U ovoj ćemo točki na nizu detaljno riješenih zadataka pokazati kako se Laplaceova transformacija može primijeniti na rješavanje Cauchyjevih problema u kojima se pojavljuje linearna obična diferencijalna jednadžba 2. reda s konstantnim koeficijentima. Ta jednadžba može biti homogena i nehomogena. Laplaceova transformacija primjenjiva je u oba slučaja, pri čemu je prvi slučaj (homogena jednadžba) bitno lakši od drugoga.

Osnovu za algoritam rješavanja predstavljaju zadaci 2., 6. i 7. iz točke 3.5. Ponovno proučite tekst i rješenje svakoga od tih zadataka kako biste razumjeli sam algoritam, a posebno *zašto* se početni uvjeti *moraju* zadati u točki 0. Često pitanje je upravo: „Može li se metoda primijeniti i ako je barem jedan od početnih uvjeta zadan u nekoj drugoj točki?“ Izvodi navedeni u rješenjima zadataka 6. i 7. iz točke 3.5. ukazuju da to nije moguće, pa ih zato trebate ponovno pročitati i *razumjeti*. Nadalje, postavlja se pitanje: „Mogu li se linearne obične diferencijalne jednadžbe 1. reda riješiti pomoću Laplaceove transformacije?“ Odgovor je: mogu, ako su u pitanju jednadžbe s konstantnim koeficijentima i ako desna strana jednadžbe ima svoj Laplaceov transformat. Međutim, ovdje se prirodno javlja protupitanje: zašto bismo pomoću Laplaceove transformacije rješavali obične diferencijalne jednadžbe za čija rješenja postoje gotove formule? Točno je da te formule sadrže integrale, ali nerijetko je značajno lakše odrediti standardnu derivaciju negoli Laplaceov transformat ili original Laplaceova transformata. Zbog toga preporučujemo da se linearne obične diferencijalne jednadžbe 1. reda rješavaju prema „gotovim“ formulama, a da se za rješavanje Cauchyjevih problema u kojima se pojavljuje linearna obična diferencijalna jednadžba 2. reda s konstantnim koeficijentima, ovisno o početnim uvjetima i funkciji smetnje, izabere jedna od triju metoda: metoda neodređenih koeficijenata obrađena u točki 3.4., metoda koja koristi Laplaceove transformate (koja će biti obrađena u nastavku teksta) i metoda varijacije konstanti (koja će biti obrađena u točki 3.7.).

**Dodatna napomena (za kolokvije i ispite):** Moguće je da u formulaciji nekoga zadatka piše: „Isključivo primjenom Laplaceove transformacije riješite…“. To znači da se za rješavanje dotičnoga zadatka mogu primijeniti i druge metode, ali da primjena neke od tih metoda donosi 0 (slovima: nula) bodova neovisno o ispravnosti konačnoga rezultata. Ako u formulaciji zadatka piše samo: „Riješite Cauchyjev problem: (…)“, onda imate pravo birati kojom metodom ćete ga riješiti. Takvi zadaci su obično zadaci sa „zamkom“ jer, ako je i moguće primijeniti barem dvije različite metode za njihovo rješavanje, onda je jedna od tih metoda bitno složenija u odnosu na drugu. Zbog toga preporučujemo poseban oprez pri izboru metode rješavanja.

Pokažimo najavljenu primjenu Laplaceove transformacije na rješavanje Cauchyjevih problema u kojima se pojavljuje linearna obična diferencijalna jednadžba 2. reda s konstantnim koeficijentima. Dobro proučite prezentaciju s predavanja, iskaze zadataka 2., 6. i 7. iz točke 3.5., pa potom prijeđite na rješavanje zadataka.

**Isključivo koristeći Laplaceovu transformaciju** riješite sljedeće Cauchyjeve probleme:

**Zadatak 1.** $\begin{cases} 3\cdot y'' + 2\cdot y' = 4\cdot x, \\ y(0) = 2, \\ y'(0) = -3. \end{cases}$

**Rješenje**: Kako je opisano na predavanjima, strategija rješavanja je sljedeća. „Napadamo" svaki član jednadžbe Laplaceovom transformacijom. Pritom koristimo rezultat zadatka 2. iz točke 3.5.: ako ispred nepoznanice ili njezine prve, odnosno druge derivacije piše neki koeficijent, taj koeficijent prepisujemo, a dotičnu derivaciju „napadamo" Laplaceovom transformacijom. Prepisujemo i znak jednakosti – na njega ne djeluje Laplaceova transformacija jer ona „napada" funkcije, a ne općenite relacije.

U ovom slučaju imamo:

$$\begin{aligned} &y'' \overset{\mathcal{L}}{\mapsto} s^2\cdot F(s) - s\cdot y(0) - y'(0) = s^2\cdot F(s) - s\cdot 2 - (-3) = s^2\cdot F(s) - 2\cdot s + 3, \\ &y' \overset{\mathcal{L}}{\mapsto} s\cdot F(s) - y(0) = s\cdot F(s) - 2, \\ &x \overset{\mathcal{L}}{\mapsto} \frac{1}{s^2}. \end{aligned}$$

Dakle, Laplaceovom transformacijom „napali" smo drugu derivaciju nepoznanice, prvu derivaciju nepoznanice i funkciju $x$ na desnoj strani jednadžbe. Koeficijente 3, 2 i 4 nismo „dirali" zbog zadatka 2. iz točke 3.5. Što sad napraviti? U zadanu običnu diferencijalnu jednadžbu umjesto druge derivacije nepoznanice uvrstimo njezin Laplaceov transformat, umjesto prve derivacije nepoznanice uvrstimo njezin Laplaceov transformat, a umjesto člana $x$ uvrstimo njegov Laplaceov transformat. Dobit ćemo:

$$3\cdot\left(s^2\cdot F(s) - 2\cdot s + 3\right) + 2\cdot\left(s\cdot F(s) - 2\right) = \frac{4}{s^2}.$$

Dobivena jednadžba je *algebarska jednadžba* sa nepoznanicom $F(s)$. Zbog toga nam je cilj izraziti tu nepoznanicu pomoću svih ostalih članova dobivene jednakosti. Taj posao nije odveć težak i trebao bi biti rutinski:

$$3\cdot s^2\cdot F(s) - 6\cdot s + 9 + 2\cdot s\cdot F(s) - 4 = \frac{4}{s^2},$$

$$3\cdot s^2\cdot F(s) + 2\cdot s\cdot F(s) = \frac{4}{s^2} + 6\cdot s - 9 + 4,$$

$$F(s)\cdot\left(3\cdot s^2+2\cdot s\right)=\frac{4}{s^2}+6\cdot s-5,$$

$$F(s)\cdot\left(3\cdot s^2+2\cdot s\right)=\frac{4+6\cdot s^3-5\cdot s^2}{s^2},$$

$$F(s)=\frac{6\cdot s^3-5\cdot s^2+4}{s^2\cdot\left(3\cdot s^2+2\cdot s\right)}.$$

Sve dosadašnje korake u ovom zadatku trebao bi moći ispravno napraviti svatko od vas. U njima nema nikakvih „trikova“, „zamki“ i podvala. Laplaceovi transformati nepoznanice i njezinih derivacija su određeni zadacima 6. i 7. iz točke 3.5., dok Laplaceov transformat „konkretne“ funkcije na desnoj strani obične diferencijalne jednadžbe treba odrediti koristeći tablice Laplaceovih transformata i, eventualno, rezultat zadatka 2. iz točke 3.5. Ako se ovaj dio posla provede na kolokviju ili pismenom ispitu, dobivaju se bodovi, što ponekad može biti bitno za „prolaz“ ili dobivanje veće ocjene.

Sad slijedi teži dio posla. Izraz u posljednjemu retku je Laplaceov transformat neke realne funkcije. Pitanje je: koje? U točki 3.5. vidjeli smo osnovne metode određivanja originala Laplaceova transformata. Čini se da bi ovdje prirodna metoda bila rastav Laplaceova transformata na parcijalne razlomke. To je načelno točno i zadatak se može tako nastaviti rješavati. Međutim, ta metoda je tehnički relativno spora jer daje sustav od pet linearnih jednadžbi s pet nepoznanica. Zbog toga ćemo se, po tko zna koji put, poslužiti lukavstvom.

Brojnik razlomka Laplaceova transformata očito nije djeljiv sa $s^2$ jer član 4 ne možemo dobiti množenjem $s^2$ nekim polinomom. Međutim, ako iz okrugle zagrade izlučimo *s*, dobit ćemo:

$$F(s)=\frac{6\cdot s^3-5\cdot s^2+4}{s^2\cdot s\cdot(3\cdot s+2)}=\frac{6\cdot s^3-5\cdot s^2+4}{s^3\cdot(3\cdot s+2)}$$

*Ne možemo* unaprijed znati je li brojnik posljednjega razlomka djeljiv sa $3\cdot s+2$. Dijeljenje polinoma je puno brže od rastava na parcijalne razlomke, pa podijelimo polinom $6\cdot s^3-5\cdot s^2+4$ polinomom $3\cdot s+2$. Dobijemo:

$$\begin{array}{l}
\left(6\cdot s^3-5\cdot s^2+4\right):(3\cdot s+2)=2\cdot s^2-3\cdot s+2\\
\underline{-\left(6\cdot s^3+4\cdot s^2\right)}\\
-9\cdot s^2+4\\
\underline{-\left(-9\cdot s^2-6\cdot s\right)}\\
6\cdot s+4\\
\underline{-(6\cdot s+4)}\\
0
\end{array}$$

Tako smo dobili:

$$\left(6\cdot s^3-5\cdot s^2+4\right)=(3\cdot s+2)\cdot\left(2\cdot s^2-3\cdot s+2\right),$$

pa je:

$$F(s)=\frac{6\cdot s^3-5\cdot s^2+4}{s^3\cdot(3\cdot s+2)}=\frac{(3\cdot s+2)\cdot\left(2\cdot s^2-3\cdot s+2\right)}{s^3\cdot(3\cdot s+2)}=\frac{2\cdot s^2-3\cdot s+2}{s^3}.$$

Zadatak možemo dovršiti i bez rastava na parcijalne razlomke. Svaki član brojnika podijelimo s nazivnikom i svaki razlomak skratimo „do kraja" (sjetite se, sigurno vrijedi nejednakost $s>0$, pa nema opasnosti dijeljenja nulom):

$$F(s)=\frac{2\cdot s^2-3\cdot s+2}{s^3}=\frac{2\cdot s^2}{s^3}-\frac{3\cdot s}{s^3}+\frac{2}{s^3}=\frac{2}{s}-\frac{3}{s^2}+\frac{2}{s^3}=\frac{2}{s}-3\cdot\frac{1}{s^2}+\frac{2}{s^3}.$$

Preostaje odrediti Laplaceov transformat svakoga pribrojnika. To je vrlo jednostavno učiniti koristeći tablice Laplaceovih transformata:

$$\begin{aligned}&F(s)\overset{\mathcal{L}^{-1}}{\mapsto}y,\\&\frac{2}{s}\overset{\mathcal{L}^{-1}}{\mapsto}2,\\&\frac{1}{s^2}\overset{\mathcal{L}^{-1}}{\mapsto}x,\\&\frac{2}{s^3}=\frac{2!}{s^{2+1}}\overset{\mathcal{L}^{-1}}{\mapsto}x^2.\end{aligned}$$

(Konstante ispred pribrojnika ponovno prepisujemo.) Tako konačno dobivamo:

$$y=2-3\cdot x+x^2=x^2-3\cdot x+2.$$

**Napomena**: Pažljiviji među vama uočit će da se na lijevoj strani izraza $F(s)\cdot\left(3\cdot s^2+2\cdot s\right)=\frac{4+6\cdot s^3-5\cdot s^2}{s^2}$ kao faktor pojavila lijeva strana karakteristične jednadžbe (s nepoznanicom $s$ umjesto $k$) pridružene pripadnoj homogenoj običnoj diferencijalnoj jednadžbi. To nije nimalo slučajno i uvijek će se događati u zadacima ovakvoga tipa. Dakle, kao pravilo možemo izreći da ćemo, nakon što odredimo sve Laplaceove transformate i uvrstimo ih u zadanu jednadžbu, dobiti izraz oblika

$$F(s)\cdot(\text{lijeva strana karakteristične jednadžbe})=\text{nešto}.$$

Nažalost, baš zbog ovoga „nešto" na desnoj strani, ne možemo skratiti postupak rješavanja tako da odmah napišemo gornju jednakost i od nje nastavimo rješavanje zadatka. Ta jednakost nam može korisno poslužiti za provjeru ispravnosti rada.

**Zadatak 2.** $\begin{cases} 2\cdot y'' - 5\cdot y' + 2\cdot y = 3\cdot e^{2\cdot t}, \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 1. \end{cases}$

**Rješenje**: Potpuno analogno kao u prethodnom zadatku dobivamo:

$$\begin{aligned}
&y'' \overset{\mathcal{L}}{\mapsto} s^2\cdot F(s) - s\cdot y(0) - y'(0) = s^2\cdot F(s) - s\cdot 0 - 1 = s^2\cdot F(s) - 1 \\
&y' \overset{\mathcal{L}}{\mapsto} s\cdot F(s) - y(0) = s\cdot F(s) - 0 = s\cdot F(s), \\
&y \overset{\mathcal{L}}{\mapsto} F(s) \\
&e^{2\cdot t} \overset{\mathcal{L}}{\mapsto} \frac{1}{s-2}.
\end{aligned}$$

Uvrštavanjem tih izraza u zadanu običnu diferencijalnu jednadžbu slijedi:

$$\begin{aligned}
&2\cdot\left(s^2\cdot F(s) - 1\right) - 5\cdot s\cdot F(s) + 2\cdot F(s) = 3\cdot\frac{1}{s-2}, \\
&2\cdot s^2\cdot F(s) - 2 - 5\cdot s\cdot F(s) + 2\cdot F(s) = 3\cdot\frac{1}{s-2}, \\
&2\cdot s^2\cdot F(s) - 5\cdot s\cdot F(s) + 2\cdot F(s) = 3\cdot\frac{1}{s-2} + 2, \\
&F(s)\cdot\left(2\cdot s^2 - 5\cdot s + 2\right) = \frac{3}{s-2} + 2, \\
&F(s)\cdot\left(2\cdot s^2 - 5\cdot s + 2\right) = \frac{3 + 2\cdot(s-2)}{s-2}, \\
&F(s)\cdot\left(2\cdot s^2 - 5\cdot s + 2\right) = \frac{2\cdot s - 1}{s-2}, \quad / : \left(2\cdot s^2 - 5\cdot s + 2\right) \\
&F(s) = \frac{2\cdot s - 1}{(s-2)\cdot\left(2\cdot s^2 - 5\cdot s + 2\right)}.
\end{aligned}$$

Sigurni smo da brojnik nije djeljiv ni s jednim od dvaju faktora u nazivniku. Također, sigurni smo da $s-2$ nije djeljiv sa $2\cdot s - 1$. Međutim, „odokativno“ ne možemo utvrditi je li $2\cdot s^2 - 5\cdot s + 2$ djeljiv sa $2\cdot s - 1$. Provedimo dijeljenje tih polinoma:

$$\begin{aligned}
&\left(2\cdot s^2 - 5\cdot s + 2\right) : (2\cdot s - 1) = s - 2 \\
&\underline{-\left(2\cdot s^2 - s\right)} \\
&-4\cdot s + 2 \\
&\underline{-(4\cdot s + 2)} \\
&0
\end{aligned}$$

Tako zaključujemo da vrijedi:

$$2\cdot s^2-5\cdot s+2=(2\cdot s-1)\cdot(s-2),$$

pa slijedi:

$$F(s)=\frac{2\cdot s-1}{(s-2)\cdot(2\cdot s-1)\cdot(s-2)}=\frac{1}{(s-2)(s-2)}=\frac{1}{(s-2)^2}.$$

Primjenom inverzne Laplaceove transformacije i korištenjem tablica Laplaceovih transformata odmah dobivamo:

$$\frac{1}{(s-2)^2}\overset{\mathcal{L}^{-1}}{\mapsto}t\cdot e^{2\cdot t}.$$

Prema tome, rješenje zadatka je funkcija $y=t\cdot e^{2\cdot t}$.

**Zadatak 3.** $\begin{cases} y''-y'-2\cdot y=2\cdot(1-3\cdot u)\cdot e^{-u}, \\ y(0)=y'(0)=0. \end{cases}$

**Rješenje**: Članove na lijevoj strani jednadžbe transformiramo na uobičajen način. Članove na desnoj strani jednadžbe moramo pomnožiti i riješiti se okrugle zagrade. Podsjetimo, Laplaceov transformat umnoška dviju funkcija **nije** jednak umnošku njihovih Laplaceovih transformata (jer integral umnoška dviju funkcija nije jednak umnošku integrala pojedinih faktora). Zbog toga moramo biti oprezni.

U skladu s ovom napomenom imamo redom:

$$\begin{aligned}
&y''\overset{\mathcal{L}}{\mapsto}s^2\cdot F(s)-s\cdot y(0)-y'(0)=s^2\cdot F(s)-s\cdot 0-0=s^2\cdot F(s),\\
&y'\overset{\mathcal{L}}{\mapsto}s\cdot F(s)-y(0)=s\cdot F(s)-0=s\cdot F(s),\\
&y\overset{\mathcal{L}}{\mapsto}F(s)\\
&e^{-u}\overset{\mathcal{L}}{\mapsto}\frac{1}{s+1},\\
&u\cdot e^{-u}\overset{\mathcal{L}}{\mapsto}\frac{1}{(s+1)^2}.
\end{aligned}$$

Uvrstimo ove transformate u polaznu običnu diferencijalnu jednadžbu:

$$\begin{aligned}
&s^2\cdot F(s)-s\cdot F(s)-2\cdot F(s)=2\cdot\frac{1}{s+1}-6\cdot\frac{1}{(s+1)^2},\\
&F(s)\cdot\left(s^2-s-2\right)=\frac{2}{s+1}-\frac{6}{(s+1)^2},
\end{aligned}$$

$$F(s)\cdot\left(s^2-s-2\right)=\frac{2\cdot(s+1)-6}{(s+1)^2},$$

$$F(s)\cdot\left(s^2-s-2\right)=\frac{2\cdot s-4}{(s+1)^2},$$

$$F(s)\cdot\left(s^2-s-2\right)=\frac{2\cdot(s-2)}{(s+1)^2},\quad /:\left(s^2-s-2\right)$$

$$F(s)=\frac{2\cdot(s-2)}{(s+1)^2\cdot\left(s^2-s-2\right)}.$$

Ovdje možemo ponovno primijeniti istu strategiju (dijeljenje polinoma) kao u rješenju prethodnoga zadatka, a možemo postupiti i brže.

Izraze $s-2$ i $(s+1)^2$ ne možemo rastaviti na jednostavnije faktore jer su oni već potencije polinoma 1. stupnja u varijabli *s*. Međutim, koristeći osnovni teorem algebre, izraz $s^2-s-2$ možemo rastaviti na umnožak dvaju polinoma 1. stupnja. Podsjetimo se kako smo to činili u srednjoj školi (a i u predmetu *Matematika* 1).

Odredimo sva rješenja jednadžbe $s^2-s-2=0$. Lako se dobiva $s_1=-1,\ s_2=2.$ Zbog toga vrijedi rastav:

$$s^2-s-2=(s-(-1))\cdot(s-2)=(s+1)\cdot(s-2).$$

Tako dalje slijedi:

$$F(s)=\frac{2\cdot(s-2)}{(s+1)^2\cdot\left(s^2-s-2\right)}=\frac{2\cdot(s-2)}{(s+1)^2\cdot(s+1)\cdot(s-2)}=\frac{2}{(s+1)^2\cdot(s+1)}=\frac{2}{(s+1)^3},$$

pa korištenjem tablice Laplaceovih transformata odmah slijedi:

$$\frac{2}{(s+2)^3}\overset{\mathcal{L}^{-1}}{\longmapsto}u^2\cdot e^{-u}.$$

Dakle, rješenje zadatka je funkcija $y=u^2\cdot e^{-u}$.

**Zadatak 4.** $\begin{cases} y''+y'+16\cdot y=4\cdot\cos(4\cdot w),\\ y(0)=0,\\ y'(0)=4.\end{cases}$

**Rješenje**: Odredimo Laplaceov transformat svakoga člana zadane jednadžbe:

$$y''\overset{\mathcal{L}}{\longmapsto}s^2\cdot F(s)-s\cdot y(0)-y'(0)=s^2\cdot F(s)-s\cdot 0-4=s^2\cdot F(s)-4,$$

$$y' \overset{\mathcal{L}}{\mapsto} s\cdot F(s)-y(0)=s\cdot F(s)-0=s\cdot F(s),$$
$$y \overset{\mathcal{L}}{\mapsto} F(s)$$
$$\cos(4\cdot w) \overset{\mathcal{L}}{\mapsto} \frac{s}{s^2+4^2}=\frac{s}{s^2+16}.$$

Uvrštavanjem tih transformata umjesto njihovih originala u zadanu jednadžbu dobivamo:

$$s^2\cdot F(s)-4+s\cdot F(s)+16\cdot F(s)=4\cdot\frac{s}{s^2+16},$$
$$s^2\cdot F(s)+s\cdot F(s)+16\cdot F(s)=\frac{4\cdot s}{s^2+16}+4,$$
$$F(s)\cdot\left(s^2+s+16\right)=\frac{4\cdot s+4\cdot\left(s^2+16\right)}{s^2+16},$$
$$F(s)\cdot\left(s^2+s+16\right)=\frac{4\cdot\left(s^2+s+16\right)}{s^2+16},$$
$$F(s)=\frac{4\cdot\left(s^2+s+16\right)}{\left(s^2+16\right)\cdot\left(s^2+s+16\right)}=\frac{4}{s^2+16}=\frac{4}{s^2+4^2}.$$

Invertiranjem dobivena Laplaceova transformata korištenjem tablice Laplaceovih transformata slijedi:

$$\frac{4}{s^2+4^2} \overset{\mathcal{L}^{-1}}{\mapsto} \sin(4\cdot w).$$

Dakle, rješenje zadatka je funkcija $y=\sin(4\cdot w)$.

**Zadatak 5.** $\begin{cases} y''-y'+4\cdot y=4\cdot\sin(2\cdot z), \\ y(0)=2, \\ y'(0)=0. \end{cases}$

**Rješenje**: Odredimo Laplaceov transformat svakoga člana zadane jednadžbe:

$$y'' \overset{\mathcal{L}}{\mapsto} s^2\cdot F(s)-s\cdot y(0)-y'(0)=s^2\cdot F(s)-s\cdot 2-0=s^2\cdot F(s)-2\cdot s$$
$$y' \overset{\mathcal{L}}{\mapsto} s\cdot F(s)-y(0)=s\cdot F(s)-2,$$
$$y \overset{\mathcal{L}}{\mapsto} F(s)$$
$$\sin(2\cdot z) \overset{\mathcal{L}}{\mapsto} \frac{2}{s^2+2^2}=\frac{2}{s^2+4}.$$

Uvrštavanjem tih transformata umjesto njihovih originala u zadanu jednadžbu dobivamo:

$$s^2 \cdot F(s) - s \cdot 2 - \left(s \cdot F(s) - 2\right) + 4 \cdot F(s) = 4 \cdot \frac{2}{s^2+4},$$

$$s^2 \cdot F(s) - 2 \cdot s - s \cdot F(s) + 2 + 4 \cdot F(s) = \frac{8}{s^2+4},$$

$$s^2 \cdot F(s) - s \cdot F(s) + 4 \cdot F(s) = \frac{8}{s^2+4} + 2 \cdot s - 2,$$

$$F(s) \cdot \left(s^2 - s + 4\right) = \frac{8 + (2 \cdot s - 2) \cdot \left(s^2+4\right)}{s^2+4},$$

$$F(s) \cdot \left(s^2 - s + 4\right) = \frac{8 + 2 \cdot s^3 - 2 \cdot s^2 + 8 \cdot s - 8}{s^2+4},$$

$$F(s) \cdot \left(s^2 - s + 4\right) = \frac{2 \cdot s^3 - 2 \cdot s^2 + 8 \cdot s}{s^2+4},$$

$$F(s) \cdot \left(s^2 - s + 4\right) = \frac{2 \cdot s \cdot \left(s^2 - s + 4\right)}{s^2+4},$$

$$F(s) = \frac{2 \cdot s \cdot \left(s^2 - s + 4\right)}{\left(s^2+4\right) \cdot \left(s^2 - s + 4\right)} = \frac{2 \cdot s}{s^2+4} = 2 \cdot \frac{s}{s^2+2^2}.$$

Invertiranjem dobivena Laplaceova transformata (konstantu koja množi transformat prepisujemo) slijedi:

$$\frac{s}{s^2+2^2} \overset{\mathcal{L}^{-1}}{\mapsto} \cos(2 \cdot z).$$

Dakle, rješenje zadatka je funkcija $y = 2 \cdot \cos(2 \cdot z)$.

**Zadatak 6.** $\begin{cases} y'' + y = \cos\alpha, \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = 0. \end{cases}$

**Rješenje**: Odredimo Laplaceov transformat svakoga člana zadane jednadžbe:

$$y'' \overset{\mathcal{L}}{\mapsto} s^2 \cdot F(s) - s \cdot y(0) - y'(0) = s^2 \cdot F(s) - s \cdot 1 - 0 = s^2 \cdot F(s) - s$$

$$y \overset{\mathcal{L}}{\mapsto} F(s),$$

$$\cos\alpha \overset{\mathcal{L}}{\mapsto} \frac{s}{s^2+1^2} = \frac{s}{s^2+1}.$$

Uvrštavanjem tih transformata umjesto njihovih originala u zadanu jednadžbu dobivamo:

$$s^2 \cdot F(s) - s + F(s) = \frac{s}{s^2+1},$$

$$s^2 \cdot F(s) - F(s) = \frac{s}{s^2+1} + s,$$

$$F(s) \cdot \left(s^2+1\right) = \frac{s}{s^2+1} + s.$$

Ovdje se „sakrila" jedna „zamka". Prirodni nastavak rješenja ovoga zadatka bio bi svođenje izraza na desnoj strani na zajednički nazivnik. Brojnik dobivenoga razlomka *nije* djeljiv s $s^2+1$ (jer pri dijeljenju očito daje količnik $s$ i ostatak $s$), pa bismo – nakon dijeljenja sa članom $s^2+1$ koji množi član $F(s)$ na lijevoj strani jednakosti – dobili pravu racionalnu funkciju koju bismo morali rastaviti na parcijalne razlomke. Taj rastav imao bi ukupno dva pribrojnika i brojnik *svakoga* od njih bio bi polinom 1. stupnja. Dakle, morali bismo rješavati sustav četiriju linearnih jednadžbi s četiri nepoznanice jer bismo u svakom od spomenutih dvaju polinoma imali točno dva nepoznata koeficijenta. To ne bismo mogli izvesti uvrštavanjem realnih nultočaka nazivnika izraza za $F(s)$ jer taj nazivnik nema realnih nultočaka. Morali bismo uvrštavati neka četiri realna broja i riješiti tako dobiveni sustav analitički ili uz pomoć kalkulatora.

Čemu cijela ova priča? Provedba opisanoga postupka bila bi relativno dugačka i spora, pogotovo ako nemamo kalkulator koji uspješno rješava sustave linearnih jednadžbi. Postoji li kraći i brži način rješavanja zadatka? Postoji. Podijelimo sa $s^2+1$ *svaki pribrojnik na desnoj strani jednakosti.* Dobijemo:

$$F(s) = \frac{s}{\left(s^2+1\right)^2} + \frac{s}{s^2+1}.$$

Sad invertiramo svaki pribrojnik posebno, što smijemo učiniti zbog rezultata zadatka 2. iz točke 3.5. (tj. svojstva linearnosti Laplaceove transformacije):

$$\frac{s}{\left(s^2+1\right)^2} = \frac{s}{\left(s^2+1^2\right)^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2 \cdot 1 \cdot s}{\left(s^2+1^2\right)^2} \overset{\mathcal{L}^{-1}}{\longmapsto} \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot \sin\alpha,$$

$$\frac{s}{s^2+1} \overset{\mathcal{L}^{-1}}{\longmapsto} \cos\alpha.$$

Dakle, rješenje zadatka je funkcija $y = \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot \sin\alpha + \cos\alpha.$

**Zadatak 7.** $\begin{cases} y'' + 4\cdot y + 4\cdot \cos(2\cdot\beta) = 0, \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = -1. \end{cases}$

**Rješenje**: Odredimo Laplaceov transformat svakoga člana zadane jednadžbe, pri čemu 0 na desnoj strani jednadžbe „ne napadamo“ Laplaceovom transformacijom (formalno, Laplaceov transformat nulfunkcije u varijabli $\beta$ je nulfunkcija u varijabli $s$, ali i tu funkciju jednostavno pišemo kao 0):

$$
\begin{aligned}
&y'' \overset{\mathcal{L}}{\mapsto} s^2\cdot F(s) - s\cdot y(0) - y'(0) = s^2\cdot F(s) - s\cdot 0 - (-1) = s^2\cdot F(s) + 1\\
&y \overset{\mathcal{L}}{\mapsto} F(s),\\
&\cos(2\cdot\beta) \overset{\mathcal{L}}{\mapsto} \frac{s}{s^2+2^2} = \frac{s}{s^2+4}.
\end{aligned}
$$

Uvrštavanjem tih transformata umjesto njihovih originala u zadanu jednadžbu dobivamo:

$$
\begin{aligned}
&s^2\cdot F(s) + 1 + 4\cdot F(s) + 4\cdot\frac{s}{s^2+4} = 0,\\
&s^2\cdot F(s) + 4\cdot F(s) = \frac{(-4)\cdot s}{s^2+4} - 1,\\
&F(s)\cdot(s^2+4) = \frac{(-4)\cdot s}{s^2+4} - 1.
\end{aligned}
$$

Ponovno imamo situaciju potpuno analognu onoj iz prethodnoga zadatka, pa ćemo postupiti na analogan način. (Što li sve ne činimo samo kako bismo izbjegli rastav prave racionalne funkcije na parcijalne razlomke i rješavanje Cramerova sustava reda 4?) Dobivamo:

$$
F(s) = -\frac{4\cdot s}{(s^2+4)^2} - \frac{1}{s^2+4} = -\frac{2\cdot 2\cdot s}{\left(s^2+2^2\right)^2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{s^2+2^2}.
$$

Invertiranjem svakoga pribrojnika na desnoj strani jednakosti slijedi:

$$
\begin{aligned}
&\frac{2\cdot 2\cdot s}{\left(s^2+2^2\right)^2} \overset{\mathcal{L}^{-1}}{\mapsto} \beta\cdot\sin(2\cdot\beta),\\
&\frac{2}{s^2+2^2} \overset{\mathcal{L}^{-1}}{\mapsto} \sin(2\cdot\beta).
\end{aligned}
$$

Dakle rješenje zadatka je funkcija $y = -\beta\cdot\sin(2\cdot\beta) - \frac{1}{2}\cdot\sin(2\cdot\beta)$.

**Zadatak 8.** $\begin{cases} y'' - y' - y = 3 \cdot e^{2 \cdot \varepsilon} \cdot \cos \varepsilon, \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 1. \end{cases}$

**Rješenje**: Odredimo Laplaceov transformat svakoga člana zadane jednadžbe:

$$\begin{aligned} & y'' \overset{\mathcal{L}}{\mapsto} s^2 \cdot F(s) - s \cdot y(0) - y'(0) = s^2 \cdot F(s) - s \cdot 0 - 1 = s^2 \cdot F(s) - 1, \\ & y' \overset{\mathcal{L}}{\mapsto} s^2 \cdot F(s) - s \cdot y(0) = s^2 \cdot F(s) - s \cdot 0 = s^2 \cdot F(s), \\ & y \overset{\mathcal{L}}{\mapsto} F(s), \\ & e^{2 \cdot \varepsilon} \cdot \cos \varepsilon \overset{\mathcal{L}}{\mapsto} \frac{s-2}{(s-2)^2 + 1^2} = \frac{s-2}{(s-2)^2 + 1}. \end{aligned}$$

Uvrštavanjem tih transformata umjesto njihovih originala u zadanu jednadžbu dobivamo:

$$\begin{aligned} & s^2 \cdot F(s) - 1 - s \cdot F(s) - F(s) = 3 \cdot \frac{s-2}{(s-2)^2 + 1}, \\ & s^2 \cdot F(s) - s \cdot F(s) - F(s) = \frac{3 \cdot (s-2)}{(s-2)^2 + 1} + 1 \\ & F(s) \cdot \left(s^2 - s - 1\right) = \frac{3 \cdot s - 6 + (s-2)^2 + 1}{(s-2)^2 + 1}, \\ & F(s) \cdot \left(s^2 - s - 1\right) = \frac{3 \cdot s - 6 + s^2 - 4 \cdot s + 4 + 1}{(s-2)^2 + 1}, \\ & F(s) \cdot \left(s^2 - s - 1\right) = \frac{s^2 - s - 1}{(s-2)^2 + 1}, \\ & F(s) = \frac{s^2 - s - 1}{\left((s-2)^2 + 1\right) \cdot \left(s^2 - s - 1\right)} = \frac{1}{(s-2)^2 + 1^2}. \end{aligned}$$

Invertiranjem dobivenoga izraza za desnoj strani jednakosti dobivamo:

$$\frac{1}{(s-2)^2 + 1} = \frac{1}{(s-2)^2 + 1^2} \overset{\mathcal{L}^{-1}}{\mapsto} e^{2 \cdot \varepsilon} \cdot \sin \varepsilon.$$

Dakle, rješenje zadatka je funkcija $y = e^{2 \cdot \varepsilon} \cdot \sin \varepsilon$.

**Zadatak 9.** $\begin{cases} y'' + 5 \cdot y' + 3 \cdot y + 21 \cdot e^{\phi} \cdot \sin(3 \cdot \phi) = 0, \\ y(0) = y'(0) = 1. \end{cases}$

**Rješenje**: Odredimo Laplaceov transformat svakoga člana zadane jednadžbe (nulu na desnoj strani ponovno izostavljamo, odnosno samo prepisujemo):

$$y'' \overset{\mathcal{L}}{\mapsto} s^2 \cdot F(s) - s \cdot y(0) - y'(0) = s^2 \cdot F(s) - s \cdot 1 - 1 = s^2 \cdot F(s) - s - 1,$$
$$y' \overset{\mathcal{L}}{\mapsto} s^2 \cdot F(s) - s \cdot y(0) = s^2 \cdot F(s) - s \cdot 1 = s^2 \cdot F(s) - s,$$
$$y \overset{\mathcal{L}}{\mapsto} F(s),$$
$$e^{\phi} \cdot \sin(3 \cdot \phi) \overset{\mathcal{L}}{\mapsto} \frac{3}{(s-1)^2 + 3^2} = \frac{3}{(s-1)^2 + 9}.$$

Uvrštavanjem tih transformata umjesto njihovih originala u zadanu jednadžbu dobivamo:

$$s^2 \cdot F(s) - s - 1 + 5 \cdot \left(s \cdot F(s) - 1\right) + 3 \cdot F(s) + 21 \cdot \frac{3}{(s-1)^2 + 9} = 0,$$
$$s^2 \cdot F(s) - s - 1 + 5 \cdot s \cdot F(s) - 5 + 3 \cdot F(s) + \frac{63}{(s-1)^2 + 9} = 0,$$
$$s^2 \cdot F(s) + 5 \cdot s \cdot F(s) + 3 \cdot F(s) = \frac{-63}{(s-1)^2 + 3^2} + s + 6,$$
$$F(s) \cdot \left(s^2 + 5 \cdot s + 3\right) = \frac{-63 + (s+6) \cdot \left((s-1)^2 + 9\right)}{(s-1)^2 + 9}.$$

Ovdje, nažalost, nema nikakvih podvala: moramo pojednostavniti brojnik racionalne funkcije na desnoj strani jednakosti. Nakon što to učinimo, podijelit ćemo ga sa polinomom 2. stupnja u okrugloj zagradi na lijevoj strani jednakosti. To ćemo učiniti kako bismo provjerili je li prvi polinom djeljiv drugim. Ako jest, izvrsno, možda ćemo uspjeti izbjeći rastav na parcijalne razlomke. Ako nije, neće biti druge, morat ćemo rastaviti desnu stranu na parcijalne razlomke i rješavati sustav četiriju linearnih jednadžbi s četiri nepoznanice.

Krenimo na posao. Najprije „sredimo“ brojnik racionalne funkcije „do kraja“:

$$-63 + (s+6) \cdot \left((s-1)^2 + 9\right) = 63 + (s+6) \cdot \left(s^2 - 2 \cdot s + 1 + 9\right) = 63 + (s+6) \cdot \left(s^2 - 2 \cdot s + 10\right) =$$
$$= -63 + s^3 + 6 \cdot s^2 - 2 \cdot s^2 - 12 \cdot s + 10 \cdot s + 60 = s^3 + 4 \cdot s^2 - 2 \cdot s - 3.$$

Slijedi dijeljenje dobivena izraza polinomom $s^2 + 5 \cdot s + 3$:

$$
\begin{array}{l}
\left(s^3 + 4 \cdot s^2 - 2 \cdot s - 3\right) : \left(s^2 + 5 \cdot s + 3\right) = s - 1 \\
\underline{-\left(s^3 + 5 \cdot s^2 + 3 \cdot s\right)} \\
-s^2 - 5 \cdot s - 3 \\
\underline{-\left(-s^2 - 5 \cdot s - 3\right)} \\
0
\end{array}
$$

Dakle, vrijedi jednakost:

$$s^3+4\cdot s^2-2\cdot s-3=\left(s^2+5\cdot s+3\right)\cdot(s-1).$$

Tako dalje slijedi:

$$F(s)\cdot\left(s^2+5\cdot s+3\right)=\frac{\left(s^2+5\cdot s+3\right)\cdot(s-1)}{(s-1)^2+9},$$

$$F(s)=\frac{\left(s^2+5\cdot s+3\right)\cdot(s-1)}{\left((s-1)^2+9\right)\cdot\left(s^2+5\cdot s+3\right)}=\frac{s-1}{(s-1)^2+9}=\frac{s-1}{(s-1)^2+3^2}.$$

Tko bi rekao da je zadatak pred samim završetkom? Invertiranjem dobivena Laplaceova transformata dobijemo:

$$\frac{s-1}{(s-1)^2+3^2}\overset{\mathcal{L}^{-1}}{\mapsto}e^{\phi}\cdot\cos(3\cdot\phi),$$

pa je rješenje zadatka funkcija $y=e^{\phi}\cdot\cos(3\cdot\phi)$.

**Zadatak 10.** $\begin{cases} y''-y=8\cdot\operatorname{ch}(3\cdot\varphi), \\ y(0)=y'(0)=1. \end{cases}$

**Rješenje**: Odredimo Laplaceov transformat svakoga člana zadane jednadžbe:

$$y''\overset{\mathcal{L}}{\mapsto}s^2\cdot F(s)-s\cdot y(0)-y'(0)=s^2\cdot F(s)-s\cdot 1-1=s^2\cdot F(s)-s-1,$$

$$y\overset{\mathcal{L}}{\mapsto}F(s),$$

$$\operatorname{ch}(3\cdot\varphi)\overset{\mathcal{L}}{\mapsto}\frac{s}{s^2-3^2}=\frac{s}{s^2-9}.$$

Uvrštavanjem dobivenih izraza umjesto njihovih originala u zadanu jednadžbu slijedi:

$$s^2\cdot F(s)-s-1-F(s)=8\cdot\frac{s}{s^2-9},$$

$$s^2\cdot F(s)-F(s)=\frac{8\cdot s}{s^2-9}+s+1,$$

$$F(s)\cdot\left(s^2-1\right)=\frac{8\cdot s+(s+1)\cdot\left(s^2-9\right)}{s^2-9}.$$

Ponovno nemamo izbora nego „srediti do kraja“ izraz u brojniku racionalne funkcije na desnoj strani jednakosti:

$$8 \cdot s + (s+1) \cdot \left(s^2 - 9\right) = 8 \cdot s + s^3 + s^2 - 9 \cdot s - 9 = s^3 + s^2 - s - 9.$$

Tako smo dobili:

$$F(s) = \frac{s^3 + s^2 - s - 9}{\left(s^2 - 9\right) \cdot \left(s^2 - 1\right)}.$$

Lako se možemo uvjeriti da je skup svih polova ove funkcije $P = \{-3, -1, 1, 3\}$ i da uvrštavanjem *svakoga* elementa toga skupa u brojnik funkcije *F* *ne* dobijemo nulu. To znači da su brojnik i nazivnik relativno prosti, odnosno da ne postoji nijedan polinom stupnja barem 1 s kojim bismo bez ostatka mogli podijeliti i brojnik i nazivnik. Čini nam se da smo ipak u situaciji kad nam „ne gine" rastav na parcijalne razlomke i rješavanje Cramerova sustava reda 4.

I opet nam se samo čini jer ćemo se poslužiti lukavstvom. Napišimo pravilo funkcije *F* na sljedeći način:

$$F(s) = \frac{s^3 + s^2 - s - 9}{\left(s^2 - 9\right) \cdot \left(s^2 - 1\right)} = \frac{s^3 - s}{\left(s^2 - 9\right) \cdot \left(s^2 - 1\right)} + \frac{s^2 - 9}{\left(s^2 - 9\right) \cdot \left(s^2 - 1\right)} = \frac{s \cdot \left(s^2 - 1\right)}{\left(s^2 - 9\right) \cdot \left(s^2 - 1\right)} + \frac{s^2 - 9}{\left(s^2 - 9\right) \cdot \left(s^2 - 1\right)} =$$
$$= \frac{s}{s^2 - 9} + \frac{1}{s^2 - 1} = \frac{s}{s^2 - 3^2} + \frac{1}{s^2 - 1^2}.$$

Uspješno izbjegavši rastav na parcijalne razlomke, zadatak smo priveli kraju. Invertiranjem svakoga pribrojnika dobivamo:

$$\frac{s}{s^2 - 3^2} \overset{\mathcal{L}^{-1}}{=\mapsto} \operatorname{ch}(3 \cdot \varphi),$$
$$\frac{1}{s^2 - 1^2} \overset{\mathcal{L}^{-1}}{=\mapsto} \operatorname{sh} \varphi,$$

pa je rješenje zadatka funkcija $y = \operatorname{ch}(3 \cdot \varphi) + \operatorname{sh} \varphi$.

**Zadatak 11.** $\begin{cases} y'' - y = 2 \cdot e^t, \\ y(0) = 4, \\ y'(0) = 5. \end{cases}$

**Rješenje**: Odredimo Laplaceov transformat svakoga člana zadane jednadžbe:

$$y'' \overset{\mathcal{L}}{\mapsto} s^2 \cdot F(s) - s \cdot y(0) - y'(0) = s^2 \cdot F(s) - s \cdot 4 - 5 = s^2 \cdot F(s) - 4 \cdot s - 5,$$
$$y \overset{\mathcal{L}}{\mapsto} F(s),$$
$$e^t \overset{\mathcal{L}}{\mapsto} \frac{1}{s-1}.$$

Uvrštavanjem dobivenih izraza u zadanu jednadžbu dobijemo:

$$
\begin{aligned}
& s^2 \cdot F(s) - 4 \cdot s - 5 - F(s) = \frac{2}{s-1}, \\
& s^2 \cdot F(s) - F(s) = \frac{2}{s-1} + 4 \cdot s + 5, \\
& F(s) \cdot \left(s^2 - 1\right) = \frac{2 + (4 \cdot s + 5) \cdot (s-1)}{s-1}, \\
& F(s) = \frac{2 + 4 \cdot s^2 + 5 \cdot s - 4 \cdot s - 5}{(s-1) \cdot \left(s^2 - 1\right)} = \frac{4 \cdot s^2 + s - 3}{(s-1) \cdot (s-1) \cdot (s+1)} = \frac{4 \cdot s^2 + s - 3}{(s-1)^2 \cdot (s+1)}.
\end{aligned}
$$

Nultočke nazivnika ove funkcije su –1 i 1. Uvrštavanjem prve od njih u izraz u brojniku dobivamo nulu. (Uvrštavanjem druge od njih u izraz u brojniku dobijemo 2, odnosno broj različit od nule) To znači da je polinom u brojniku djeljiv sa $s+1$. Podijelimo ta dva polinoma:

$$
\begin{aligned}
& \left(4 \cdot s^2 + s - 3\right) : (s+1) = 4 \cdot s - 3 \\
& -\underline{\left(4 \cdot s^2 + 4 \cdot s\right)} \\
& -3 \cdot s - 3 \\
& -\underline{(-3 \cdot s - 3)} \\
& 0
\end{aligned}
$$

Zbog toga je:

$$4 \cdot s^2 + s - 3 = (s+1) \cdot (4 \cdot s - 3),$$

pa posljedično i

$$F(s) = \frac{(s+1) \cdot (4 \cdot s - 3)}{(s-1)^2 \cdot (s+1)} = \frac{4 \cdot s - 3}{(s-1)^2}.$$

Umjesto rastava na parcijalne razlomke, ponovno se možemo poslužiti lukavstvom:

$$F(s) = \frac{4 \cdot s - 3}{(s-1)^2} = \frac{4 \cdot s - 4 + 1}{(s-1)^2} = \frac{4 \cdot s - 4}{(s-1)^2} + \frac{1}{(s-1)^2} = \frac{4 \cdot (s-1)}{(s-1)^2} + \frac{1}{(s-1)^2} = \frac{4}{s-1} + \frac{1}{(s-1)^2} = 4 \cdot \frac{1}{s-1} + \frac{1}{(s-1)^2}.$$

Invertiranjem svakoga pribrojnika dobijemo:

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{s-1} \overset{\mathcal{L}^{-1}}{=\!\!\mapsto} e^t, \\
& \frac{1}{(s-1)^2} \overset{\mathcal{L}^{-1}}{=\!\!\mapsto} t \cdot e^t.
\end{aligned}
$$

Dakle, rješenje zadatka je funkcija $y = 4 \cdot e^t + t \cdot e^t = (t+4) \cdot e^t$.

**Zadatak 12.** $\begin{cases} y'' + 16 \cdot y = 32 \cdot x + 16 \cdot \sin(4 \cdot x), \\ y(0) = y'(0) = 0. \end{cases}$

**Rješenje**: Odredimo Laplaceov transformat svakoga člana zadane jednadžbe:

$$\begin{aligned}
&y'' \overset{\mathcal{L}}{\mapsto} s^2 \cdot F(s) - s \cdot y(0) - y'(0) = s^2 \cdot F(s) - s \cdot 0 - 0 = s^2 \cdot F(s), \\
&y \overset{\mathcal{L}}{\mapsto} F(s), \\
&x \overset{\mathcal{L}}{\mapsto} \frac{1}{s^2}, \\
&\sin(4 \cdot x) \overset{\mathcal{L}}{\mapsto} \frac{4}{s^2 + 4^2} = \frac{4}{s^2 + 16}.
\end{aligned}$$

Uvrštavanjem ovih izraza u zadanu jednadžbu dobijemo:

$$\begin{aligned}
&s^2 \cdot F(s) + 16 \cdot F(s) = 32 \cdot \frac{1}{s^2} + 16 \cdot \frac{4}{s^2 + 16}, \\
&F(s) \cdot \left(s^2 + 16\right) = \frac{32}{s^2} + \frac{64}{s^2 + 16}, \\
&F(s) \cdot \left(s^2 + 16\right) = \frac{32 \cdot \left(s^2 + 16\right) + 64 \cdot s^2}{s^2 \cdot \left(s^2 + 16\right)}, \\
&F(s) \cdot \left(s^2 + 16\right) = \frac{32 \cdot s^2 + 512 + 64 \cdot s^2}{s^2 \cdot \left(s^2 + 16\right)}, \\
&F(s) = \frac{96 \cdot s^2 + 512}{s^2 \cdot \left(s^2 + 16\right)^2}.
\end{aligned}$$

Sad nam nema spasa. Moramo rastaviti gornju racionalnu funkciju na parcijalne razlomke. Nikakav „manevar“ nam neće osigurati da u nazivniku dobijemo samo jedan od navedenih faktora. Ukupno ćemo imati $2 + 2 = 4$ pribrojnika, tj. tražimo rastav oblika:

$$\frac{96 \cdot s^2 + 512}{s^2 \cdot \left(s^2 + 16\right)^2} = \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{s^2} + \frac{A_3 \cdot s + A_4}{s^2 + 16} + \frac{A_5 \cdot s + A_6}{\left(s^2 + 16\right)^2}.$$

Morat ćemo riješiti Cramerov sustav reda „samo“ 6. Idemo najprije dobiti dotični sustav. Pomnožimo gornju jednakost sa $s^2 \cdot \left(s^2 + 16\right)^2$, pa dobijemo:

$$96 \cdot s^2 + 512 = A_1 \cdot s \cdot \left(s^2 + 16\right)^2 + A_2 \cdot \left(s^2 + 16\right)^2 + (A_3 \cdot s + A_4) \cdot s^2 \cdot \left(s^2 + 16\right) + (A_5 \cdot s + A_6) \cdot s^2.$$

Budući da jednadžba $s^2 \cdot \left(s^2 + 16\right)^2 = 0$ ima jedinstveno realno rješenje $s = 0,$ spomenuti Cramerov sustav reda 6 najbrže ćemo dobiti izjednačavanjem koeficijenata uz iste potencije od $s$ na lijevoj i desnoj strani. U tu svrhu najprije se riješimo okruglih zagrada kvadriranjem i množenjem:

$$96\cdot s^2+512=A_1\cdot s\cdot\left(s^4+32\cdot s^2+256\right)+A_2\cdot\left(s^4+32\cdot s^2+256\right)+$$
$$+(A_3\cdot s+A_4)\cdot s^2\cdot\left(s^2+16\right)+(A_5\cdot s+A_6)\cdot s^2,$$
$$96\cdot s^2+512=A_1\cdot s^5+32\cdot A_1\cdot s^3+256\cdot A_1\cdot s+A_2\cdot s^4+32\cdot A_2\cdot s^2+256\cdot A_2+$$
$$+A_3\cdot s^5+16\cdot A_3\cdot s^3+A_4\cdot s^4+16\cdot A_4\cdot s^2+A_5\cdot s^3+A_6\cdot s^2,$$
$$96\cdot s^2+512=(A_1+A_3)\cdot s^5+(A_2+A_4)\cdot s^4+(32\cdot A_1+16\cdot A_3+A_5)\cdot s^3+$$
$$+(32\cdot A_2+16\cdot A_4+A_6)\cdot s^2+256\cdot A_1\cdot s+256\cdot A_2.$$

Članova $s^5$, $s^4$, $s^3$ i $s$ na lijevoj strani nema, pa koeficijenti uz njih na desnoj strani moraju biti jednaki nuli. Uz $s$ na obje strane jednakosti treba pisati 96. Slobodni član na objema stranama treba biti jednak 512. Tako dobivamo sljedeći sustav:

$$\begin{cases} A_1+A_3=0, \\ A_2+A_4=0, \\ 32\cdot A_1+16\cdot A_3+A_5=0, \\ 32\cdot A_2+16\cdot A_4+A_6=96, \\ 256\cdot A_1=0, \\ 256\cdot A_2=512. \end{cases}$$

Za ne povjerovati je da se ovaj sustav može brzo riješiti. Iz posljednje jednadžbe je $A_2=2$, a iz pretposljednje $A_1=0$. Iz prve jednadžbe slijedi $A_3=0$, a iz druge $A_4=-2$. Potom iz treće jednadžbe slijedi $A_5=0$, pa napokon iz četvrte jednadžbe slijedi $A_6=64$. Tako smo dobili:

$$F(s)=\frac{2}{s^2}+\frac{-2}{s^2+16}+\frac{64}{\left(s^2+16\right)^2}=2\cdot\frac{1}{s^2}+\frac{(-2)\cdot\left(s^2+16\right)+64}{\left(s^2+16\right)^2}=2\cdot\frac{1}{s^2}+\frac{-2\cdot s^2-32+64}{\left(s^2+16\right)^2}=$$
$$=2\cdot\frac{1}{s^2}+\frac{-2\cdot s^2+32}{\left(s^2+16\right)^2}=2\cdot\frac{1}{s^2}-2\cdot\frac{s^2-16}{\left(s^2+16\right)^2}=2\cdot\frac{1}{s^2}-2\cdot\frac{s^2-4^2}{\left(s^2+4^2\right)^2}.$$

Posljednja dva pribrojnika iz rastava na parcijalne razlomke smo sveli na zajednički nazivnik kako bismo u tablici Laplaceovih transformata mogli pronaći odgovarajući transformat. (Nijedan transformat koji u nazivniku ima $\left(s^2+a^2\right)^2$ u brojniku nema konstantu, nego ili polinom 1. stupnja ili polinom 2. stupnja u varijabli $s$.)

Invertiranjem svakoga pribrojnika odmah dobivamo konačno rješenje zadatka:

$$y=2\cdot x-2\cdot x\cdot\cos(4\cdot x).$$

## Domaća zadaća

**Isključivo pomoću Laplaceove transformacije** riješite sljedeće Cauchyjeve zadaće:

**1.** $\begin{cases} 4 \cdot y'' - 2 \cdot y' + y = \sin\left(\dfrac{w}{2}\right), \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = 0. \end{cases}$

**2.** $\begin{cases} y'' + y = 2 \cdot (x+1) \cdot e^{x}, \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 1. \end{cases}$

**3.** $\begin{cases} y'' + y = 2 \cdot \cos t, \\ y(0) = y'(0) = 0. \end{cases}$

**4.** $\begin{cases} y'' - y = 5 \cdot \sin(2 \cdot u), \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = -2. \end{cases}$

**5.** $\begin{cases} y'' - 4 \cdot y' + 4 \cdot y = 2 \cdot e^{2 \cdot \alpha}, \\ y(0) = y'(0) = 0. \end{cases}$

**6.** $\begin{cases} y'' + 9 \cdot y + 6 \cdot \sin(3 \cdot x) = 0, \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 1. \end{cases}$

**7.** $\begin{cases} y'' + y' + 16 \cdot y = 4 \cdot \cos(4 \cdot t), \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 4. \end{cases}$

## Rezultati zadataka za domaću zadaću

**1.** $y = \cos\left(\dfrac{w}{2}\right).$

**2.** $y = x \cdot e^{x}.$

**3.** $y = t \cdot \sin t.$

**4.** $y = -\sin(2 \cdot u).$

**5.** $y = \alpha^{2} \cdot e^{2 \cdot \alpha}.$

**6.** $y = x \cdot \cos(3 \cdot x).$

**7.** $y = \sin(4 \cdot t).$