot g$ ima Laplaceov transformat (označimo ga s H) i da je

$$H(s) = a \cdot F(s) + b \cdot G(s).$$

Prema prepostavci, funkcije f i g imaju Laplaceove transformate. To znači da postoji funkcije F i G takve da vrijedi:

| | | |
|---|---|---|
|  TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU POLYTECHNICUM ZAGREBIENSE Elektrotehnički odjel | Matematika 2 (preddiplomski stručni studij elektrotehnike) | 3.5. Laplaceova transformacija – riješeni zadaci |
|---|---|---|

$$F(s) = \int_0^{+\infty} f(x) \cdot e^{-s \cdot x} \cdot dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\int_0^b f(x) \cdot e^{-s \cdot x} \cdot dx \right),$$

$$G(s) = \int_0^{+\infty} g(x) \cdot e^{-s \cdot x} \cdot dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\int_0^b g(x) \cdot e^{-s \cdot x} \cdot dx \right).$$

Koristeći definiciju nepravoga integrala oblika $\int_0^{+\infty} f_1(x) \cdot dx$ i osnovna svojstva graničnih vrijednosti dobivamo:

$$\begin{aligned} H(s) &= (\mathcal{L}(a \cdot f + b \cdot g))(s) = \int_0^{+\infty} (a \cdot f + b \cdot g)(x) \cdot e^{-s \cdot x} \cdot dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\int_0^b (a \cdot f + b \cdot g)(x) \cdot e^{-s \cdot x} \cdot dx \right) = \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\int_0^b a \cdot f(x) \cdot e^{-s \cdot x} \cdot dx + \int_0^b b \cdot g(x) \cdot e^{-s \cdot x} \cdot dx \right) = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(a \cdot \int_0^b f(x) \cdot e^{-s \cdot x} \cdot dx + b \cdot \int_0^b g(x) \cdot e^{-s \cdot x} \cdot dx \right) = \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(a \cdot \int_0^b f(x) \cdot e^{-s \cdot x} \cdot dx \right) + \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(b \cdot \int_0^b g(x) \cdot e^{-s \cdot x} \cdot dx \right) = \\ &= a \cdot \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\int_0^b f(x) \cdot e^{-s \cdot x} \cdot dx \right) + b \cdot \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\int_0^b g(x) \cdot e^{-s \cdot x} \cdot dx \right) = a \cdot F(s) + b \cdot G(s). \end{aligned}$$

Komentirajmo svaki redak ovoga izvoda. U prvom retku smo najprije napisali definiciju Laplaceova transformata funkcije $h = a \cdot f + b \cdot g$ koristeći nepravi integral. Potom smo tu istu definiciju napisali koristeći definiciju nepravoga integrala oblika $\int_0^{+\infty} f_1(x) \cdot dx$. Ta

definicija nam je omogućila prijelaz na određene integrale i primjenu svojstava određenih integrala. Znamo da je određeni integral zbroja funkcija jednak zbroju određenih integrala svakoga pribrojnika, pa smo to primjenili na početku drugoga retka. Znamo i da, ako se ispod određenoga integrala nađe umnožak konstante i neke funkcije, onda tu konstantu smijemo „izbaciti“ ispred određenoga integrala. To smo učinili u nastavku drugoga retka.

U trećemu retku smo primjenili svojstvo graničnih vrijednosti:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (a \cdot f_1(x) + b \cdot f_2(x)) = a \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) + b \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} f_2(x)$$

koje vrijedi ako postoje obje granične vrijednosti na desnoj strani jednakosti. U ovom slučaju te granične vrijednosti postoje zbog početnih prepostavki o postojanju funkcija F i G definiranih upravo pomoću tih graničnih vrijednosti. U posljednjem retku primjenili smo upravo te prepostavke (tj. definicije funkcija F i G s početka dokaza) i time dokazali tvrdnju.

| | | |
|---|---|---|
|  TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU POLYTECHNICUM ZAGREBIENSE Elektrotehnički odjel | Matematika 2 (preddiplomski stručni studij elektrotehnike) | 3.5. Laplaceova transformacija – riješeni zadaci |
|---|---|---|

Zadatak 3. Dokažite: Ako su f funkcija eksponencijalnoga rasta i F njezin Laplaceov transformat, onda je $\lim_{s \rightarrow +\infty} F(s) = 0$.

Napomena: Ovo svojstvo bi bilo vrlo trivijalno kad bi Laplaceov transformat *svake* funkcije (za koju on postoji) bio prava racionalna funkcija. Međutim, postoje funkcije definirane po dijelovima koje imaju Laplaceove transformate, ali ti transformati nisu prave racionalne funkcije. Zbog toga *ne smijemo* jednostavno zaključiti: „Laplaceov transformat je prava racionalna funkcija. Graf svake prave racionalne funkcije ima asimptotu $y = 0$. Zbog toga je $\lim_{s \rightarrow +\infty} F(s) = 0$.“

Iako ovaj „dokaz“ nije ispravan (jer se zasniva na pogrešnoj prepostavci), on ipak može poslužiti da tvrdnju iz zadatka provjerimo za funkcije čiji su Laplaceovi transformati prave racionalne funkcije. Tvrđnja za njih doista vrijedi i dokaz u tom (i samo u tom!) slučaju predstavlja gornji niz zaključaka.

Rješenje: Otprije znamo da za svaki $A \geq 0$ vrijedi ekvivalencija:

$$(|t| \leq A) \Leftrightarrow (-A \leq t \leq A).$$

Prema prepostavci, f je eksponencijalnoga rasta. To znači da postoji $a, M > 0$ takvi da za svaki $x > 0$ vrijedi nejednakost:

$$|f(x)| \leq M \cdot e^{ax}.$$

Ovu nejednakost, a prema gornjoj ekvivalenciji, možemo napisati u obliku:

$$-M \cdot e^{ax} \leq f(x) \leq M \cdot e^{ax}.$$

Pomnožimo tu nejednakost sa strogo pozitivnom vrijednošću e^{-sx} :

$$\begin{aligned} -M \cdot e^{ax} \cdot e^{-sx} &\leq f(x) \cdot e^{-sx} \leq M \cdot e^{ax} \cdot e^{-sx} \Leftrightarrow \\ -M \cdot e^{(a-s)x} &\leq f(x) \cdot e^{-sx} \leq M \cdot e^{(a-s)x}. \end{aligned}$$

Ovu nejednakost „napadnemo“ s nepravim integralom $\int_0^{+\infty}$, pri čemu se znakovi nejednakosti neće promijeniti („integral čuva nejednakosti“):

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} -M \cdot e^{(a-s)x} \cdot dx &\leq \int_0^{+\infty} f(x) \cdot e^{-sx} \cdot dx \leq \int_0^{+\infty} M \cdot e^{(a-s)x} \cdot dx \Leftrightarrow \\ -M \cdot \int_0^{+\infty} e^{(a-s)x} \cdot dx &\leq F(s) \leq M \cdot \int_0^{+\infty} e^{(a-s)x} \cdot dx. \end{aligned}$$

(Srednji član je jednak $F(s)$ prema definiciji Laplaceova transformata.) Ovu nejednakost „napadnemo“ s graničnom vrijednosti $\lim_{s \rightarrow +\infty}$, pri čemu se znakovi nejednakosti ponovno neće promijeniti („i granične vrijednosti čuvaju nejednakosti“):

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow +\infty} \left(-M \cdot \int_0^{+\infty} e^{(a-s)x} \cdot dx \right) &\leq \lim_{s \rightarrow +\infty} F(s) \leq \lim_{s \rightarrow +\infty} \left(M \cdot \int_0^{+\infty} e^{(a-s)x} \cdot dx \right) \Leftrightarrow \\ -M \cdot \lim_{s \rightarrow +\infty} \left(\int_0^{+\infty} e^{(a-s)x} \cdot dx \right) &\leq \lim_{s \rightarrow +\infty} F(s) \leq M \cdot \lim_{s \rightarrow +\infty} \left(\int_0^{+\infty} e^{(a-s)x} \cdot dx \right). \end{aligned}$$

Tvrđnja zadatka će biti dokazana dokažemo li da je $\lim_{s \rightarrow +\infty} \left(\int_0^{+\infty} e^{(a-s)x} \cdot dx \right) = 0$. Naime, tada će prvi i treći član posljednje nejednakosti biti jednaki nuli. Zbog znakova nejednakosti, i srednji član – a to je upravo tražena granična vrijednost – mora biti jednak nuli.

Dakle, odredimo:

$$\begin{aligned} L = \lim_{s \rightarrow +\infty} \left(\int_0^{+\infty} e^{(a-s)x} \cdot dx \right) &= \lim_{s \rightarrow +\infty} \left(\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b e^{(a-s)x} \cdot dx \right) = \lim_{s \rightarrow +\infty} \left(\lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{a-s} \cdot e^{(a-s)x} \right) \Big|_0^b \right) = \\ &= \lim_{s \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{a-s} \cdot \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(e^{(a-s)b} \right) \Big|_0^b \right) = \lim_{s \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{a-s} \cdot \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(e^{(a-s)b} - e^{(a-s)0} \right) \right) = \\ &= \lim_{s \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{a-s} \cdot \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(e^{(a-s)b} - 1 \right) \right). \end{aligned}$$

Prisjetimo se što je domena funkcije F . Dobijemo je tako da nađemo *najmanji* $a > 0$ za koji funkcija f ima svojstvo eksponencijalnoga rasta i onda uzmemo $D(F) = [a, +\infty)$. Zbog toga je $s \in [a, +\infty)$, pa je sigurno $s \geq a$, odnosno $a - s \leq 0$. To znači da je izraz $(a-s) \cdot b$ nepozitivan (jednak ili manji od nule), pa je $\lim_{b \rightarrow +\infty} ((a-s) \cdot b) = -\infty$. Znamo da kad $t \rightarrow -\infty$, onda $e^t \rightarrow 0$. Dakle, iz $\lim_{b \rightarrow +\infty} ((a-s) \cdot b) = -\infty$ slijedi $\lim_{b \rightarrow +\infty} (e^{(a-s)b}) = 0$. Tako konačno dobivamo:

$$L = \lim_{s \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{a-s} \cdot (0-1) \right) = \lim_{s \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{s-a} \right) = \left\{ \frac{1}{+\infty} \right\} = 0,$$

što smo i željeli pokazati.

| | | |
|---|---|---|
|  TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU POLYTECHNICUM ZAGREBIENSE Elektrotehnički odjel | Matematika 2 (preddiplomski stručni studij elektrotehnike) | 3.5. Laplaceova transformacija – riješeni zadaci |
|---|---|---|

Zadatak 4. Dokažite **teorem o pomaku (prigušenju):**

Neka su $\alpha \in \mathbb{R}$ i F Laplaceov transformat funkcije f . Tada vrijedi:

$$\mathcal{L}\{e^{\alpha \cdot x} \cdot f\}(s) = F(s - \alpha).$$

Rješenje: Radi kratkoće pisanja označimo $F_1 := \mathcal{L}\{e^{\alpha \cdot x} \cdot f\}$. Prema prepostavci je:

$$F(s) = \int_0^{+\infty} f(x) \cdot e^{-s \cdot x} \cdot dx.$$

Tada odmah imamo:

$$F_1(s) = \int_0^{+\infty} e^{\alpha \cdot x} \cdot f(x) \cdot e^{-s \cdot x} \cdot dx = \int_0^{+\infty} f(x) \cdot e^{\alpha \cdot x} \cdot e^{-s \cdot x} \cdot dx = \int_0^{+\infty} f(x) \cdot e^{\alpha \cdot x - s \cdot x} \cdot dx = \int_0^{+\infty} f(x) \cdot e^{(\alpha - s) \cdot x} \cdot dx.$$

Iz definicije Laplaceova transformata vidimo da je argument (nezavisna varijabla) funkcije F uvijek *suprotan* koeficijentu uz x u eksponentu eksponencijalne funkcije s bazom e . (U definiciji Laplaceova transformata taj je argument jednak s , dok uz x u eksponentu eksponencijalne funkcije s bazom e piše $-s$.) To znači da je:

$$F_1(s) = \int_0^{+\infty} f(x) \cdot e^{(\alpha - s) \cdot x} \cdot dx = F(-(a - s)) = F(s - a).$$

Napomena: Kakva je praktična korist teorema o pomaku? Vrlo značajna: ako znamo Laplaceov transformat funkcije f , možemo odmah (bez korištenja definicije) odrediti Laplaceov transformat umnoška funkcije f i eksponencijalne funkcije $e^{\alpha \cdot x}$, i to tako da u pravilu za Laplaceov transformat funkcije f pišemo $s - a$ umjesto s i pojednostavnimo dobiveni algebarski izraz. Takav način određivanja Laplaceovih transformata je očito puno brži i jednostavniji od određivanja nepravoga integrala iz definicije.

Općenito, zbog relativno neugodnoga nepravoga integrala u definiciji Laplaceovoga transformata, nastojat ćemo što manje transformata izvesti iz definicije, a što više njih izvesti koristeći razna korisna svojstva Laplaceove transformacije.

Zadatak 5. Dokažite **teorem o sličnosti:**

Neka su $\alpha > 0$ i F Laplaceov transformat funkcije f . Tada vrijedi:

$$\mathcal{L}\{f(a \cdot x)\}(s) = \frac{1}{a} \cdot F\left(\frac{s}{a}\right).$$

Rješenje: Radi kratkoće pisanja označimo: $F_1 := \mathcal{L}\{f(a \cdot x)\}$. Prema prepostavci je:

| | | |
|---|---|---|
|  TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU POLYTECHNICUM ZAGREBIENSE Elektrotehnički odjel | Matematika 2 (preddiplomski stručni studij elektrotehnike) | 3.5. Laplaceova transformacija – riješeni zadaci |
|---|---|---|

$$F(s) = \int_0^{+\infty} f(x) \cdot e^{-s \cdot x} \cdot dx.$$

Kako dobijemo funkciju F_1 ? Vrlo jednostavno: tako da pod integralom kao *argument funkcije* f pišemo $a \cdot x$. (**Oprez:** Najčešća greška je pisati $a \cdot x$ gdje god pod integralom piše x . To je pogrešno jer izraz $e^{-s \cdot x}$ nema nikakve veze s argumentom funkcije f , osim što se i u jednom i u drugom izrazu mora pojaviti ista oznaka nezavisne varijable.) Tako imamo:

$$F_1(s) = \int_0^{+\infty} f(a \cdot x) \cdot e^{-s \cdot x} \cdot dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{zamjena:} \\ t := a \cdot x, \\ x = \frac{1}{a} \cdot t, \\ dx = \frac{1}{a} \cdot dt, \\ 0 \rightarrow a \cdot 0 = 0, \\ +\infty \rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (a \cdot x) = +\infty \end{array} \right\} = \int_0^{+\infty} f(t) \cdot e^{-s \cdot \frac{1}{a} \cdot t} \cdot \frac{1}{a} \cdot dt = \frac{1}{a} \cdot \int_0^{+\infty} f(t) \cdot e^{-s \cdot \frac{1}{a} \cdot t} \cdot dt.$$

Dobiveni nepravi integral povežimo sa funkcijom F . Kako to učiniti? Jednostavno, varijabla funkcije F je suprotna veličini koja množi t u eksponentu eksponencijalne funkcije s bazom e pod integralom. Smijemo li to učiniti. Smijemo. Bitno je da argument funkcije f bude varijabla po kojoj se integrira. U definiciji Laplaceova transformata ta varijabla je x , a u dobivenom nepravom integralu ta je varijabla t . Dakle, razlika je samo u oznaci varijable. Tako odmah dobivamo:

$$F_1(s) = \frac{1}{a} \cdot \int_0^{+\infty} f(t) \cdot e^{-s \cdot \frac{1}{a} \cdot t} \cdot dt = \frac{1}{a} \cdot F\left(-\left(-s \cdot \frac{1}{a}\right)\right) = \frac{1}{a} \cdot F\left(\frac{s}{a}\right),$$

što smo i tvrdili.

Napomena: Kakva je praktična korist teorema o sličnosti? Vrlo značajna: ako znamo Laplaceov transformat funkcije f čija je nezavisna varijabla x , onda brzo i jednostavno dobijemo Laplaceov transformat funkcije f čija je nezavisna varijabla neki višekratnik od x , i to tako da u pravilu Laplaceova transformata F umjesto s pišemo $\frac{s}{a}$ i dobiveni algebarski izraz podijelimo s a . Tako ponovno možemo izbjegći određivanje relativno neugodnih nepravih integrala iz definicije Laplaceove transformacije.

Primjetimo da smo pretpostavku $\alpha > 0$ naveli zato da izraz $\frac{s}{a}$ ne „ispadne“ iz domene funkcije F . Naime, ako bismo uzeli $\alpha < 0$, onda bi, zbog uvjeta $s \in [a_0, +\infty)$, za neki

| | | |
|---|---|---|
|  TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU POLYTECHNICUM ZAGREBIENSE Elektrotehnički odjel | Matematika 2 (preddiplomski stručni studij elektrotehnike) | 3.5. Laplaceova transformacija – riješeni zadaci |
|---|---|---|

$a_0 > 0$, vrijedilo $\frac{s}{a} < 0$, pa posljedično i $\frac{s}{a} \notin [a_0, +\infty)$. U tom slučaju ne bismo mogli primijeniti Laplaceovu transformaciju.

Ipak, vidjet ćemo da taj zahtjev ipak ne predstavlja značajnu prepreku za rad u slučajevima kad je $a < 0$. U tim slučajevima ćemo nastojati najprije „riješiti se minusa“ u polaznoj funkciji i potom primijeniti Laplaceovu transformaciju.

Zadatak 6. Dokažite teorem o derivaciji originala:

Neka je f funkcija eksponencijalnoga rasta i neka je njezina derivacija po dijelovima neprekidna funkcija na $[0, +\infty)$. Tada postoji Laplaceov transformat funkcije f' i vrijedi:

$$\mathcal{L}\{f'\}(s) = s \cdot \mathcal{L}\{f\}(s) - f(0)$$

ili alternativno:

$$\mathcal{L}\{f'\}(s) = s \cdot F(s) - f(0).$$

Rješenje: Radi kratkoće pisanja označimo $F_1 := \mathcal{L}\{f'\}$. Koristeći metodu djelomične integracije, prema definiciji Laplaceova transformata dobivamo::

$$\begin{aligned} F_1(s) &= \int_0^{+\infty} f'(x) \cdot e^{-sx} \cdot dx = \left| \begin{array}{l} u = e^{-sx} \\ du = -s \cdot e^{-sx} \cdot dx \end{array} \quad \begin{array}{l} v = \int f'(x) \cdot dx = f(x) \\ dv = f'(x) \cdot dx \end{array} \right| = \\ &= \left(f(x) \cdot e^{-sx} \right) \Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} f(x) \cdot (-s \cdot e^{-sx}) \cdot dx = \left(f(x) \cdot e^{-sx} \right) \Big|_0^{+\infty} + s \cdot \int_0^{+\infty} f(x) \cdot e^{-sx} \cdot dx = \left(f(x) \cdot e^{-sx} \right) \Big|_0^{+\infty} + s \cdot F(s) \end{aligned}$$

Preostaje pokazati da je prvi član jednak $-f(0)$. Koristeći definiciju nepravoga integrala i Newton-Leibnizovu formulu najprije dobivamo:

$$\begin{aligned} \left(f(x) \cdot e^{-sx} \right) \Big|_0^{+\infty} &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\left(f(x) \cdot e^{-sx} \right) \Big|_0^b \right) = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(f(b) \cdot e^{-sb} - f(0) \cdot \underbrace{e^{-s \cdot 0}}_{=e^0=1} \right) = \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(f(b) \cdot e^{-sb} - f(0) \cdot \underbrace{e^{-s \cdot 0}}_{=e^0=1} \right) = \lim_{b \rightarrow +\infty} (f(b) \cdot e^{-sb} - f(0)). \end{aligned}$$

Dosad nigdje nismo primijenili pretpostavku da je f eksponencijalnoga rasta. Sad je pravi trenutak da to učinimo. Iz definicije svojstva eksponencijalnoga rasta slijedi da postoje konstante $a, M > 0$ takve da vrijedi:

$$-M \cdot e^{ax} \leq f(x) \leq M \cdot e^{ax}.$$

| | | |
|---|---|---|
|  TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU POLYTECHNICUM ZAGREBIENSE Elektrotehnički odjel | Matematika 2 (preddiplomski stručni studij elektrotehnike) | 3.5. Laplaceova transformacija – riješeni zadaci |
|---|---|---|

(Ovu nejednakost smo već koristili u rješenju zadatka 3.) Pomnožimo tu nejednakost sa $e^{-s \cdot x}$ i pustimo da $x \rightarrow +\infty$. Dobijemo:

$$\begin{aligned}
 -M \cdot e^{a \cdot x} \cdot e^{-s \cdot x} &\leq f(x) \cdot e^{-s \cdot x} \leq M \cdot e^{a \cdot x} e^{-s \cdot x}, \\
 -M \cdot e^{a \cdot x - s \cdot x} &\leq f(x) \cdot e^{-s \cdot x} \leq M \cdot e^{a \cdot x - s \cdot x}, \\
 -M \cdot e^{(a-s) \cdot x} &\leq f(x) \cdot e^{-s \cdot x} \leq M \cdot e^{(a-s) \cdot x}, \\
 \lim_{x \rightarrow +\infty} (-M \cdot e^{(a-s) \cdot x}) &\leq \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) \cdot e^{-s \cdot x}) \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} (M \cdot e^{(a-s) \cdot x}), \\
 -M \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{(a-s) \cdot x}) &\leq \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) \cdot e^{-s \cdot x}) \leq M \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{(a-s) \cdot x}).
 \end{aligned}$$

Sad smo praktički gotovi. Naime, u rješenju zadatka 3. komentirali smo da domenu funkcije F dobijemo tako da nađemo *najmanji* $a > 0$ za koji funkcija f ima svojstvo eksponencijalnoga rasta i onda uzmemo $D(F) = [a, +\infty)$. Zbog toga je $s \in [a, +\infty)$, pa su $a - s \leq 0$ i $\lim_{x \rightarrow +\infty} ((a-s) \cdot x) = -\infty$. Znamo da kad $t \rightarrow -\infty$, onda $e^t \rightarrow 0$. Dakle, iz $\lim_{x \rightarrow +\infty} ((a-s) \cdot x) = -\infty$ slijedi $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{(a-s) \cdot x}) = 0$. Uvrštavanjem te jednakosti u posljednju dobivenu nejednakost dobivamo:

$$\begin{aligned}
 -M \cdot 0 &\leq \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) \cdot e^{-s \cdot x}) \leq M \cdot 0 \Leftrightarrow \\
 0 &\leq \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) \cdot e^{-s \cdot x}) \leq 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) \cdot e^{-s \cdot x}) = \lim_{b \rightarrow +\infty} (f(b) \cdot e^{-s \cdot b}) = 0.
 \end{aligned}$$

Zbog toga je i:

$$\left. (f(x) \cdot e^{-s \cdot x}) \right|_0^{+\infty} = \lim_{b \rightarrow +\infty} (f(b) \cdot e^{-s \cdot b} - f(0)) = 0 - f(0) = -f(0),$$

te konačno:

$$F_1(s) = \left. (f(x) \cdot e^{-s \cdot x}) \right|_0^{+\infty} + s \cdot F(s) = -f(0) + s \cdot F(s) = s \cdot F(s) - f(0).$$

Napomena: Rezultat zadatka 6. treba „čitati“ ovako: *Laplaceov transformat derivacije funkcije f dobijemo tako da sa s pomnožimo Laplaceov transformat funkcije f i od umnoška oduzmemo vrijednost funkcije f u nuli.*

Zadatak 7. Koristeći rezultat zadatka 6. uz sve pretpostavke navedene u tom zadatku, izvedite Laplaceovu transformaciju za drugu derivaciju funkcije f .

Rješenje: U formuli za $\mathcal{L}\{f'\}$ umjesto f pišemo f' . Tada član $\mathcal{L}\{f'\}$ postaje $\mathcal{L}\{(f')'\}$ = $\mathcal{L}\{f''\}$. Prema napomeni ispred zadatka 7., Laplaceov transformat derivacije funkcije f' - a to je transformat druge derivacije funkcije f - dobijemo tako da sa s

| | | |
|---|---|---|
|  TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU POLYTECHNICUM ZAGREBIENSE Elektrotehnički odjel | Matematika 2 (preddiplomski stručni studij elektrotehnike) | 3.5. Laplaceova transformacija – riješeni zadaci |
|---|---|---|

pomnožimo Laplaceov transformat funkcije f' i od umnoška oduzmemmo vrijednost funkcije f' u nuli. Rezultat zadatka 6. kaže da je Laplaceov transformat derivacije funkcije f – a to je funkcija f' - jednak $s \cdot F(s) - f(0)$. Tako konačno dobivamo:

$$\mathcal{L}\{f''\}(s) = s \cdot \mathcal{L}\{f'\}(s) - f'(0) = s \cdot (s \cdot \mathcal{L}\{f\}(s) - f(0)) - f'(0) = s^2 \cdot \mathcal{L}\{f\}(s) - s \cdot f(0) - f'(0)$$

ili alternativno:

$$\mathcal{L}\{f''\}(s) = s^2 \cdot F(s) - s \cdot f(0) - f'(0).$$

Zadatak 8. Dokažite teorem o integraciji originala:

Neka je f funkcija eksponencijalnoga rasta. Neka je

$$F_1(x) = \int_0^x f(t) \cdot dt.$$

Tada je:

$$\mathcal{L}\{F_1\}(s) = \frac{\mathcal{L}(f)(s)}{s} = \frac{F(s)}{s}.$$

Rješenje: Pokažimo najprije da je i F_1 eksponencijalnoga rasta. Imamo redom:

$$\begin{aligned} |F_1(x)| &= \left| \int_0^x f(t) \cdot dt \right| \leq (\text{jer je } f \text{ eksponencijalnoga rasta}) \leq \left| \int_0^x M \cdot e^{a \cdot t} \cdot dt \right| = \left| M \cdot \int_0^x e^{a \cdot t} \cdot dt \right| = \\ &= (\text{zbog } M > 0) = M \cdot \left| \int_0^x e^{a \cdot t} \cdot dt \right| = (\text{zbog } e^{a \cdot t} > 0 \Rightarrow \int_0^x e^{a \cdot t} \cdot dt > 0) = M \cdot \int_0^x e^{a \cdot t} \cdot dt = \\ &= M \cdot \left(\frac{1}{a} \cdot e^{a \cdot t} \right) \Big|_0^x = \frac{M}{a} \cdot (e^{a \cdot x} - e^{a \cdot 0}) = \frac{M}{a} \cdot (e^{a \cdot x} - 1) < \frac{M}{a} \cdot e^{a \cdot x} = M_1 \cdot e^{a \cdot x}. \end{aligned}$$

Dakle, našli smo konstante $M_1, a > 0$ takve da vrijedi nejednakost $|F_1(x)| < M_1 \cdot e^{a \cdot x}$, pa zaključujemo da je funkcija F_1 eksponencijalnoga rasta. Zbog toga na nju smijemo primijeniti rezultat zadatka 6.

U formuli iz zadatka 6. umjesto f pišemo F_1 , pa dobijemo:

$$\mathcal{L}\{F'_1\}(s) = s \cdot \mathcal{L}\{F_1\}(s) - F_1(0).$$

Očito je:

| | | |
|---|---|---|
|  TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU POLYTECHNICUM ZAGREBIENSE Elektrotehnički odjel | Matematika 2 (preddiplomski stručni studij elektrotehnike) | 3.5. Laplaceova transformacija – riješeni zadaci |
|---|---|---|

$$F_1(0) = \int_0^0 f(t) \cdot dt = 0.$$

Može se pokazati da je F_1 primitivna funkcija za funkciju f , tj. da vrijedi $F_1'(x) = f(x)$. Zbog toga u formuli

$$\mathcal{L}\{F_1'\}(s) = s \cdot \mathcal{L}\{F_1\}(s) - F_1(0)$$

umjesto F_1' pišemo f , a umjesto $F_1(0)$ pišemo 0. Dobijemo:

$$\mathcal{L}\{f\}(s) = s \cdot \mathcal{L}\{F_1\}(s) - 0,$$

otkuda je

$$\mathcal{L}\{F_1\}(s) = \frac{\mathcal{L}\{f\}(s)}{s} = \frac{F(s)}{s}.$$

Zadatak 9. Dokažite teorem o množenju:

Neka je F Laplaceov transformat funkcije f . Tada vrijedi:

$$\mathcal{L}\{x \cdot f(x)\}(s) = -F'(s).$$

Dokaz: Dokaz je zapravo trivijalan. Derivirajmo obje strane jednakosti

$$F(s) = \int_0^{+\infty} f(x) \cdot e^{-sx} \cdot dx$$

po varijabli s . Kako to učiniti na desnoj strani na kojoj imamo integral po varijabli x ? Jednostavno, deriviramo podintegralnu funkciju po varijabli s smatrajući $f(x)$ konstantom (jer njezina vrijednost ne ovisi o varijabli s). Drugim riječima, prilikom deriviranja $f(x)$ prepisujemo, a e^{-sx} deriviramo po varijabli s . Dobivamo:

$$\begin{aligned} F'(s) &= \int_0^{+\infty} f(x) \cdot (-x) \cdot e^{-sx} \cdot dx \Leftrightarrow F'(s) = - \int_0^{+\infty} x \cdot f(x) \cdot e^{-sx} \cdot dx \Leftrightarrow \\ -F'(s) &= \int_0^{+\infty} (x \cdot f(x)) \cdot e^{-sx} \cdot dx \Leftrightarrow -F'(s) = \mathcal{L}\{x \cdot f(x)\}(s). \end{aligned}$$

Napomena: Postoji i odgovarajući teorem o dijeljenju, ali njegov iskaz i dokaz nisu jednostavnji, pa ih ovdje izostavljamo.

Svi prethodni zadaci omogućuju nam da (relativno) brzo i jednostavno izvedemo Laplaceove transformate osnovnih elementarnih funkcija.

| | | |
|---|---|---|
|  TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU POLYTECHNICUM ZAGREBIENSE Elektrotehnički odjel | Matematika 2 (preddiplomski stručni studij elektrotehnike) | 3.5. Laplaceova transformacija – riješeni zadaci |
|---|---|---|

Zadatak 10. Izvedite formulu za Laplaceov transformat svake od sljedećih funkcija:

- a) $f_1 : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f_1(x) = 1$;
- b) $f_2 : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f_2(x) = e^x$;
- c) $f_3 : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f_3(x) = \sin x$.

Rješenje: a) Primijenimo rezultat zadatka 6. (teorem o derivaciji originala). U formulu

$$\mathcal{L}\{f'\}(s) = s \cdot F(s) - f(0)$$

uvrstimo ono što znamo: $f_1'(x) = 0$, $f_1(0) = 1$, pa dobijemo:

$$\mathcal{L}\{0\}(s) = s \cdot F(s) - 1.$$

(Oprez: Član na lijevoj strani je Laplaceov transformat nulfunkcije. On je također funkcija, ali u varijabli s .) Lako vidimo da je:

$$\mathcal{L}\{0\}(s) = \int_0^{+\infty} 0 \cdot e^{-s \cdot x} \cdot dx = \int_0^{+\infty} 0 \cdot dx = 0.$$

Tako slijedi:

$$0 = s \cdot \mathcal{L}\{f_1\}(s) - 1 \Rightarrow \mathcal{L}\{f_1\}(s) = \frac{1}{s}.$$

b) Lukavo ćemo ponovno primijeniti rezultat zadatka 6. Naime, za funkciju f_2 očito vrijede jednakosti $f_2' = f_2$ i $f_2(0) = 1$, pa uvrstimo te dvije jednakosti u formulu iz zadatka 6. Radi kratkoće zapisa, neka je $F_2 := \mathcal{L}\{f_2\}$. Dobijemo:

$$F_2(s) = s \cdot F_2(s) - 1 \Rightarrow F_2(s) - s \cdot F_2(s) = -1 \Rightarrow (F_2(s)) \cdot (1 - s) = -1 \Rightarrow F_2(s) = \frac{-1}{1 - s} = \frac{1}{s - 1}.$$

c) Ovdje ćemo lukavo primijeniti rezultat zadatka 7. i svojstvo linearnosti Laplaceove transformacije. Radi kratkoće zapisa, neka je $F_3 := \mathcal{L}\{f_3\}$. Uočimo da je:

$$f_3'(x) = \cos x \quad \text{i} \quad f_3''(x) = -\sin(x) = -f_3(x).$$

Zbog toga je:

$$\mathcal{L}\{f_3''\}(s) = \mathcal{L}\{-f_3\}(s) = -\mathcal{L}\{f_3\}(s) = -F_3(s)$$

| | | |
|---|---|---|
|  TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU POLYTECHNICUM ZAGREBIENSE Elektrotehnički odjel | Matematika 2 (preddiplomski stručni studij elektrotehnike) | 3.5. Laplaceova transformacija – riješeni zadaci |
|---|---|---|

Preostaje primijeniti rezultat zadatka 7. i jednakost $h'(x) = \cos x$:

$$\begin{aligned}
 \underbrace{\mathcal{L}\{f_3''\}(s)}_{=-\mathcal{L}\{f_3\}(s)=-F_3(s)} &= s^2 \cdot F_3(s) - s \cdot \underbrace{f_3(0)}_{=\sin 0=0} - \underbrace{f_3'(0)}_{=\cos 0=1}, \\
 -F_3(s) &= s^2 \cdot F_3(s) - s \cdot 0 - 1, \\
 -F_3(s) - s^2 \cdot F_3(s) &= -1, \\
 (F_3(s)) \cdot (-1 - s^2) &= -1, \\
 F_3(s) &= \frac{-1}{-1 - s^2} = \frac{1}{s^2 + 1}.
 \end{aligned}$$

Napomena: Svi dobiveni rezultati mogu se izvesti izravno koristeći definiciju Laplaceova transformata. Učinite to za vježbu.

Zadatak 11. Izvedite formulu za Laplaceov transformat svake od sljedećih funkcija:

- a) $f_1(x) = x;$
- b) $f_2(x) = x^2;$
- c) $f_3(x) = x^n, n \in \mathbb{N};$
- d) $f_4(x) = \cos x;$
- e) $f_5(x) = x \cdot e^x;$
- f) $f_6(x) = x^2 \cdot e^x;$
- g) $f_7(x) = x \cdot \sin x;$
- h) $f_8(x) = x \cdot \cos x;$
- i) $f_9(x) = e^x \cdot \sin x;$
- j) $f_{10}(x) = e^x \cdot \cos x;$
- k) $f_{11}(x) = \operatorname{sh} x;$
- l) $f_{12}(x) = \operatorname{ch} x.$

Rješenje: Sve ove formule bilo bi relativno teško i komplikirano izvesti iz definicije. No, koristeći dokazana svojstva Laplaceove transformacije, njihovi izvodi su relativno kratki i jednostavnji. Radi kratkoće zapisa označavamo: $F_i := \mathcal{L}\{f_i\}$, $\forall i = 1, 2, \dots, 12$.

- a) Uočimo da je $x = \int_0^x 1 \cdot dt$. Primjenom rezultata zadatka 8. (teorem o integraciji originala) i zadatka 10. a) odmah dobivamo:

$$F_1(s) = \frac{\mathcal{L}\{1\}(s)}{s} = \frac{1}{s} = \frac{1}{s^2}.$$

| | | |
|---|---|---|
|  TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU POLYTECHNICUM ZAGREBIENSE Elektrotehnički odjel | Matematika 2 (preddiplomski stručni studij elektrotehnike) | 3.5. Laplaceova transformacija – riješeni zadaci |
|---|---|---|

b) Uočimo da je $\frac{1}{2} \cdot x^2 = \int_0^x t \cdot dt$. Primjenom rezultata zadatka 2., 8. i 10.a) dobivamo:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{1}{2} \cdot x^2\right\}(s) = \frac{\mathcal{L}\{x\}(s)}{s} \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\mathcal{L}\{x^2\}(s)}_{=F_2(s)} = \frac{s^2}{s} \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot F_2(s) = \frac{1}{s^3} \Rightarrow F_2(s) = \frac{2}{s^3}.$$

c) Označimo $g_n = \mathcal{L}\{x^n\}$. Znamo da je:

$$g_0(s) = \mathcal{L}\{x^0\}(s) = \mathcal{L}\{1\}(s) = \frac{1}{s}.$$

Izvedimo rekurziju za *niz funkcija* g_n . To je vrlo lako učiniti koristeći jednakost:

$$\frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1} = \int_0^x t^n \cdot dt.$$

Ponovno iskoristimo rezultate zadataka 2. i 8., pa dobijemo:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1}\right\}(s) = \frac{\mathcal{L}\{x^n\}(s)}{s} \Rightarrow \frac{1}{n+1} \cdot \underbrace{\mathcal{L}\{x^{n+1}\}(s)}_{=g_{n+1}(s)} = \frac{\overbrace{\mathcal{L}\{x^n\}(s)}^{=g_n(s)}}{s} \Rightarrow g_{n+1}(s) = \frac{n+1}{s} \cdot g_n(s),$$

odnosno

$$\begin{cases} g_{n+1}(s) = \frac{n+1}{s} \cdot g_n(s), & \text{za } n \in \mathbb{N}, \\ g_0(s) = \frac{1}{s}. \end{cases}$$

Ovu rekurziju lagano riješimo teleskopiranjem:

$$\begin{aligned} g_0(s) &= \frac{1}{s}, \\ g_1(s) &= \frac{0+1}{s} \cdot g_0(s), \\ g_2(s) &= \frac{1+1}{s} \cdot g_1(s), \\ g_3(s) &= \frac{2+1}{s} \cdot g_2(s), \\ &\vdots \\ g_n(s) &= \frac{(n-1)+1}{s} \cdot g_{n-1}(s). \end{aligned}$$

| | | |
|---|---|---|
|  TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU POLYTECHNICUM ZAGREBIENSE Elektrotehnički odjel | Matematika 2 (preddiplomski stručni studij elektrotehnike) | 3.5. Laplaceova transformacija – riješeni zadaci |
|---|---|---|

Pomnožimo zasebno lijeve i zasebno desne strane ovih jednakosti. Tih jednakosti ima ukupno $n + 1$. Tada se pokrate svi članovi promatranoga niza osim posljednjega (to je $g_n(s)$). Tako dobijemo:

$$g_n(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{0+1}{s} \cdot \frac{1+1}{s} \cdot \frac{2+1}{s} \cdot \dots \cdot \frac{(n-1)+1}{s} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n}{s^{n+1}} = \frac{n!}{s^{n+1}}.$$

d) Prisjetimo se da je $(\sin x)' = \cos x$. Zbog toga primijenimo rezultate zadatka 6. (teorem o derivaciji originala) i zadatka 10. c):

$$\underbrace{\mathcal{L}\left\{\underbrace{(\sin x)'}_{= \cos x}\right\}(s)}_{= F_4(s)} = s \cdot \underbrace{\mathcal{L}\{\sin x\}(s)}_{= \frac{1}{s^2+1}} - \underbrace{\sin 0}_{= 0} \Rightarrow F_4(s) = s \cdot \frac{1}{s^2+1} = \frac{s}{s^2+1}.$$

e) Primijenimo rezultate zadataka 9 i 10. b). U našemu je slučaju $f(x) = e^x$, pa je $F(s) = \frac{1}{s-1}$. Tako dobivamo:

$$\mathcal{L}\{x \cdot e^x\}(s) = -F'(s) = -\left(\frac{1}{s-1}\right)' = -\frac{-1 \cdot (s-1)'}{(s-1)^2} = \frac{1 \cdot 1}{(s-1)^2} = \frac{1}{(s-1)^2}.$$

f) Primijenimo rezultate zadatka 9. i prethodnoga podzadatka. Sada je $f(x) = x \cdot e^x$, pa je $F(s) = \frac{1}{(s-1)^2}$. Tako dobivamo:

$$\mathcal{L}\{x^2 \cdot e^x\}(s) = \mathcal{L}\{x \cdot (x \cdot e^x)\}(s) = -F'(s) = -\left(\frac{1}{(s-1)^2}\right)' = -\frac{-1 \cdot ((s-1)^2)'}{(s-1)^4} = \frac{2 \cdot (s-1)}{(s-1)^4} = \frac{2}{(s-1)^3}.$$

g) Primijenimo rezultate zadataka 9 i 10. c). U našemu je slučaju $f(x) = \sin x$, pa je $F(s) = \frac{1}{s^2+1}$. Tako dobivamo:

$$\mathcal{L}\{x \cdot \sin x\}(s) = -F'(s) = -\left(\frac{1}{s^2+1}\right)' = -\frac{-1 \cdot (s^2+1)'}{(s^2+1)^2} = \frac{1 \cdot 2 \cdot s}{(s^2+1)^2} = \frac{2 \cdot s}{(s^2+1)^2}.$$

h) Primijenimo rezultate zadataka 9 i 11. d). U našemu je slučaju $f(x) = \cos x$, pa je $F(s) = \frac{s}{s^2+1}$. Tako dobivamo:

$$\mathcal{L}\{x \cdot \cos x\}(s) = -F'(s) = -\left(\frac{s}{s^2+1}\right)' = -\frac{1 \cdot (s^2+1) - s \cdot (s^2+1)'}{(s^2+1)^2} = -\frac{s^2+1-2 \cdot s^2}{(s^2+1)^2} = \frac{s^2-1}{(s^2+1)^2}.$$

| | | |
|---|---|---|
|  TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU POLYTECHNICUM ZAGREBIENSE Elektrotehnički odjel | Matematika 2 (preddiplomski stručni studij elektrotehnike) | 3.5. Laplaceova transformacija – riješeni zadaci |
|---|---|---|

- i) Primijenimo rezultate zadatka 4. (teorem o prigušenju za $\alpha=1$ i $f(x)=\sin x$) i 10.
 c) (iz kojega slijedi: $F(s)=\frac{1}{s^2+1}$). Tako dobivamo:

$$\mathcal{L}\{e^x \cdot \sin x\}(s) = F(s-1) = \frac{1}{(s-1)^2 + 1}.$$

- j) Primijenimo rezultate zadatka 4. (teorem o prigušenju za $\alpha=1$ i $f(x)=\cos x$) i podzadatka d) (iz kojega slijedi: $F(s)=\frac{s}{s^2+1}$). Tako dobivamo:

$$\mathcal{L}\{e^x \cdot \cos x\}(s) = F(s-1) = \frac{s-1}{(s-1)^2 + 1}.$$

- k) Primijenimo rezultat zadatka 4. za $\alpha=-1$ i $f(x)=1$. Iz zadatka 10. a) slijedi da je $F(s)=\frac{1}{s}$. Dobijemo:

$$\mathcal{L}\{e^{-x}\}(s) = \mathcal{L}\{e^{-x} \cdot 1\}(s) = F(s-(-1)) = F(s+1) = \frac{1}{s+1} \Rightarrow \mathcal{L}\{e^{-x}\}(s) = \frac{1}{s+1}.$$

Preostaje primijeniti definicijsku formulu sinusa hiperbolnoga i rezultat zadatka 2. (svojstvo linearnosti). Tako dobivamo:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\operatorname{sh} x\}(s) &= \mathcal{L}\left\{\frac{1}{2} \cdot (e^x - e^{-x})\right\}(s) = \frac{1}{2} \cdot \mathcal{L}\{(e^x - e^{-x})\}(s) = \frac{1}{2} \cdot (\mathcal{L}\{e^x\}(s) - \mathcal{L}\{e^{-x}\}(s)) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s+1}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{s+1-(s-1)}{(s-1) \cdot (s+1)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{s^2-1} = \frac{1}{s^2-1}. \end{aligned}$$

- l) Potpuno analogno kao u prethodnom podzadatku dobijemo:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\operatorname{ch} x\}(s) &= \mathcal{L}\left\{\frac{1}{2} \cdot (e^x + e^{-x})\right\}(s) = \frac{1}{2} \cdot \mathcal{L}\{(e^x + e^{-x})\}(s) = \frac{1}{2} \cdot (\mathcal{L}\{e^x\}(s) + \mathcal{L}\{e^{-x}\}(s)) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{s-1} + \frac{1}{s+1}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{s+1+(s-1)}{(s-1) \cdot (s+1)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2 \cdot s}{s^2-1} = \frac{s}{s^2-1}. \end{aligned}$$

Zadatak 12. Neka su $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Izvedite formule za Laplaceov transformat svake od sljedećih funkcija:

- a) $f_1(x) = a;$
- b) $f_2(x) = e^{ax};$
- c) $f_3(x) = x^n \cdot e^{ax}, n \in \mathbb{N};$
- d) $f_4(x) = \sin(ax);$

| | | |
|---|---|---|
|  TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU POLYTECHNICUM ZAGREBIENSE Elektrotehnički odjel | Matematika 2 (preddiplomski stručni studij elektrotehnike) | 3.5. Laplaceova transformacija – riješeni zadaci |
|---|---|---|

- e) $f_6(x) = \cos(a \cdot x);$
- f) $f_7(x) = x \cdot \sin(a \cdot x);$
- g) $f_8(x) = x \cdot \cos(a \cdot x);$
- h) $f_9(x) = e^{ax} \cdot \sin(b \cdot x);$
- i) $f_9(x) = e^{ax} \cdot \cos(b \cdot x);$
- j) $f_{10}(x) = \operatorname{sh}(a \cdot x);$
- k) $f_{11}(x) = \operatorname{ch}(a \cdot x).$

Rješenje: Koristit ćemo rezultate prethodnih zadataka.

- a) Koristeći linearost Laplaceove transformacije i rezultat zadatka 10. a) odmah dobivamo:

$$\mathcal{L}\{a\}(s) = \mathcal{L}\{a \cdot 1\}(s) = a \cdot \mathcal{L}\{1\}(s) = a \cdot \frac{1}{s} = \frac{a}{s}.$$

- b) U formulu iz teorema 4. (teorem o prigušenju) uvrstimo $\alpha = a$, $f(x) = 1$, pa primijenimo rezultat zadatka 10. a) prema kojemu je $F(s) = \mathcal{L}\{1\}(s) = \frac{1}{s}$. Dobivamo:

$$\mathcal{L}\{e^{ax} \cdot 1\}(s) = F(s-a) = \frac{1}{s-a}.$$

(U pravilu funkcije F umjesto s pišemo $s-a$.)

- c) U formulu iz teorema 4. (teorem o prigušenju) uvrstimo $\alpha = a$, $f(x) = x^n$, pa primijenimo rezultat zadatka 11. c) prema kojemu je $F(s) = \mathcal{L}\{x^n\}(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$. Dobivamo:

$$\mathcal{L}\{x^n \cdot e^{ax}\}(s) = \mathcal{L}\{x^n \cdot e^{ax}\}(s) = F(s-a) = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}.$$

(U pravilu funkcije F umjesto s pišemo $s-a$.)

- d) U rezultat zadatka 5. (teorem o sličnosti) uvrstimo $f(x) = \sin x$. Primjenimo rezultat zadatka 10. c) prema kojemu je $\mathcal{L}\{f\}(s) = F(s) = \frac{1}{s^2 + 1}$. Tako dobivamo:

$$\mathcal{L}\{\sin(ax)\}(s) = \frac{1}{a} \cdot F\left(\frac{s}{a}\right) = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{\left(\frac{s}{a}\right)^2 + 1} = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{\frac{s^2}{a^2} + 1} = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{\frac{s^2 + a^2}{a^2}} = \frac{1}{a} \cdot \frac{a^2}{s^2 + a^2} = \frac{a}{s^2 + a^2}.$$

| | | |
|---|---|---|
|  TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU POLYTECHNICUM ZAGREBIENSE Elektrotehnički odjel | Matematika 2 (preddiplomski stručni studij elektrotehnike) | 3.5. Laplaceova transformacija – riješeni zadaci |
|---|---|---|

- e) U rezultat zadatka 5. (teorem o sličnosti) uvrstimo $f(x) = \cos x$. Primijenimo rezultat zadatka 11. d) prema kojemu je $\mathcal{L}\{f\}(s) = F(s) = \frac{s}{s^2 + 1}$. Tako dobivamo:

$$\mathcal{L}\{\cos(a \cdot x)\}(s) = \frac{1}{a} \cdot F\left(\frac{s}{a}\right) = \frac{1}{a} \cdot \frac{\frac{s}{a}}{\left(\frac{s}{a}\right)^2 + 1} = \frac{1}{a} \cdot \frac{\frac{s}{a}}{\frac{s^2}{a^2} + 1} = \frac{1}{a} \cdot \frac{\frac{s}{a}}{\frac{s^2 + a^2}{a^2}} = \frac{1}{a} \cdot \frac{a^2 \cdot \frac{s}{a}}{s^2 + a^2} = \frac{1}{a} \cdot \frac{a \cdot s}{s^2 + a^2} = \frac{s}{s^2 + a^2}.$$

- f) Primijenimo rezultat zadatka 9. (teorem o množenju) na funkciju $f(x) = \sin(a \cdot x)$. Koristimo i rezultat e) podzadatka prema kojemu je $\mathcal{L}\{f\}(s) = F(s) = \frac{a}{s^2 + a^2}$. Imamo:

$$\mathcal{L}\{x \cdot \sin(a \cdot x)\}(s) = -F'(s) = -\left(-\frac{a}{s^2 + a^2}\right)' = -\frac{0 - a \cdot (2 \cdot s + 0)}{(s^2 + a^2)^2} = \frac{2 \cdot a \cdot s}{(s^2 + a^2)^2}.$$

- g) Primijenimo rezultat zadatka 9. (teorem o množenju) na funkciju $f(x) = \cos(a \cdot x)$. Koristimo i rezultat f) podzadatka prema kojemu je $\mathcal{L}\{f\}(s) = F(s) = \frac{s}{s^2 + a^2}$. Imamo:

$$\mathcal{L}\{x \cdot \cos(a \cdot x)\}(s) = -F'(s) = -\left(-\frac{s}{s^2 + a^2}\right)' = -\frac{1 \cdot (s^2 + a^2) - s \cdot (2 \cdot s + 0)}{(s^2 + a^2)^2} = -\frac{a^2 - s^2}{(s^2 + a^2)^2} = \frac{s^2 - a^2}{(s^2 + a^2)^2}.$$

- h) Primijenimo rezultat zadatka 4. (teorem o prigušenju) na funkciju $f(x) = \sin(b \cdot x)$. Koristimo i rezultat e) podzadatka prema kojemu je $\mathcal{L}\{f\}(s) = F(s) = \frac{b}{s^2 + b^2}$.

Imamo:

$$\mathcal{L}\{e^{ax} \cdot \sin(b \cdot x)\}(s) = F(s-a) = \frac{b}{(s-a)^2 + b^2}.$$

(U pravilu funkcije F umjesto s pišemo $s-a$.)

- i) Primijenimo rezultat zadatka 9. (teorem o množenju) na funkciju $f(x) = \cos(b \cdot x)$. Koristimo i rezultat f) podzadatka prema kojemu je $\mathcal{L}\{f\}(s) = F(s) = \frac{s}{s^2 + b^2}$. Imamo:

$$\mathcal{L}\{e^{ax} \cdot \cos(b \cdot x)\}(s) = F(s-a) = \frac{s-a}{(s-a)^2 + b^2}.$$

| | | |
|---|---|---|
|  TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU POLYTECHNICUM ZAGREBIENSE Elektrotehnički odjel | Matematika 2 (preddiplomski stručni studij elektrotehnike) | 3.5. Laplaceova transformacija – riješeni zadaci |
|---|---|---|

- j) U rezultat zadatka 5. (teorem o sličnosti) uvrstimo $f(x) = \operatorname{sh} x$. Primijenimo rezultat zadatka 11. k) prema kojemu je $\mathcal{L}\{f\}(s) = F(s) = \frac{1}{s^2 - 1}$. Tako dobivamo:

$$\mathcal{L}\{\operatorname{sh}(a \cdot x)\}(s) = \frac{1}{a} \cdot F\left(\frac{s}{a}\right) = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{\left(\frac{s}{a}\right)^2 - 1} = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{\frac{s^2}{a^2} - 1} = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{\frac{s^2 - a^2}{a^2}} = \frac{1}{a} \cdot \frac{a^2}{s^2 - a^2} = \frac{a}{s^2 - a^2}.$$

- k) U rezultat zadatka 5. (teorem o sličnosti) uvrstimo $f(x) = \operatorname{ch} x$. Primijenimo rezultat zadatka 11. k) prema kojemu je $\mathcal{L}\{f\}(s) = F(s) = \frac{s}{s^2 - 1}$. Tako dobivamo:

$$\mathcal{L}\{\operatorname{ch}(a \cdot x)\}(s) = \frac{1}{a} \cdot F\left(\frac{s}{a}\right) = \frac{1}{a} \cdot \frac{\frac{s}{a}}{\left(\frac{s}{a}\right)^2 - 1} = \frac{1}{a} \cdot \frac{\frac{s}{a}}{\frac{s^2}{a^2} - 1} = \frac{1}{a} \cdot \frac{\frac{s}{a}}{\frac{s^2 - a^2}{a^2}} = \frac{1}{a} \cdot \frac{a^2 \cdot \frac{s}{a}}{s^2 - a^2} = \frac{s}{s^2 - a^2}.$$

Napomena: U prethodnim zadacima izveli smo sve osnovne Laplaceove transformate iz tablice tih transformata. Ranije dokazani teoremi omogućili su nam da ni u jednom od tih izvoda nismo morali određivati neprave integrale.

Zadatak 13. Odredite Laplaceov transformat svake od sljedećih realnih funkcija (u c) i d) podzadatku nije potrebno svoditi pribrojnice na zajednički nazivnik):

- a) $f(x) = 2020 \cdot (1 + x + e^{-x})$;
- b) $g(t) = t^3 + e^{2t} \cdot (\cos t - \sin t)$;
- c) $h(y) = y \cdot \sin y - e^y \cdot (\cos(2 \cdot y) - \sin(4 \cdot y))$;
- d) $p(w) = \operatorname{ch}(3 \cdot w) - \operatorname{sh}(2 \cdot w)$.

Rješenje: U svim zadacima primijenit ćemo rezultat zadatka 2., tj. svojstvo linearnosti Laplaceove transformacije. Pri rješavanju zadataka koristite tablicu Laplaceovih transformata iz *Repetitorija matematike za studente elektrotehnike*, str. 61.

$$\begin{aligned} \mathbf{a)} \quad F(s) &= \mathcal{L}\{f\}(s) = \mathcal{L}\{2020 \cdot (1 + x + e^{-x})\}(s) = 2020 \cdot \mathcal{L}\{1 + x + e^{-x}\}(s) = \\ &= 2020 \cdot (\mathcal{L}\{1\}(s) + \mathcal{L}\{x\}(s) + \mathcal{L}\{e^{-x}\}(s)) = 2020 \cdot \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s-1}\right) = \\ &= 2020 \cdot \left(\frac{s \cdot (s-1) + (s-1) + s^2}{s^2 \cdot (s-1)}\right) = \frac{2020 \cdot (2 \cdot s^2 - 1)}{s^3 - s^2}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{b)} \quad G(s) &= \mathcal{L}\{g\}(s) = \mathcal{L}\{t^3 + e^{2t} \cdot (\cos t - \sin t)\}(s) = \mathcal{L}\{t^3 + e^{2t} \cdot \cos t - e^{2t} \cdot \sin t\}(s) = \mathcal{L}\{t^3\}(s) + \\ &+ \mathcal{L}\{e^{2t} \cdot \cos t\}(s) - \mathcal{L}\{e^{2t} \cdot \sin t\}(s) = \frac{3!}{s^{3+1}} + \frac{s-2}{(s-2)^2 + 1} - \frac{1}{(s-2)^2 + 1} = \frac{6}{s^4} + \frac{s-3}{s^2 - 4 \cdot s + 5} = \end{aligned}$$

$$= \frac{s^5 - 3 \cdot s^4 + 6 \cdot s^2 - 24 \cdot s + 30}{s^6 - 4 \cdot s^5 + 5 \cdot s^4};$$

c) $F(s) = \mathcal{L}\{h\}(s) = \mathcal{L}\{y \cdot \sin y - e^y \cdot (\cos(2 \cdot y) - \sin(2 \cdot y))\}(s) =$
 $= \mathcal{L}\{y \cdot \sin y - e^y \cdot \cos(2 \cdot y) + e^y \cdot \sin(2 \cdot y)\}(s) = \mathcal{L}\{y \cdot \sin y\}(s) - \mathcal{L}\{e^y \cdot \cos(2 \cdot y)\}(s) + \mathcal{L}\{e^y \cdot \sin(2 \cdot y)\}(s) =$
 $= \frac{2 \cdot s}{(s^2 + 1)^2} - \frac{s - 1}{(s - 1)^2 + 2^2} + \frac{2}{(s - 1)^2 + 2^2} = \frac{2 \cdot s}{(s^2 + 1)^2} - \frac{s - 3}{(s - 1)^2 + 4};$

d) $F(s) = \mathcal{L}\{p\}(s) = \mathcal{L}\{\operatorname{ch}(3 \cdot w) - \operatorname{sh}(2 \cdot w)\}(s) = \mathcal{L}\{\operatorname{ch}(3 \cdot w)\}(s) - \mathcal{L}\{\operatorname{sh}(2 \cdot w)\}(s) = \frac{s}{s^2 - 9} - \frac{2}{s^2 - 4}.$

Zadatak 14. Odredite Laplaceov transformat realne funkcije $f : [0, +\infty)$ definirane pravilom:

a) $H_c(t) = \begin{cases} 0, & \text{za } t < c, \\ 1, & \text{za } t \geq c, \end{cases}$ pri čemu je $c \geq 0$ proizvoljan, ali fiksiran;

b) $f(t) = \begin{cases} 1, & \text{za } 0 \leq t \leq 1, \\ t, & \text{inače.} \end{cases}$

Rješenje: Traženi transformat u oba slučaja odredit ćemo izravno iz definicije Laplaceova transformata. Pritom ćemo koristiti i definiciju nepravoga integrala tipa $\int_0^{+\infty}$.

a) Prema definiciji Laplaceova transformata je:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{H_c\}(s) &= \int_0^{+\infty} H_c(t) \cdot e^{-st} \cdot dt = \int_0^c H_c(t) \cdot e^{-st} \cdot dt + \int_c^{+\infty} H_c(t) \cdot e^{-st} \cdot dt = \\ &= \int_0^c 0 \cdot e^{-st} \cdot dt + \int_c^{+\infty} 1 \cdot e^{-st} \cdot dt = 0 + \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\int_c^b e^{-st} \cdot dt \right) = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\left(-\frac{1}{s} \cdot e^{-st} \right) \Big|_c^b \right) = \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{s} \cdot e^{-sb} - \left(-\frac{1}{s} \cdot e^{-sc} \right) \right) = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{s} \cdot \underbrace{e^{-sb}}_{\rightarrow 0} + \frac{1}{s} \cdot e^{-sc} \right) = 0 + \frac{1}{s} \cdot e^{-sc} = \frac{e^{-sc}}{s}. \end{aligned}$$

Kako vidimo, nismo dobili pravu racionalnu funkciju. To smo mogli i očekivati jer je polazna funkcija bila po dijelovima zadana.

b) Ponovno prema definiciji Laplaceova transformata dobivamo:

$$F(s) = \int_0^{+\infty} f(t) \cdot e^{-st} \cdot dt = \int_0^1 f(t) \cdot e^{-st} \cdot dt + \int_1^{+\infty} f(t) \cdot e^{-st} \cdot dt = \int_0^1 1 \cdot e^{-st} \cdot dt + \int_1^{+\infty} t \cdot e^{-st} \cdot dt.$$

| | | |
|---|---|---|
|  TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU POLYTECHNICUM ZAGREBIENSE Elektrotehnički odjel | Matematika 2 (preddiplomski stručni studij elektrotehnike) | 3.5. Laplaceova transformacija – riješeni zadaci |
|---|---|---|

Tu ćemo postupiti lukavo. Uvijek je lakše računati neki *određeni* integral (s „konkretnim“ granicama), negoli nepravi. Zbog toga ćemo drugi pribrojnik transformirati ovako:

$$\int_1^{+\infty} t \cdot e^{-s \cdot t} \cdot dt = \int_0^{+\infty} t \cdot e^{-s \cdot t} \cdot dt - \int_0^1 t \cdot e^{-s \cdot t} \cdot dt.$$

Umanjenik je jednak Laplaceovom transformatu funkcije $f_1(t) = t$. Znamo da je taj transformat jednak $\frac{1}{s^2}$. Korištenjem osnovnih svojstava određenoga integrala slijedi:

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^1 1 \cdot e^{-s \cdot t} \cdot dt + \int_1^{+\infty} t \cdot e^{-s \cdot t} \cdot dt = \int_0^1 1 \cdot e^{-s \cdot t} \cdot dt + \int_0^{+\infty} t \cdot e^{-s \cdot t} \cdot dt - \int_0^1 t \cdot e^{-s \cdot t} \cdot dt = \int_0^1 1 \cdot e^{-s \cdot t} \cdot dt + \\ &+ \frac{1}{s^2} - \int_0^1 t \cdot e^{-s \cdot t} \cdot dt = \frac{1}{s^2} + \int_0^1 (1-t) \cdot e^{-s \cdot t} \cdot dt. \end{aligned}$$

Preostaje odrediti određeni integral. **Poseban oprez:** njegova vrijednost neće biti realan broj, nego *funkcija varijable s*. Razlog je očit: pod integralom se nalazi član $e^{-s \cdot t}$ koji integriranjem neće nestati, nego će dati neki izraz koji sadrži s .

Navedeni integral određujemo metodom djelomične integracije. Prvi faktor pod integralom deriviramo, a drugi faktor integriramo. Imamo redom:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 (1-t) \cdot e^{-s \cdot t} \cdot dt = \left| \begin{array}{l} u = 1-t \quad v = \int e^{-s \cdot t} \cdot dt = -\frac{1}{s} \cdot e^{-s \cdot t} \\ du = -dt \quad dv = e^{-s \cdot t} \cdot dt \end{array} \right| = \\ &= \left. \left((1-t) \cdot \left(-\frac{1}{s} \cdot e^{-s \cdot t} \right) \right) \right|_0^1 - \int_0^1 -\frac{1}{s} \cdot e^{-s \cdot t} \cdot (-dt) = \left(\underbrace{(1-1)}_{=0} \cdot \left(-\frac{1}{s} \cdot e^{-s \cdot 1} \right) - \underbrace{(1-0)}_{=1} \cdot \left(-\frac{1}{s} \cdot e^{-s \cdot 0} \right) \right) + \\ &+ \left. \left(-\frac{1}{s} \right) \cdot \int e^{-s \cdot t} \cdot dt = 0 + \frac{1}{s} - \frac{1}{s} \cdot \left(-\frac{1}{s} \cdot e^{-s \cdot t} \right) \right|_0^1 = \frac{1}{s} - \frac{1}{s} \cdot \left(-\frac{1}{s} \cdot e^{-s \cdot 1} - \left(-\frac{1}{s} \cdot e^{-s \cdot 0} \right) \right) = \\ &= \frac{1}{s} - \frac{1}{s} \cdot \left(-\frac{1}{s} \cdot e^{-s} + \frac{1}{s} \right) = \frac{1}{s} + \left(-\frac{1}{s} \right) \cdot \left(-\frac{1}{s} \right) (e^{-s} - 1) = \frac{1}{s} + \frac{e^{-s} - 1}{s^2} = \frac{s + e^{-s} - 1}{s^2}. \end{aligned}$$

Tako konačno dobivamo:

$$F(s) = \frac{1}{s^2} + I = \frac{1}{s^2} + \frac{s + e^{-s} - 1}{s^2} = \frac{s + e^{-s}}{s^2}.$$

Napomena: Funkcija H_C iz a) podzadatka naziva se *Heavisideova step-funkcija* i ima važnu primjenu u teoriji signala.

| | | |
|---|---|---|
|  TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU POLYTECHNICUM ZAGREBIENSE Elektrotehnički odjel | Matematika 2 (preddiplomski stručni studij elektrotehnike) | 3.5. Laplaceova transformacija – riješeni zadaci |
|---|---|---|

Zadatak 15. Odredite original svakoga od sljedećih Laplaceovih transformata (prepostavite da je original funkcija $f = f(x)$):

a) $F(s) = \frac{s^3 + s^2 - 2 \cdot s + 6}{s^4};$

b) $F(s) = \frac{10 \cdot s}{s^4 + 50 \cdot s^2 + 625};$

c) $F(s) = \frac{s - 2}{s^2 - 2 \cdot s + 2};$

d) $F(s) = \frac{2 \cdot (s - 2)}{s^3 - s};$

e) $F(s) = \frac{4 \cdot (3 - s)}{s^2 - 4};$

f) $F(s) = \frac{s^3 - 4 \cdot s^2 - 8}{s^4 + 4 \cdot s^2}.$

Rješenje: Prilikom rješavanja zadataka ovoga tipa *obavezno* treba koristiti tablicu Laplaceovih transformata. Analogno kao i kod integrala, riješit ćemo neke osnovne tipove i ukazati na osnovne metode rješavanja. Najvažnija od njih je *rastav* (prave) *racionalne funkcije na parcijalne razlomke*. Detaljno smo ga obradili na *Matematici 1* (ponovite odgovarajuće gradivo!), a koristili smo ga i na *Matematici 2* prilikom određivanja integrala racionalnih funkcija. Zbog toga ćemo izostaviti teorijska pojašnjenja i komentirat ćemo isključivo provedene postupke rješavanja.

Inverz Laplaceove transformacije standardno označavamo s \mathcal{L}^{-1} .

a) Podijelimo svaki član brojnika nazivnikom i skratimo svaki razlomak što je više moguće. Dobivamo:

$$F(s) = \frac{s^3}{s^4} + \frac{s^2}{s^4} - \frac{2 \cdot s}{s^4} + \frac{6}{s^4} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} - \frac{2}{s^3} + \frac{6}{s^4}.$$

Iz tablice Laplaceovih transformata „očitamo“ pripadne originale:

$$\begin{aligned} \frac{1}{s} &\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} 1, \\ \frac{1}{s^2} &\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} x, \\ \frac{2}{s^3} &\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} x^2, \\ \frac{6}{s^4} &= \frac{3!}{s^{3+1}} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} x^3. \end{aligned}$$

| | | |
|---|---|---|
|  TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU POLYTECHNICUM ZAGREBIENSE Elektrotehnički odjel | Matematika 2 (preddiplomski stručni studij elektrotehnike) | 3.5. Laplaceova transformacija – riješeni zadaci |
|---|---|---|

Dakle, rješenje podzadatka je funkcija $f(x) = x^3 - x^2 + x + 1$.

b) Uočimo da vrijedi jednakost:

$$F(s) = \frac{10 \cdot s}{s^4 + 50 \cdot s^2 + 625} = \frac{10 \cdot s}{(s^2 + 25)^2} = \frac{10 \cdot s}{(s^2 + 5^2)^2} = \frac{2 \cdot 5 \cdot s}{(s^2 + 5^2)^2}.$$

Koristeći jednakost $\mathcal{L}\{x \cdot \sin(a \cdot x)\}(s) = \frac{2 \cdot a \cdot s}{(s^2 + a^2)^2}$ u koju uvrstimo $a = 5$, dobivamo:

$$F(s) = \frac{2 \cdot 5 \cdot s}{(s^2 + 5^2)^2} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} x \cdot \sin(5 \cdot x).$$

Dakle, rješenje podzadatka je funkcija $f(x) = x \cdot \sin(5 \cdot x)$.

c) Uočimo da vrijedi jednakost: $s^2 - 2 \cdot s + 2 = (s - 1)^2 + 1$. U brojniku racionalne funkcije nalazi se varijabla s , pa ćemo taj brojnik rastaviti u dva pribrojnika. Prvi pribrojnik će biti izraz u okrugloj zagradi u nazivniku. Drugi pribrojnik će biti konstanta. Dobivamo:

$$F(s) = \frac{(s-1) + (-1)}{(s-1)^2 + 1} = \frac{s-1}{(s-1)^2 + 1^2} - \frac{1}{(s-1)^2 + 1^2}.$$

Sada u svaku od jednakosti $\mathcal{L}\{e^{ax} \cdot \cos(b \cdot x)\}(s) = \frac{s-a}{(s-a)^2 + b^2}$ i $\mathcal{L}\{e^{ax} \cdot \sin(b \cdot x)\}(s) = \frac{b}{(s-a)^2 + b^2}$ uvrstimo $a = b = 1$. Dobijemo:

$$\begin{aligned} \frac{s-1}{(s-1)^2 + 1^2} &\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} e^{1 \cdot x} \cdot \cos(1 \cdot x) = e^x \cdot \cos x, \\ \frac{1}{(s-1)^2 + 1^2} &\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} e^{1 \cdot x} \cdot \sin(1 \cdot x) = e^x \cdot \sin x. \end{aligned}$$

Dakle, rješenje zadatka je funkcija $f(x) = e^x \cdot \cos x - e^x \cdot \sin x = e^x \cdot (\cos x - \sin x)$.

d) U ovome je zadatku nazivnik polinom stupnja 3 u varijabli s . On očito nije kub nijednoga polinoma 1. stupnja. Zbog toga funkciju F moramo rastaviti na parcijalne razlomke. Uočimo da vrijedi identitet:

$$s^3 - s = s \cdot (s^2 - 1) = s \cdot (s-1) \cdot (s+1).$$

Zbog toga će rastav funkcije F na parcijalne razlomke sadržavati ukupno tri pribrojnika. Njihovi će nazivnici biti redom s , $s - 1$ i $s + 1$. U brojniku svakoga

| | | |
|---|---|---|
|  TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU POLYTECHNICUM ZAGREBIENSE Elektrotehnički odjel | Matematika 2 (preddiplomski stručni studij elektrotehnike) | 3.5. Laplaceova transformacija – riješeni zadaci |
|---|---|---|

parcijalnoga razlomka mora se nalaziti polinom čiji je stupanj za jedan manji od stupnja baze u nazivniku. U ovom slučaju baze su već spomenuti polinomi s , $s - 1$ i $s + 1$. Svaki od njih je polinom 1. stupnja, pa u brojniku svakoga razlomka mora biti polinom stupnja $1 - 1 = 0$, tj. konstanta.

Dakle, tražimo konstante $A, B, C \in \mathbb{R}$ takve da vrijedi jednakost:

$$\frac{2 \cdot (s-2)}{s^3-s} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-1} + \frac{C}{s+1}.$$

Pomnožimo tu jednakost sa $s^3 - s$. Pritom na desnoj strani jednakosti samo naznačimo koga ili što množi A , koga ili što množi B , te koga ili što množi C . (Ne provodimo množenje i pojednostavljinje izraza.) Dobivamo:

$$2 \cdot (s-2) = A \cdot (s-1) \cdot (s+1) + B \cdot s \cdot (s+1) + C \cdot s \cdot (s-1).$$

Ovaj izraz predstavlja jednakost polinoma. Zbog toga on mora vrijediti za svaki $s \in \mathbb{R}$. Posebno, on mora vrijediti i za realna rješenja jednadžbe $s^3 - s = 0$, odnosno jednadžbe $s \cdot (s-1) \cdot (s+1) = 0$. Ta rješenja su $s_1 = 0$, $s_2 = 1$, $s_3 = -1$.

Kad u jednakost

$$2 \cdot (s-2) = A \cdot (s-1) \cdot (s+1) + B \cdot s \cdot (s+1) + C \cdot s \cdot (s-1)$$

uvrstimo $s = 0$, svi pribrojnici koji sadrže faktor s postaju jednakci nuli. Takvi pribrojnici su drugi i treći član na desnoj strani jednakosti. Dakle, „preživi“ samo prvi pribrojnik na desnoj strani jednakosti:

$$2 \cdot (0-2) = A \cdot (0-1) \cdot (0+1) \Leftrightarrow -4 = -A \Leftrightarrow A = 4.$$

Kad u jednakost

$$2 \cdot (s-2) = A \cdot (s-1) \cdot (s+1) + B \cdot s \cdot (s+1) + C \cdot s \cdot (s-1)$$

uvrstimo $s = 1$, svi pribrojnici koji sadrže faktor $s - 1$ postaju jednakci nuli. Takvi pribrojnici su prvi i treći član na desnoj strani jednakosti. Dakle, „preživi“ samo drugi pribrojnik na desnoj strani jednakosti:

$$2 \cdot (1-2) = B \cdot 1 \cdot (1+1) \Leftrightarrow -2 = 2 \cdot B \Leftrightarrow B = -1.$$

Kad u jednakost

$$2 \cdot (s-2) = A \cdot (s-1) \cdot (s+1) + B \cdot s \cdot (s+1) + C \cdot s \cdot (s-1)$$

| | | |
|---|---|---|
|  TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU POLYTECHNICUM ZAGREBIENSE Elektrotehnički odjel | Matematika 2 (preddiplomski stručni studij elektrotehnike) | 3.5. Laplaceova transformacija – riješeni zadaci |
|---|---|---|

uvrstimo $s = -1$, svi pribrojnici koji sadrže faktor $s + 1$ postaju jednaki nuli. Takvi pribrojnici su prvi i drugi član na desnoj strani jednakosti. Dakle, „preživi“ samo treći pribrojnik na desnoj strani:

$$2 \cdot (-1 - 2) = C \cdot (-1) \cdot (-1 - 1) \Leftrightarrow -6 = 2 \cdot C \Leftrightarrow C = -3.$$

Dakle, $(A, B, C) = (4, -1, -3)$, pa traženi rastav glasi:

$$\frac{2 \cdot (s - 2)}{s^3 - s} = \frac{4}{s} + \frac{-1}{s - 1} + \frac{-3}{s + 1} = \frac{4}{s} - \frac{1}{s - 1} - 3 \cdot \frac{1}{s + 1}.$$

Iz tablice Laplaceovih transformata „očitamo“:

$$\begin{aligned} \frac{4}{s} &\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} 4, \\ \frac{1}{s-1} &\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} e^x, \\ \frac{1}{s+1} &\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} e^{-x}. \end{aligned}$$

Dakle, rješenje zadatka je funkcija $f(x) = 4 - e^x - 3 \cdot e^{-x}$.

- e) Vrijedi jednakost: $s^2 - 4 = (s - 2) \cdot (s + 2)$. Zbog toga će rastav zadane funkcije na parcijalne razlomke imati točno dva pribrojnika. Njihovi nazivnici bit će polinomi $s - 2$ i $s + 2$. Ti polinomi su 1. stupnja, pa će brojnici pribrojnika biti polinomi stupnja $1 - 1 = 0$, tj. konstante.

Dakle, tražimo rastav oblika:

$$\frac{4 \cdot (3 - s)}{s^2 - 4} = \frac{A}{s - 2} + \frac{B}{s + 2}.$$

Množenjem te jednakosti sa $(s - 2) \cdot (s + 2)$ dobivamo:

$$4 \cdot (3 - s) = A \cdot (s + 2) + B \cdot (s - 2).$$

Realna rješenja jednadžbe $s^2 - 4 = 0$ su $s_1 = -2$ i $s_2 = 2$.

Kad u jednakost

$$4 \cdot (3 - s) = A \cdot (s + 2) + B \cdot (s - 2).$$

uvrstimo $s = -2$, pribrojnik koji sadrže faktor $s + 2$ postaje jednak nuli. Takav je prvi pribrojnik na desnoj strani jednakosti. Dakle, „preživi“ samo drugi pribrojnik

na desnoj strani jednakosti:

$$4 \cdot (3 - (-2)) = B \cdot (-2 - 2) \Leftrightarrow 20 = -4 \cdot B \Leftrightarrow B = -5.$$

Kad u jednakost

$$4 \cdot (3 - s) = A \cdot (s + 2) + B \cdot (s - 2).$$

uvrstimo $s = 2$, pribrojnik koji sadrži faktor $s - 2$ postaje jednak nuli. Takav pribrojnik je drugi član na desnoj strani jednakosti. Dakle, „preživi“ samo prvi pribrojnik na desnoj strani jednakosti:

$$4 \cdot (3 - 2) = A \cdot (2 + 2) \Leftrightarrow 4 = 4 \cdot A \Leftrightarrow A = 1.$$

Dakle, $(A, B) = (1, -5)$, pa traženi rastav glasi:

$$\frac{4 \cdot (3 - s)}{s^2 - 4} = \frac{1}{s - 2} + \frac{-5}{s + 2} = \frac{1}{s - 2} - 5 \cdot \frac{1}{s + 2}.$$

Iz tablice Laplaceovih transformata „očitamo“:

$$\begin{aligned} \frac{1}{s - 2} &\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} e^{2x}, \\ \frac{1}{s + 2} &\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} e^{-2x}. \end{aligned}$$

Dakle, rješenje zadatka je funkcija $f(x) = e^{2x} - 5 \cdot e^{-2x}$.

- f) Uočimo da vrijedi jednakost $s^4 + 4 \cdot s^2 = s^2 \cdot (s^2 + 4)$. Zbog toga će rastav funkcije F na parcijalne razlomke imati ukupno tri pribrojnika. Njihovi nazivnici bit će s , s^2 i $s^2 + 4$.

U razlomku čiji je nazivnik s brojnik je – analogno kao u prethodnim podzadacima – konstanta. Označimo tu konstantu s A .

U razlomku čiji je nazivnik s^2 baza nazivnika je s . To je polinom 1. stupnja, pa je i u njegovom brojniku također konstanta. Označimo tu konstantu s B .

Naposljetku, razlomak s nazivnikom $s^2 + 4$ ima bazu nazivnika $s^2 + 4$, a to je polinom 2. stupnja. Zbog toga će njegov brojnik biti polinom stupnja $2 - 1 = 1$, tj. polinom 1. stupnja. On ima oblik $C \cdot s + D$, gdje su $C, D \in \mathbb{R}$.

Dakle, tražimo rastav oblika:

| | | |
|---|---|---|
|  TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU POLYTECHNICUM ZAGREBIENSE Elektrotehnički odjel | Matematika 2 (preddiplomski stručni studij elektrotehnike) | 3.5. Laplaceova transformacija – riješeni zadaci |
|---|---|---|

$$\frac{s^3 - 4 \cdot s^2 - 8}{s^4 + 4 \cdot s^2} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C \cdot s + D}{s^2 + 4}.$$

Pomnožimo tu jednakost sa $s^4 + 4 \cdot s^2$. Dobijemo:

$$s^3 - 4 \cdot s^2 - 8 = A \cdot s \cdot (s^2 + 4) + B \cdot (s^2 + 4) + (C \cdot s + D) \cdot s^2.$$

Jednadžba $s^4 + 4 \cdot s^2 = 0$ ima jedinstveno realno rješenje $s = 0$. Zbog toga u gornju jednakost uvrštavamo $s = 0$, $s = -1$, $s = 1$ i $s = 2$.

Uvrštavanjem $s = 0$ dobijemo jednadžbu $0^3 - 4 \cdot 0^2 - 8 = B \cdot (0^2 + 4) \Leftrightarrow -8 = 4 \cdot B \Leftrightarrow B = -2$.

Uvrštavanjem $s = -1$ dobijemo:

$$\begin{aligned} (-1)^3 - 4 \cdot (-1)^2 - 8 &= A \cdot (-1) \cdot ((-1)^2 + 4) + B \cdot ((-1)^2 + 4) + (C \cdot (-1) + D) \cdot (-1)^2, \\ -1 - 4 - 8 &= -5 \cdot A + 5 \cdot B - C + D, \\ -5 \cdot A + 5 \cdot B - C + D &= -13. \end{aligned}$$

Uvrštavanjem $s = 1$ dobijemo:

$$\begin{aligned} 1^3 - 4 \cdot 1^2 - 8 &= A \cdot 1 \cdot (1^2 + 4) + B \cdot (1^2 + 4) + (C \cdot 1 + D) \cdot 1^2, \\ 1 - 4 - 8 &= 5 \cdot A + 5 \cdot B + C + D, \\ 5 \cdot A + 5 \cdot B + C + D &= -11. \end{aligned}$$

Uvrštavanjem $s = 2$ dobijemo:

$$\begin{aligned} 2^3 - 4 \cdot 2^2 - 8 &= A \cdot 2 \cdot (2^2 + 4) + B \cdot (2^2 + 4) + (C \cdot 2 + D) \cdot 2^2, \\ 8 - 4 \cdot 4 - 8 &= 16 \cdot A + 8 \cdot B + 8 \cdot C + 4 \cdot D, \\ 16 \cdot A + 8 \cdot B + 8 \cdot C + 4 \cdot D &= -16, \quad /:4 \\ 4 \cdot A + 2 \cdot B + 2 \cdot C + D &= -4. \end{aligned}$$

Tako smo dobili sustav:

$$\begin{cases} B = -2, \\ -5 \cdot A + 5 \cdot B - C + D = -13, \\ 5 \cdot A + 5 \cdot B + C + D = -11, \\ 4 \cdot A + 2 \cdot B + 2 \cdot C + D = -4. \end{cases}$$

Njegovo je rješenje $(A, B, C, D) = (0, -2, 1, -2)$. Zbog toga traženi rastav glasi:

$$\frac{s^3 - 4 \cdot s^2 - 8}{s^4 + 4 \cdot s^2} = \frac{-2}{s^2} + \frac{1 \cdot s + (-2)}{s^2 + 4} = \frac{s - 2}{s^2 + 4} - \frac{2}{s^2}.$$

| | | |
|---|---|---|
|  TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU POLYTECHNICUM ZAGREBIENSE Elektrotehnički odjel | Matematika 2 (preddiplomski stručni studij elektrotehnike) | 3.5. Laplaceova transformacija – riješeni zadaci |
|---|---|---|

Preostaje odrediti inverz svakoga pribrojnika. Zapišimo ih još malo drugačije:

$$F(s) = \frac{s-2}{s^2+4} - \frac{2}{s^2} = \frac{s}{s^2+4} - \frac{2}{s^2+4} - 2 \cdot \frac{1}{s^2} = \frac{s}{s^2+2^2} - \frac{2}{s^2+2^2} - 2 \cdot \frac{1}{s^2}.$$

Iz tablice Laplaceovih transformata „očitamo“:

$$\begin{aligned} \frac{s}{s^2+2^2} &\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \cos(2 \cdot x), \\ \frac{2}{s^2+2^2} &\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \sin(2 \cdot x), \\ \frac{1}{s^2} &\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} x. \end{aligned}$$

Dakle, rješenje zadatka je funkcija $f(x) = \cos(2 \cdot x) - \sin(2 \cdot x) - 2 \cdot x$.

| | | |
|---|---|---|
|  TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU POLYTECHNICUM ZAGREBIENSE Elektrotehnički odjel | Matematika 2 (preddiplomski stručni studij elektrotehnike) | 3.5. Laplaceova transformacija – riješeni zadaci |
|---|---|---|

Domaća zadaća

1. Odredite Laplaceove transformate sljedećih funkcija uz prepostavku da je varijabla transformata s (pribrojниke nije potrebno svoditi na zajednički nazivnik):

a) $f(x) = 2 \cdot x^2 - \sin(2 \cdot x) + e^{-2 \cdot x};$

b) $g(t) = \frac{t}{2} \cdot \sin\left(\frac{t}{2}\right) - 4 \cdot t \cdot \cos(4 \cdot t);$

c) $h(y) = y^2 \cdot e^{2 \cdot y+1} + e^{2 \cdot y-1} \cdot \left(\sin(\pi \cdot y) - \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot y\right) \right).$

2. Odredite Laplaceove transformate sljedećih po dijelovima zadanih funkcija:

a) $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{za } x \in [0,1], \\ 1, & \text{za } x \in \langle 1,2 \rangle, \\ 2, & \text{za } x \geq 2. \end{cases}$

b) $g(t) = \begin{cases} 1, & \text{za } x \in [0,e], \\ x, & \text{za } x \in \langle e, \pi \rangle, \\ x^2, & \text{za } x \geq \pi. \end{cases}$

c) $h(t) = \begin{cases} \sin t, & \text{za } x \in [0, 2 \cdot \pi], \\ 1 - \cos t, & \text{za } x > 2 \cdot \pi. \end{cases}$

3. Odredite originale sljedećih Laplaceovih transformata (prepostavite da je varijabla originala t):

a) $F(s) = \frac{2 \cdot (-4 \cdot s^3 + 6 \cdot s^2 - 6 \cdot s + 3)}{s^4};$

b) $G(s) = \frac{s^2 + 3 \cdot s + 1}{s \cdot (s + 1)^2};$

c) $H(s) = \frac{s^3 + s^2 + s + 4}{s^4 + 5 \cdot s^2 + 4};$

d) $F_1(s) = \frac{s^2 - 8 \cdot s + 28}{(s - 2) \cdot (s^2 - 4 \cdot s + 20)};$

| | | |
|---|---|---|
|  TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU POLYTECHNICUM ZAGREBIENSE Elektrotehnički odjel | Matematika 2 (preddiplomski stručni studij elektrotehnike) | 3.5. Laplaceova transformacija – riješeni zadaci |
|---|---|---|

Rezultati zadataka za domaću zadaću

1. a) $F(s) = \frac{4}{p^3} - \frac{2}{p^2 + 4} + \frac{1}{p + 2};$

b) $G(s) = \frac{8 \cdot s}{(4 \cdot s^2 + 1)^2} - 4 \cdot \frac{s^2 - 16}{(s^2 + 16)^2};$

c) $H(s) = \frac{2 \cdot e}{(s - 2)^3} + \frac{\pi}{e} \cdot \frac{1}{(s - 2)^2 + \pi^2} - \frac{1}{e} \cdot \frac{s - 2}{\left((s - 2)^2 + \frac{\pi^2}{4} \right)}.$

2. a) $F(s) = \frac{e^{-s} + e^{-2s}}{s};$

b) $G(s) = \left(\frac{2}{s^3} + \frac{2 \cdot \pi}{s^2} + \frac{\pi^2}{s} \right) \cdot e^{-\pi \cdot s} + \frac{e^{-e \cdot s} \cdot (e \cdot s + 1) - e^{-\pi \cdot s} \cdot (\pi \cdot s + 1)}{s^2} + \frac{1 - e^{-e \cdot s}}{s};$

c) $H(s) = \frac{e^{-2 \cdot \pi \cdot s} - s \cdot e^{-2 \cdot \pi \cdot s} + s}{s^3 + s}.$

3. a) $f(t) = (t - 2)^3;$

b) $g(t) = t \cdot e^{-t} + 1;$

c) $h(t) = \cos(2 \cdot t) + \sin t;$

d) $f_1(t) = e^{2t} \cdot (1 - \sin(4 \cdot t)).$