

 <b>TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU</b> <b>POLYTECHNICUM ZAGREBIENSE</b> <b>Elektrotehnički odjel</b>	<b>Matematika 2</b> (prediplomski stručni studij elektrotehnike)	<b>3.7. Metoda varijacije konstanti – riješeni zadaci</b>
--	--	---

Kao što je rečeno na predavanjima, osnovna svrha metode varijacije konstanti primjenjena na rješavanje nehomogenih linearnih običnih diferencijalnih jednadžbi 2. reda s konstantnim koeficijentima zapravo je određivanje *partikularnoga* rješenja. U točki 3.4. to smo rješenje određivali metodom neodređenih koeficijenata („pogadali“ smo ga). U ovoj točki navest ćemo konkretne formule pomoću kojih možemo odrediti to rješenje. Nedostatak tih formula je mogućnost dobivanja relativno teških standardnih antiderivacija koje treba odrediti.

Pritom posebno treba istaknuti sljedeće: *opći postupak rješavanja nehomogene linearne obične diferencijalne jednadžbe 2. reda ostaje nepromijenjen* bez obzira na to kojom metodom određivali partikularno rješenje. Dakle, *obavezno* trebamo napisati pripadnu homogenu linearnu običnu diferencijalnu jednadžbu 2. reda, pridružiti joj karakterističnu jednadžbu, riješiti karakterističnu jednadžbu i potom napisati opće rješenje pripadne homogene linearne obične diferencijalne jednadžbe 2. reda. Postupak rješavanja zadatka se dalje nastavlja izborom metode (metoda neodređenih koeficijenata ili metoda varijacije konstanti) pogodne za određivanje partikularnoga rješenja, pa se *kao i ranije* završava „ispisom“ općega rješenja kao zbroja općega rješenja pripadne homogene linearne obične diferencijalne jednadžbe 2. reda i partikularnoga rješenja.

Prije negoli riješimo konkretne zadatke, pogledajmo izvod odredbenoga sustava funkcijskih jednadžbi. Vrlo je korisno pažljivo proučiti rješenje sljedećega zadatka kako biste shvatili samu ideju metode varijacije konstanti i otkuda se pojavljuje spomenuti odredbeni sustav. Ovo pitanje pojavljuje se na usmenom ispitu za više ocjene (vrlo dobar (4) i izvrstan (5)).

**Zadatak 1.** Izvedite odredbeni sustav funkcijskih jednadžbi koji služi za određivanje partikularnoga rješenja nehomogene linearne obične diferencijalne jednadžbe 2. reda s konstantnim koeficijentima. Detaljno objasnite svaki korak izvoda.

**Rješenje:** Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da rješavamo običnu diferencijalnu jednadžbu:

$$y'' + p \cdot y' + q \cdot y = f,$$

gdje su  $y = y(x)$  nepoznanica,  $p, q \in \mathbb{R}$  konstante i  $f = f(x)$  funkcija smetnje. Kad napišemo pripadnu homogenu jednadžbu, pridružimo joj karakterističnu jednadžbu, riješimo tu karakterističnu jednadžbu i napišemo opće rješenje homogene jednadžbe, *neovisno o tipu rješenja karakteristične jednadžbe* dobit ćemo izraz oblika:

$$y_h = C_1 \cdot y_1 + C_2 \cdot y_2,$$

 <b>TVŽ</b> TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU POLYTECHNICUM ZAGREBIENSE Elektrotehnički odjel	<b>Matematika 2</b> (preddiplomski stručni studij elektrotehnike)	<b>3.7. Metoda varijacije konstanti</b> – riješeni zadaci
---	---	---

gdje su  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$  konstante, a  $y_1 = y_1(x)$  i  $y_2 = y_2(x)$  „konkretne“ funkcije. Te dvije funkcije nazivamo *bazična rješenja* homogene jednadžbe. Pojasnimo ovaj zaključak.

Ako karakteristična jednadžba ima dva različita realna rješenja  $k_1$  i  $k_2$  (to su „konkretni“ realni brojevi), onda je:

$$y_h = C_1 \cdot e^{k_1 \cdot x} + C_2 \cdot e^{k_2 \cdot x},$$

pa u ovom slučaju uzmememo  $y_1 = e^{k_1 \cdot x}$  i  $y_2 = e^{k_2 \cdot x}$ .

Ako karakteristična jednadžba ima jedinstveno dvostruko realno rješenje  $k$  (to je opet „konkretan“ realan broj), onda je:

$$y_h = (C_1 \cdot x + C_2) \cdot e^{k \cdot x} = C_1 \cdot x \cdot e^{k \cdot x} + C_2 \cdot e^{k \cdot x}$$

pa u ovom slučaju uzmememo  $y_1 = x \cdot e^{k \cdot x}$  i  $y_2 = e^{k \cdot x}$ .

Napokon, ako karakteristična jednadžba ima konjugirano-kompleksna rješenja i ako je  $k_1 = a + b \cdot i$  (to je „konkretan“ kompleksan broj) rješenje takvo da je  $b = \operatorname{Im}(k_1) > 0$ , onda je:

$$y_h = e^{a \cdot x} \cdot (C_1 \cdot \cos(b \cdot x) + C_2 \cdot \sin(b \cdot x)) = C_1 \cdot e^{a \cdot x} \cdot \cos(b \cdot x) + C_2 \cdot e^{a \cdot x} \cdot \sin(b \cdot x),$$

pa u ovom slučaju uzmememo  $y_1 = e^{a \cdot x} \cdot \cos(b \cdot x)$  i  $y_2 = e^{a \cdot x} \cdot \sin(b \cdot x)$ .

Time smo iscrpili sve moguće slučajeve, te opravdali gornji zaključak.

Posebno vrijedi istaknuti: bazična rješenja  $y_1$  i  $y_2$  su *dva različita partikularna rješenja homogene jednadžbe*. Drugim riječima, za te dvije funkcije vrijede jednakosti:

$$\begin{aligned} y_1'' + p \cdot y_1' + q \cdot y_1 &= 0, \\ y_2'' + p \cdot y_2' + q \cdot y_2 &= 0. \end{aligned}$$

Kako dolazimo do toga zaključka? Jednostavno, izborom  $(C_1, C_2) = (1, 0)$  dobijemo partikularno rješenje  $y_1$ , a izborom  $(C_1, C_2) = (0, 1)$  dobijemo partikularno rješenje  $y_2$ . Netom napisane jednakosti koristit će nam u nastavku izvoda.

Sada primijenimo metodu varijacije konstanti. Da bismo dobili partikularno (a potom i opće) rješenje polazne jednadžbe, prepostavit ćemo da su koeficijenti  $C_1$  i  $C_2$  također funkcije varijable  $x$ , tj. da vrijedi jednakost:

$$y_p = C_1(x) \cdot y_1 + C_2(x) \cdot y_2.$$

 <b>TVŽ</b> TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU POLYTECHNICUM ZAGREBIENSE Elektrotehnički odjel	<b>Matematika 2</b> (preddiplomski stručni studij elektrotehnike)	<b>3.7. Metoda varijacije</b> <b>konstanti – riješeni zadaci</b>
--	---	---

Ponovimo i istaknimo:  $y_p$ , kao partikularno rješenje polazne jednadžbe, mora biti „konkretna“ funkcija, što znači da i nepoznate funkcije  $C_1$  i  $C_2$  moraju biti „konkretne“ funkcije. (Kako smo vidjeli iz ranije analize,  $y_1$  i  $y_2$  su „konkretne“ funkcije, tj. ne sadrže konstante koje mogu poprimiti proizvoljnu realnu vrijednost.)

U točki 3.1. rješavali smo zadatke u kojima je trebalo provjeriti je li neki izraz rješenje konkretne obične diferencijalne jednadžbe. Kako smo to činili? Jednostavno: određivali smo sve potrebne derivacije toga izraza, uvrstili ih u zadanu jednadžbu, „sredili“ lijevu stranu te jednadžbe „do kraja“ i utvrdili jesmo li dobili identitet koji vrijedi za svaku vrijednost nezavisne varijable iz domene funkcije  $y$ . Potpuno istu ideju primijenit ćemo i ovdje. Odredit ćemo prvu i drugu derivaciju izraza za  $y$ , uvrstiti dobivene izraze u polaznu običnu diferencijalnu jednadžbu (zajedno s izrazom za  $y$ ), te vidjeti uz koje uvjete se dobije identitet. Napomenimo da prilikom deriviranja izraza za  $y$  primjenjujemo pravilo za deriviranje umnoška dviju funkcija.

Imamo redom (varijablu  $x$  namjerno izostavljamo jer nije bitna za nastavak izvoda):

$$\begin{aligned} y' &= C_1' \cdot y_1 + C_1 \cdot y_1' + C_2' \cdot y_2 + C_2 \cdot y_2', \\ y'' &= C_1'' \cdot y_1 + C_1' \cdot y_1' + C_1 \cdot y_1'' + C_2'' \cdot y_2 + C_2' \cdot y_2' + C_2 \cdot y_2''. \end{aligned}$$

Uvrstimo te izraze, zajedno s izrazom  $y = C_1 \cdot y_1 + C_2 \cdot y_2$ , u polaznu jednadžbu:

$$\begin{aligned} y'' + p \cdot y' + q \cdot y &= f \Rightarrow \\ (C_1'' \cdot y_1 + C_1' \cdot y_1' + C_1 \cdot y_1'' + C_2'' \cdot y_2 + C_2' \cdot y_2' + C_2 \cdot y_2'') + \\ + p \cdot (C_1' \cdot y_1 + C_1 \cdot y_1' + C_2' \cdot y_2 + C_2 \cdot y_2') + q \cdot (C_1 \cdot y_1 + C_2 \cdot y_2) &= f. \end{aligned}$$

Dobiveno „neorganizirano“ mnoštvo članova relativno brzo ćemo dovesti u red i pojednostavniti dobiveni izraz. Grupirajmo članove na lijevoj strani jednadžbe ovako:

$$\begin{aligned} C_1 \cdot (y_1'' + p \cdot y_1' + q \cdot y_1) + C_2 \cdot (y_2'' + p \cdot y_2' + q \cdot y_2) + (C_1'' \cdot y_1 + C_1' \cdot y_1') + C_1 \cdot y_1' + \\ + (C_2'' \cdot y_2 + C_2' \cdot y_2') + C_2 \cdot y_2' + p \cdot (C_1' \cdot y_1 + C_2' \cdot y_2) &= f. \end{aligned}$$

Prve dvije okrugle zagrade jednake su nuli prema ranijoj napomeni da su  $y_1$  i  $y_2$  partikularna rješenja pripadne homogene jednadžbe. Također, prema formuli za derivaciju umnoška, treća okrugla zagrada jednaka je  $(C_1' \cdot y_1)'$  (tako smo zapravo i dobili članove u trećoj okrugloj zagradi), a na analogan je način četvrta okrugla zagrada jednaka  $(C_2' \cdot y_2)'$ . Tako gornji izraz možemo reducirati na:

$$(C_1' \cdot y_1)' + C_1' \cdot y_1' + (C_2' \cdot y_2)' + C_2' \cdot y_2' + p \cdot (C_1' \cdot y_1 + C_2' \cdot y_2) = f.$$

 <b>TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU</b> <b>POLYTECHNICUM ZAGREBIENSE</b> <b>Elektrotehnički odjel</b>	<b>Matematika 2</b> (prediplomski stručni studij elektrotehnike)	<b>3.7. Metoda varijacije</b> <b>konstanti – riješeni zadaci</b>
---	--	---

Zbroj dviju derivacija jednak je derivaciji zbroja, pa prve dvije okrugle zagrade možemo objediniti u jednu i dobiti:

$$(C'_1 \cdot y_1 + C'_2 \cdot y_2)' + C'_1 \cdot y'_1 + C'_2 \cdot y'_2 + p \cdot (C'_1 \cdot y_1 + C'_2 \cdot y_2) = f.$$

Uočimo da se u preostalim okruglim zagradama nalazi *isti izraz*. Kako bismo dobili što jednostavniji određbeni sustav, postavit ćemo zahtjev da taj izraz bude jednak nuli, tj.:

$$C'_1 \cdot y_1 + C'_2 \cdot y_2 = 0.$$

Nakon što smo postavili zahtjev  $C'_1 \cdot y_1 + C'_2 \cdot y_2 = 0$ , obje zagrade u gornjem izrazu postaju jednake nuli, pa preostaje:

$$C'_1 \cdot y'_1 + C'_2 \cdot y'_2 = f.$$

Dobiveni određbeni sustav funkcija jednadžbi, dakle, glasi:

$$\begin{cases} C'_1 \cdot y_1 + C'_2 \cdot y_2 = 0, \\ C'_1 \cdot y'_1 + C'_2 \cdot y'_2 = f. \end{cases}$$

Preostaje utvrditi ima li taj sustav jedinstveno rješenje.

Teorija kaže da gornji sustav ima jedinstveno rješenje ako i samo ako je njegova determinanta različita od nule. Determinanta ovoga sustava je:

$$D = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix} = y_1 \cdot y'_2 - y'_1 \cdot y_2 = y_1^2 \cdot \left( \frac{y_2}{y_1} \right)'.$$

(Posljednju jednakost dobili smo primjenom formule za derivaciju količnika.) Taj izraz će biti nulfunkcija ako je  $y_1^2 = 0$  ili ako je  $\left( \frac{y_2}{y_1} \right)' = 0$ .

Nijedna od funkcija  $y_1$  i  $y_2$  ni u kojemu od triju mogućih podslučajeva općega rješenja homogene jednadžbe nije nulfunkcija, pa prvi slučaj  $y_1^2 = 0$  ne dolazi u obzir.

Ako bi vrijedila jednakost  $\left( \frac{y_2}{y_1} \right)' = 0$ , onda bismo integriranjem obiju strana te jednakosti dobili  $\frac{y_2}{y_1} = C$ , za neku konstantu  $C \in \mathbb{R}$ . Odavde je  $y_2 = C \cdot y_1$ , što znači da su funkcije  $y_1$  i  $y_2$  proporcionalne. No, to očito nije točno ni za jedan od triju mogućih

 <b>TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU</b> <b>POLYTECHNICUM ZAGREBIENSE</b> <b>Elektrotehnički odjel</b>	<b>Matematika 2</b> (preddiplomski stručni studij elektrotehnike)	<b>3.7. Metoda varijacije</b> <b>konstanti – riješeni zadaci</b>
---	---	---

podslučajeva općega rješenja homogene jednadžbe: niti  $e^{k_2 \cdot x}$  možemo dobiti tako da  $e^{k_1 \cdot x}$  pomnožimo nekom konstantom *koja bi bila ista za svaki*  $x \in \mathbb{R}$ , niti  $e^{k \cdot x}$  možemo dobiti tako da  $x \cdot e^{k \cdot x}$  pomnožimo nekom konstantom *koja bi bila ista za svaki*  $x \in \mathbb{R}$ , niti  $e^{a \cdot x} \cdot \sin(b \cdot x)$  možemo dobiti tako da  $e^{a \cdot x} \cdot \cos(b \cdot x)$  pomnožimo nekom konstantom *koja bi bila ista za svaki*  $x \in \mathbb{R}$ .

Dakle, ni ovaj slučaj nije moguć, pa zaključujemo da je determinanta odredbenoga sustava različita od nule, odnosno da odredbeni sustav ima jedinstveno rješenje.

**Zadatak 2.** Izvedite formule za rješenje odredbenoga sustava iz zadatka 1.

**Rješenje:** U ovome je slučaju vrlo podesno primijeniti Cramerovo pravilo jer računamo s općim funkcijama, a ne s konkretnim realnim brojevima. Determinantu sustava već smo odredili u rješenju zadatka 1. Odredimo obje pomoćne determinante:

$$D_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f & y_2 \end{vmatrix} = 0 \cdot y_2 - f \cdot y_2 = -y_2 \cdot f,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1 & f \end{vmatrix} = y_1 \cdot f.$$

Tako dobivamo:

$$C_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{-y_2 \cdot f}{y_1^2 \cdot \left( \frac{y_2}{y_1} \right)} \Rightarrow C_1(x) = \int \frac{-y_2 \cdot f}{y_1^2 \cdot \left( \frac{y_2}{y_1} \right)} \cdot dx,$$

$$C_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{y_1 \cdot f}{y_1^2 \cdot \left( \frac{y_2}{y_1} \right)} = \frac{f}{y_1 \cdot \left( \frac{y_2}{y_1} \right)} \Rightarrow C_2(x) = \int \frac{f}{y_1 \cdot \left( \frac{y_2}{y_1} \right)} \cdot dx,$$

pa je traženo partikularno rješenje dano izrazom:

$$y_p = C_1(x) \cdot y_1 + C_2(x) \cdot y_2 = \left( \int \frac{-y_2 \cdot f}{y_1^2 \cdot \left( \frac{y_2}{y_1} \right)} \cdot dx \right) \cdot y_1 + \left( \int \frac{f}{y_1 \cdot \left( \frac{y_2}{y_1} \right)} \cdot dx \right) \cdot y_2.$$

Ponovimo da su oba integrala koja se pojavljuju u gornjem izrazu *standardne antiderivacije*, a ne neodređeni integrali. Dobiveni izraz treba pribrojiti ranije određenom općem rješenju pripadne homogene jednadžbe i tako dobiti opće rješenje polazne jednadžbe.

 TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU POLYTECHNICUM ZAGREBIENSE Elektrotehnički odjel	<b>Matematika 2</b> (prediplomski stručni studij elektrotehnike)	<b>3.7. Metoda varijacije</b> <b>konstanti – riješeni zadaci</b>
--	--	---

**Zadatak 3. (prema ideji prof. L. Marohnića)** Neka su  $y_1$  i  $y_2$  bazična rješenja homogene jednadžbe pridružene jednadžbi  $y'' + p \cdot y' + q \cdot y = f$ . Označimo:

$$u := \frac{y_2}{y_1}, \quad v := \frac{f}{y_1}.$$

Pokažite da je tada *partikularno rješenje*  $y_p$  zadane jednadžbe dano izrazom:

$$y_p = y_1 \cdot \left( \int u \cdot \left( \int \frac{v}{u} \cdot dx \right) \cdot dx \right),$$

pri čemu oba integrala treba shvatiti kao određivanje standardnih antiderivacija podintegralnih funkcija.

**Rješenje:** Neka su  $y_1$  i  $y_2$  bazična rješenja homogene jednadžbe pridružene jednadžbi  $y'' + p \cdot y' + q \cdot y = f$ . Neka su  $u := \frac{y_2}{y_1}$ ,  $v := \frac{f}{y_1}$ . Tada formule za određivanje  $C_1'$  i  $C_2'$  možemo zapisati u obliku:

$$C_1' = \frac{-y_2 \cdot f}{y_1^2 \cdot \left( \frac{y_2}{y_1} \right)} = -\frac{y_2}{y_1} \cdot \frac{f}{y_1} \cdot \frac{1}{\left( \frac{y_2}{y_1} \right)} = -u \cdot v \cdot \frac{1}{u},$$

$$C_2' = \frac{f}{y_1 \cdot \left( \frac{y_2}{y_1} \right)} = \frac{f}{y_1} \cdot \frac{1}{\left( \frac{y_2}{y_1} \right)} = v \cdot \frac{1}{u}.$$

Integriranjem lijeve i desne strane druge jednakosti dobivamo:

$$C_2 = \int \frac{v}{u} \cdot dx,$$

Uvrštavanjem druge jednadžbe u prvu i parcijalnom integracijom dobijemo:

$$C_1 = \int -u \cdot \left( v \cdot \frac{1}{u} \right) \cdot dx = \int -u \cdot C_2' \cdot dx = \begin{vmatrix} u_1 = -u & v = C_2 \\ du_1 = -u' \cdot dx & dv = C_2' \cdot dx \end{vmatrix} = -u \cdot C_2 + \int u' \cdot C_2 \cdot dx.$$

Uvrštavanjem tih dviju jednakosti u izraz  $y_p = C_1 \cdot y_1 + C_2 \cdot y_2$  konačno dobivamo:

$$\begin{aligned} y_p &= C_1 \cdot y_1 + C_2 \cdot y_2 = \left( -u \cdot C_2 + \int u' \cdot C_2 \cdot dx \right) \cdot y_1 + C_2 \cdot y_2 = \\ &= -u \cdot C_2 \cdot y_1 + \left( \int u' \cdot C_2 \cdot dx \right) \cdot y_1 + C_2 \cdot (u \cdot y_1) = \left( \int u' \cdot C_2 \cdot dx \right) \cdot y_1 = \left( \int u' \cdot \left( \int \frac{v}{u} \cdot dx \right) \cdot dx \right) \cdot y_1. \end{aligned}$$

 <b>TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU</b> <b>POLYTECHNICUM ZAGREBIENSE</b> <b>Elektrotehnički odjel</b>	<b>Matematika 2</b> (prediplomski stručni studij elektrotehnike)	<b>3.7. Metoda varijacije</b> <b>konstanti – riješeni zadaci</b>
--	--	---

**Napomena:** Formula iz zadatka 3. može uvelike pojednostaviti određivanje općega rješenja ako su funkcije  $v$  i  $u'$  takve da je relativno jednostavno odrediti *svaki* od gornjih dvaju integrala. Moguće je da će jedan integral biti jednostavan, a drugi neće, pa je u takvim slučajevima bolje i jednostavnije koristiti formule iz zadatka 2.

Partikularno rješenje u svim zadacima koji slijede odredit ćemo na dva načina: koristeći formulu iz zadatka 2., odnosno formulu iz zadatka 3. Sami odaberite način koji smatrate lakšim, pa odredite partikularno rješenje na taj način. *Ne postoji opće pravilo o težini pojedinoga načina* – ona ovisi o konkretnom zadatku.

Metodom varijacije konstanti riješite sljedeće jednadžbe:

**Zadatak 4.**  $y'' + y = \operatorname{tg} t$ .

**Rješenje:** Odmah napomenimo da je ovaj zadatak *nemoguće* riješiti metodom neodređenih koeficijenata (na kraju zadatka vidjet ćete kako izgleda partikularno rješenje i da ga je nemoguće „pogoditi“), kao ni primjenom Laplaceove transformacije (funkcija  $\operatorname{tg}$  nema Laplaceov transformat jer njezina prirodna domena nema oblik  $[a, +\infty)$ ). Dakle, u ovom zadatku (i gotovo svim ostalim zadacima iz ove nastavne cjeline, osim posljednjega) kao jedina *praktično moguća* metoda određivanja partikularnoga rješenja ostaje metoda varijacije konstanti.

Najprije odredimo opće rješenje pripadne homogene jednadžbe.

Pripadna homogena jednadžba je  $y'' + y = 0$ . Njoj pridružena karakteristična jednadžba je  $k^2 + 1 = 0$ . Njezina rješenja su  $k_1 = i$ ,  $k_2 = -i$ . Rješenje koje ima strogo pozitivan imaginarni dio je  $k_1 = i$ , pa „očitamo“:  $a = \operatorname{Re}(k_1) = 0$ ,  $b = \operatorname{Im}(k_1) = 1$ , te dobijemo:

$$y_h = \underbrace{e^{0 \cdot t}}_{=e^0=1} \cdot (C_1 \cdot \cos(1 \cdot t) + C_2 \cdot \sin(1 \cdot t)) = C_1 \cdot \cos t + C_2 \cdot \sin t.$$

U obama načinima koji slijede trebamo „očitati“ bazična rješenja pripadne homogene jednadžbe, te funkciju smetnje. Taj posao je vrlo lak: prilikom rješavanja nehomogene linearne obične diferencijalne jednadžbe 2. reda s konstantnim koeficijentima uvijek imamo *točno dva* bazična rješenja i to su „konkretnе“ funkcije koje množe konstante  $C_1$  i  $C_2$ . U našem slučaju, ta rješenja (i funkcija smetnje  $f$ ) su:

$$y_1 = \cos t, \quad y_2 = \sin t, \quad f(t) = \operatorname{tg} t.$$

**1. način** (pomoću formula iz zadatka 2.):

Gornje funkcije najprije uvrstimo u formulu

 TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU POLYTECHNICUM ZAGREBIENSE Elektrotehnički odjel	<b>Matematika 2</b> (preddiplomski stručni studij elektrotehnike)	<b>3.7. Metoda varijacije</b> <b>konstanti – riješeni zadaci</b>
---	---	---

$$C_1' = \frac{-y_2 \cdot f}{y_1^2 \cdot \left(\frac{y_2}{y_1}\right)},$$

pojednostavljeno dobiveni izraz na desnoj strani „do kraja“ i integriramo obje strane jednakosti. Dobivamo:

$$C_1' = \frac{-\sin t \cdot \operatorname{tg} t}{\cos^2 t \cdot \left(\frac{\sin t}{\cos t}\right)} = \frac{-\sin t \cdot \frac{\sin t}{\cos t}}{\cos^2 t \cdot (\operatorname{tg} t)} = \frac{-\frac{\sin^2 t}{\cos t}}{\cos^2 t \cdot \frac{1}{\cos^2 t}} = -\frac{\sin^2 t}{\cos t} = \frac{\cos^2 t - 1}{\cos t} = \frac{\cos^2 t}{\cos t} - \frac{1}{\cos t} = \cos t - \frac{1}{\cos t} \Rightarrow$$

$$C_1 = \int \left( \cos t - \frac{1}{\cos t} \right) dt = \int \cos t \cdot dt - \int \frac{dt}{\cos t} = \sin t + \ln \left( \operatorname{ctg} \left( \frac{t}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right)$$

Preostaje iste funkcije uvrstiti u formulu

$$C_2' = \frac{f}{y_1 \cdot \left(\frac{y_2}{y_1}\right)},$$

pojednostaviti izraz na desnoj strani „do kraja“ i integrirati obje strane dobivene jednakosti. Imamo redom:

$$C_2' = \frac{f}{y_1 \cdot \left(\frac{y_2}{y_1}\right)} = \frac{\operatorname{tg} t}{\cos t \cdot \left(\frac{\sin t}{\cos t}\right)} = \frac{\frac{\sin t}{\cos t}}{\cos t \cdot (\operatorname{tg} t)} = \frac{\frac{\sin t}{\cos t}}{\cos t \cdot \frac{1}{\cos^2 t}} = \frac{\sin t}{\cos t} = \sin t \Rightarrow$$

$$C_2 = \int \sin t \cdot dt = -\cos t + C_4.$$

Tako konačno dobivamo:

$$y_p = C_1 \cdot y_1 + C_2 \cdot y_2 = \left( \sin t + \ln \left( \operatorname{ctg} \left( \frac{t}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right) \right) \cdot \cos t + (-\cos t) \cdot \sin t = \ln \left( \operatorname{ctg} \left( \frac{t}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right) \cdot \cos t,$$

pa je traženo opće rješenje polazne jednadžbe:

$$y = y_h + y_p = C_1 \cdot \cos t + C_2 \cdot \sin t + \ln \left( \operatorname{ctg} \left( \frac{t}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right) \cdot \cos t, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

**2. način** (pomoću formule iz zadatka 3.): Odredit ćemo samo partikularno rješenje jer se opće rješenje polazne jednadžbe potom dobije kao i u prvom načinu. Imamo redom:

 <b>TVŽ</b> TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU POLYTECHNICUM ZAGREBIENSE Elektrotehnički odjel	<b>Matematika 2</b> (preddiplomski stručni studij elektrotehnike)	<b>3.7. Metoda varijacije konstanti – riješeni zadaci</b>
---	---	---

$$u = \frac{y_2}{y_1} = \operatorname{tg} t, v = \frac{f}{y_1} = \frac{\operatorname{tg} t}{\cos t} = \frac{\sin t}{\cos^2 t} \Rightarrow$$

$$u' = \frac{1}{\cos^2 t}, \quad \frac{v'}{u} = \frac{\frac{\sin t}{\cos^2 t}}{\frac{1}{\cos^2 t}} = \sin t \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} y_p &= \cos t \cdot \left( \int \frac{1}{\cos^2 t} \cdot \left( \int \sin t \cdot dt \right) \cdot dt \right) = \cos t \cdot \left( \int \frac{1}{\cos^2 t} \cdot (-\cos t) \cdot dt \right) = \cos t \cdot \left( - \int \frac{1}{\cos t} \cdot dt \right) = \\ &= \cos t \cdot \ln \left( \operatorname{ctg} \left( \frac{t}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right), \end{aligned}$$

**Zadatak 5.** Riješite jednadžbu:  $y'' - 2 \cdot y' + y = \frac{e^u}{u}$ .

**Rješenje:** Pripadna homogena jednadžba je  $y'' - 2 \cdot y' + y = 0$ . Njoj pridružena karakteristična jednadžba glasi  $k^2 - 2 \cdot k + 1 = 0$ . Ona ima jedinstveno dvostruko rješenje  $k = 1$ . Zbog toga je opće rješenje pripadne homogene jednadžbe:

$$y_h = (C_1 \cdot u + C_2) \cdot \underbrace{e^{1-u}}_{=e^u} = C_1 \cdot u \cdot e^u + C_2 \cdot e^u.$$

Odavde „očitamo“ bazična rješenja, a iz polazne jednadžbe očitamo funkciju smetnje:

$$y_1 = u \cdot e^u, \quad y_2 = e^u, \quad f = \frac{e^u}{u}.$$

**1. način** (pomoću formule iz zadatka 2.):

Gornje funkcije najprije uvrstimo u formulu

$$C_1' = \frac{-y_2 \cdot f}{y_1^2 \cdot \left( \frac{y_2}{y_1} \right)}.$$

pojednostavnimo dobiveni izraz na desnoj strani „do kraja“ i integriramo obje strane dobivene jednakosti. Dobivamo:

$$\begin{aligned} C_1' &= \frac{-e^u \cdot \frac{e^u}{u}}{\left( u \cdot e^u \right)^2 \cdot \left( \frac{e^u}{u \cdot e^u} \right)} = \frac{-\frac{e^{2u}}{u}}{u^2 \cdot e^{2u} \cdot \left( \frac{1}{u} \right)} = \frac{-\frac{1}{u}}{u^2 \cdot \left( -\frac{1}{u^2} \right)} = \frac{1}{u} \Rightarrow \\ C_1 &= \int \frac{1}{u} \cdot du = \ln u. \end{aligned}$$

 <b>TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU</b> <b>POLYTECHNICUM ZAGREBIENSE</b> <b>Elektrotehnički odjel</b>	<b>Matematika 2</b> (preddiplomski stručni studij elektrotehnike)	<b>3.7. Metoda varijacije</b> <b>konstanti – riješeni zadaci</b>
--	---	---

Sad iste funkcije uvrstimo u formulu

$$C_2' = \frac{f}{y_1 \cdot \left( \frac{y_2}{y_1} \right)},$$

pojednostavnimo dobiveni izraz na desnoj strani „do kraja“ i integriramo obje strane dobivene jednakosti. Dobivamo:

$$\begin{aligned} C_2' &= \frac{\frac{e^u}{u}}{u \cdot e^u \cdot \left( \frac{e^u}{u \cdot e^u} \right)} = \frac{\frac{1}{u}}{u \cdot \left( \frac{1}{u} \right)} = \frac{\frac{1}{u}}{u \cdot \left( \frac{-1}{u^2} \right)} = -1 \Rightarrow \\ C_2 &= \int -1 \cdot du = -u. \end{aligned}$$

Zbog toga je partikularno rješenje polazne jednadžbe jednako:

$$y_p = C_1 \cdot y_1 + C_2 \cdot y_2 = (\ln u) \cdot u \cdot e^u + (-u) \cdot e^u = (\ln u - 1) \cdot u \cdot e^u,$$

pa je traženo opće rješenje polazne jednadžbe:

$$\begin{aligned} y &= y_h + y_p = C_1 \cdot u \cdot e^u + C_2 \cdot e^u + (\ln u - 1) \cdot u \cdot e^u = \underbrace{(C_1 - 1)}_{=: C_3} \cdot u \cdot e^u + C_2 \cdot e^u + (\ln u) \cdot u \cdot e^u = \\ &= C_3 \cdot u \cdot e^u + C_2 \cdot e^u + (\ln u) \cdot u \cdot e^u, \quad C_2, C_3 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Uočite da smo u gornjem izrazu „komprimirali“ dva člana u jedan zamjenivši konstantu  $C_1 - 1$  novom konstantom  $C_2$ . Ovakav slučaj nije rijedak i može se pojaviti prilikom sređivanja pravila zbroja  $y_h + y_p$ . Razlog njegova pojavljivanja je traženje partikularnoga rješenja u obliku  $C_1(x) \cdot y_1 + C_2(x) \cdot y_2$ , tj. kao „linearne kombinacije“ bazičnih rješenja. Iz zapisanoga općega rješenja polazne jednadžbe vidimo da je partikularno rješenje  $(\ln u) \cdot u \cdot e^u$  zapravo „višekratnik“ bazičnoga rješenja  $y_1 = u \cdot e^u$  i da bi „koeficijent“ uz  $y_2$  zapravo trebao biti jednak 0 (tj. nulfunkciji). Međutim, to je nemoguće jer  $C_2 \equiv 0 \Rightarrow C_2' \equiv 0 \Rightarrow f \equiv 0$ , pa bismo na početku imali homogenu, a ne nehomogenu jednadžbu. Dakle, moguće je da ćemo, prilikom ispisa pravila općega rješenja polazne jednadžbe, morati dodatno pojednostaviti pravilo toga rješenja, pa na to treba dodatno obratiti pozornost.

**2. način** (pomoću formule iz zadatka 3.): Uz iste oznake kao i u 1. načinu imamo:

$$u_1 = \frac{y_2}{y_1} = \frac{u}{u \cdot e^u} = \frac{1}{u}, \quad v = \frac{f}{y_1} = \frac{\frac{e^u}{u}}{u \cdot e^u} = \frac{1}{u^2} \Rightarrow$$

 <b>TVŽ</b> TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU POLYTECHNICUM ZAGREBIENSE Elektrotehnički odjel	<b>Matematika 2</b> (preddiplomski stručni studij elektrotehnike)	<b>3.7. Metoda varijacije konstanti – riješeni zadaci</b>
---	---	---

$$u_1' = -\frac{1}{u^2}, \quad \frac{v}{u_1'} = \frac{\frac{1}{u^2}}{-\frac{1}{u^2}} = -1 \Rightarrow$$

$$y_p = u \cdot e^u \cdot \left( \int \left( -\frac{1}{u^2} \right) \cdot \left( \int (-1) \cdot du \right) \cdot du \right) = u \cdot e^u \cdot \left( \int \left( -\frac{1}{u^2} \right) \cdot (-u) \cdot du \right) = u \cdot e^u \cdot \left( \int \frac{1}{u} \cdot du \right) = u \cdot e^u \cdot \ln u.$$

Primijetimo da u ovom slučaju nismo dobili partikularno rješenje jednako onome dobivenom prvim načinom. Ni ta „pojava“ nije rijedak slučaj jer se radi o različitim načinima dobivanja partikularnoga rješenja. Međutim, opće rješenje – a ono je krajnji cilj zadatka – u oba je slučaja jednako:

$$y = y_h + y_p = C_1 \cdot u \cdot e^u + C_2 \cdot e^u + u \cdot e^u \cdot \ln u, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

**Zadatak 6.** Riješite jednadžbu:  $y'' + y = \frac{1}{\cos z}$ .

**Rješenje:** Analogno kao u rješenju zadatka 4. dobijemo:

$$y_h = C_1 \cdot \cos z + C_2 \cdot \sin z.$$

Bazična rješenja  $y_1$  i  $y_2$ , te funkcija smetnje  $f$  su:

$$y_1 = \cos z, \quad y_2 = \sin z, \quad f(z) = \frac{1}{\cos z}$$

**1. način** (pomoću formula iz zadatka 2.):

Gornje funkcije najprije uvrstimo u formulu

$$C_1' = \frac{-y_2 \cdot f}{y_1^2 \cdot \left( \frac{y_2}{y_1} \right)},$$

pojednostavljimo dobiveni izraz na desnoj strani „do kraja“ i integriramo obje strane dobivene jednakosti. Imamo redom:

$$\begin{aligned} C_1' &= \frac{-\sin z \cdot \frac{1}{\cos z}}{\cos^2 z \cdot \left( \frac{\sin z}{\cos z} \right)} = \frac{-\operatorname{tg} z}{\cos^2 z \cdot (\operatorname{tg} z)} = \frac{-\operatorname{tg} z}{\cos^2 z \cdot \frac{1}{\cos^2 z}} = -\operatorname{tg} z \Rightarrow \\ C_1 &= -\int \operatorname{tg} z \cdot dz = \ln(\cos z). \end{aligned}$$

Sad te funkcije uvrstimo u formulu

 TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU POLYTECHNICUM ZAGREBIENSE Elektrotehnički odjel	<b>Matematika 2</b> (preddiplomski stručni studij elektrotehnike)	<b>3.7. Metoda varijacije</b> <b>konstanti – riješeni zadaci</b>
---	---	---

$$C_2' = \frac{f}{y_1 \cdot \left( \frac{y_2}{y_1} \right)},$$

pojednostavnimo dobiveni izraz na desnoj strani „do kraja“ i integriramo obje strane dobivene jednakosti. Imamo:

$$\begin{aligned} C_2' &= \frac{\frac{1}{\cos z}}{\cos z \cdot \left( \frac{\sin z}{\cos z} \right)} = \frac{\frac{1}{\cos z}}{\cos z \cdot (\tan z)} = \frac{\frac{1}{\cos z}}{\cos z \cdot \frac{1}{\cos^2 z}} = 1 \Rightarrow \\ C_2 &= \int 1 \cdot dz = z. \end{aligned}$$

Zbog toga je partikularno rješenje polazne jednadžbe jednako:

$$y_p = C_1 \cdot y_1 + C_2 \cdot y_2 = \ln(\cos z) \cdot \cos z + z \cdot \sin z,$$

pa je opće rješenje polazne jednadžbe:

$$y = y_h + y_p = C_1 \cdot \cos z + C_2 \cdot \sin z + \ln(\cos z) \cdot \cos z + z \cdot \sin z, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

**2. način** (pomoću formule iz zadatka 3.): Uz oznake kao u 1. načinu imamo:

$$\begin{aligned} u &= \frac{y_2}{y_1} = \tan z, \quad v = \frac{f}{y_1} = \frac{1}{\cos^2 z} \Rightarrow \\ u' &= \frac{1}{\cos^2 z}, \quad \frac{v}{u} = 1 \Rightarrow \\ y_p &= \cos z \cdot \left( \int \frac{1}{\cos^2 z} \cdot \left( \int 1 \cdot dz \right) \cdot dz \right) = \cos z \cdot \left( \int \frac{z}{\cos^2 z} \cdot dz \right) = \left| \begin{array}{l} u = z \quad v = \int \frac{1}{\cos^2 z} \cdot dz = \tan z \\ du = dz \quad dv = \frac{1}{\cos^2 z} \end{array} \right| = \\ &= \cos z \cdot \left( z \cdot \tan z - \int \tan z \cdot dz \right) = \cos z \cdot \left( z \cdot \frac{\sin z}{\cos z} - (-\ln(\cos z)) \right) = z \cdot \sin z + \cos z \cdot \ln(\cos z). \end{aligned}$$

Dobili smo partikularno rješenje jednako onom dobivenom prvim načinom, pa je i opće rješenje polazne jednadžbe jednako onom dobivenom prvim načinom.

**Napomena:** U prvom smo načinu dobili dva tablična integrala. Njih smo vrlo lako odredili. U drugom smo načinu najprije dobili jedan vrlo lagani tablični integral, a potom integral koji smo odredili metodom djelomične integracije. U ovome je slučaju, dakle, bilo nešto lakše primjeniti prvi način određivanja partikularnoga rješenja. Međutim, ponovimo i istaknimo: *to nije pravilo*, tj. „težina“ svakoga pojedinoga načina ovisi o polaznoj jednadžbi, pa ne možemo unaprijed procijeniti koji način je brži i lakši.

 TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU POLYTECHNICUM ZAGABRIENSE Elektrotehnički odjel	<b>Matematika 2</b> (preddiplomski stručni studij elektrotehnike)	<b>3.7. Metoda varijacije konstanti – riješeni zadaci</b>
---	---	---

## Domaća zadaća

Metodom varijacije konstanti riješite sljedeće jednadžbe:

**1.**  $y'' + y = \operatorname{ctg} t.$

**2.**  $y'' + 2 \cdot y' + y = \frac{e^{-x}}{x}.$

**3.**  $y'' + y = \frac{1}{\sin t}.$

**4.**  $y'' - 4 \cdot y' + 4 \cdot y = 32 \cdot \operatorname{ch}(2 \cdot x).$

**5.**  $y'' + 4 \cdot y = 4 \cdot \sin(2 \cdot t).$

### Rezultati zadataka za domaću zadaću:

*Napomena:* U svim rezultatima zadataka su  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$  konstante.

**1.**  $y = C_1 \cdot \cos t + C_2 \cdot \sin t + \sin t \cdot \ln\left(\operatorname{tg}\left(\frac{t}{2}\right)\right).$

**2.**  $y = C_1 \cdot x \cdot e^{-x} + C_2 \cdot e^{-x} + x \cdot \ln x \cdot e^{-x}.$

**3.**  $y = C_1 \cdot \cos t + C_2 \cdot \sin t - t \cdot \cos t + \sin t \cdot \ln(\sin t).$

**4.** *Upita:*  $32 \cdot \operatorname{ch}(2 \cdot x) = 16 \cdot (e^{2 \cdot x} + e^{-2 \cdot x}).$  Dobiva se:  $y = C_1 \cdot x \cdot e^{2 \cdot x} + C_2 \cdot e^{2 \cdot x} + 8 \cdot \beta^2 \cdot e^{2 \cdot x} + e^{-2 \cdot x}.$

**5.**  $y = C_1 \cdot \cos(2 \cdot t) + C_2 \cdot \sin(2 \cdot t) - t \cdot \cos(2 \cdot t).$