

| | | |
|---|---|--|
|  TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU POLYTECHNICUM ZAGREBIENSE Elektrotehnički odjel | Matematika 2 (preddiplomski stručni studij elektrotehnike) | 3.8. Primjeri primjene ODJ 1. i 2. reda – riješeni zadaci |
|---|---|--|

Primjer 1. Određivanje starosti kostura pomoću ugljikova izotopa

Zadatak: Vrijeme poluraspada radioaktivnoga ugljika iznosi 5730 godina. Količina toga ugljika danas pronađenoga u kosturu nekoga organizma jednaka je 60% količine istoga ugljika koja se nalazi u živom organizmu. Procijenite starost kostura (zaokružite rezultat na najbliži prirodan broj).

Napomene: 1.) Trenutna brzina radioaktivnoga raspada nekoga materijala u trenutku t proporcionalna je količini toga materijala koji se još nije raspao do toga trenutka. Ona je negativna jer se količina neraspadnutoga materijala smanjuje tijekom vremena.
 2.) Vrijeme poluraspada je vrijeme (računajući od trenutka $t = 0$) potrebno da se količina radioaktivnoga materijala smanji na polovicu prvotnoga iznosa.

Rješenje: Neka su $x_0 \neq 0$ količina izotopa u trenutku $t = 0$, a $x = x(t)$ količina izotopa preostalog u tijelu nakon smrti organizma. Trenutna brzina radioaktivnoga raspada materijala je prva derivacija količine preostalog izotopa po vremenu. Prepostavka da je ona proporcionalna količini preostalog izotopa znači da postoji $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ takav da se trenutna brzina raspada u svakom trenutku dobije množenjem količine izotopa u tom istom trenutku konstantom k .

Na temelju podataka u zadatku možemo postaviti sljedeći Cauchyjev problem:

$$\begin{cases} \dot{x} = k \cdot x, \\ x(0) = x_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x} - k \cdot x = 0, \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

Dobivena obična diferencijalna jednadžba je homogena linearna obična diferencijalna jednadžba 1. reda. Riješimo tu jednadžbu primjenom formule za određivanje općega rješenja ovoga tipa jednadžbe. Očitamo:

$$P(x) = -k,$$

pa slijedi:

$$x(t) = C \cdot e^{\int k dt} = C \cdot e^{k \int 1 dt} = C \cdot e^{k \cdot t}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Uvrštavanjem $t = 0$ i $x_0 = x(0)$ u dobiveni izraz dobijemo:

$$x_0 = C \cdot e^{k \cdot 0} \Leftrightarrow C = x_0.$$

Dakle, rješenje promatranoga Cauchyjeva problema je funkcija:

$$x(t) = x_0 \cdot e^{k \cdot t}.$$

| | | |
|---|---|--|
|  TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU POLYTECHNICUM ZAGREBIENSE Elektrotehnički odjel | Matematika 2 (preddiplomski stručni studij elektrotehnike) | 3.8. Primjeri primjene ODJ 1. i 2. reda – riješeni zadaci |
|---|---|--|

Iskažimo konstantu k pomoću vremena poluraspada. Označimo to vrijeme s τ (to je standardna oznaka za vrijeme poluraspada u fizici). Prema definiciji vremena poluraspada iskazanoj u drugoj napomeni, količina izotopa u trenutku $t = \tau$ jednaka je polovici početne količine izotopa. To znači da vrijedi jednakost:

$$x(\tau) = \frac{1}{2} \cdot x_0.$$

Uvrštavanjem $t = \tau$ u gornju jednadžbu dobijemo:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot x_0 &= x_0 \cdot e^{k \cdot \tau}, \quad / : x_0 \neq 0 \\ \frac{1}{2} &= e^{k \cdot \tau}, \quad / \ln \\ k \cdot \tau &= \ln\left(\frac{1}{2}\right), \\ k &= \frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{\tau} = \frac{\overset{=0}{\ln 1} - \ln 2}{\tau} = \frac{-\ln 2}{\tau}. \end{aligned}$$

Tako slijedi:

$$x(t) = x_0 \cdot e^{\frac{-\ln 2}{\tau} t}.$$

Neka je t_0 traženo vrijeme. Znamo da danas u kosturu ima 60% količine izotopa u živom organizmu. U živom organizmu ta je količina jednaka x_0 . Zbog toga mora vrijediti jednakost:

$$x(t_0) = 0.6 \cdot x_0.$$

Riješimo tu jednadžbu po nepoznanici t_0 . Imamo redom:

$$\begin{aligned} 0.6 \cdot x_0 &= x_0 \cdot e^{\frac{-\ln 2}{\tau} \cdot t_0}, \quad / : x_0 \neq 0 \\ e^{\frac{-\ln 2}{\tau} \cdot t_0} &= 0.6, \quad / \ln \\ \frac{-\ln 2}{\tau} \cdot t_0 &= \ln 0.6, \\ t_0 &= \frac{-\ln 0.6}{\ln 2} \cdot \tau = \frac{-\ln 0.6}{\ln 2} \cdot 5730 \approx 4223 \text{ godine.} \end{aligned}$$

Primjer 2. Otapanje krutoga tijela u otapalu

Zadatak: Kruto tijelo mase m uronjeno je u otapalo. Trenutna brzina rastvaranja u trenutku t proporcionalna je masi nerastvorenoga dijela tijela u istom trenutku. Nadite ovisnost mase rastvorenoga tijela o vremenu.

Rješenje: Neka su $x = x(t)$ masa rastvorene tvari u trenutku t , te k faktor proporcionalnosti trenutne brzine rastvaranja tijela u trenutku t i mase nerastvorenoga dijela tijela u tom trenutku. Želimo odrediti pravilo funkcije x .

Ako je u trenutku t masa rastvorenoga dijela tijela jednaka $x(t)$, onda je masa nerastvorenoga dijela tijela u tom istom trenutku jednaka $m - x(t)$. Ta je masa proporcionalna trenutnoj brzini rastvaranja tijela, a ta je brzina jednaka prvoj derivaciji funkcije x po vremenu t . Također, u početnom trenutku, tj. u trenutku $t = 0$ masa rastvorene tvari jednaka je 0.

Na temelju ovih razmatranja, analogno kao u primjeru 1. dobivamo sljedeći Cauchyev problem:

$$\begin{cases} \dot{x} = k \cdot (m - x), \\ x(0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x} + k \cdot x = k \cdot m, \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

Prva jednadžba je nehomogena linearna obična diferencijalna jednadžba 1. reda. Očitamo $P(t) = k$, $Q(t) = k \cdot m$, pa uvrštavanjem tih izraza u formulu za opće rješenje navedenoga tipa jednadžbe dobivamo:

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-\int k \cdot dt} \cdot \left(\int k \cdot m \cdot e^{\int k \cdot dt} \cdot dt + C \right) = e^{-k \cdot \int 1 \cdot dt} \cdot \left(k \cdot m \cdot \int e^{k \cdot \int 1 \cdot dt} \cdot dt + C \right) = \\ &= e^{-k \cdot t} \cdot \left(k \cdot m \cdot \int e^{k \cdot t} \cdot dt + C \right) = e^{-k \cdot t} \cdot \left(k \cdot m \cdot \frac{1}{k} \cdot e^{k \cdot t} + C \right) = e^{-k \cdot t} \cdot (m \cdot e^{k \cdot t} + C) = C \cdot e^{k \cdot t} + m, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Uvrštavanjem $t = 0$ i $x(0) = 0$ dobivamo:

$$0 = C \cdot e^{k \cdot 0} + m \Leftrightarrow C + m = 0 \Leftrightarrow C = -m.$$

Dakle, rješenje zadatka je funkcija:

$$x(t) = m \cdot (1 - e^{-k \cdot t}).$$

| | | |
|--|---|--|
|  TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU POLYTECHNICUM ZAGREBIENSE Elektrotehnički odjel | Matematika 2 (preddiplomski stručni studij elektrotehnike) | 3.8. Primjeri primjene ODJ 1. i 2. reda – riješeni zadaci |
|--|---|--|

Primjer 3. Populacijska jednadžba

Zadatak: Neka kultura bakterija na početku ima ukupno 5000 bakterija. Trenutna stopa rasta broja bakterija u trenutku t proporcionalna je broju bakterija u tom trenutku. Nakon tri sata populacija je narasla na 9000 bakterija. Odredite ukupan broj bakterija nakon devet sati rasta.

Rješenje: Neka je $N = N(t)$ ukupan broj bakterija u trenutku t . Znamo da je $N(0) = 5000$. Trenutna stopa rasta broja bakterija jednaka je prvoj derivaciji funkcije N po vremenu t . Ta je stopa proporcionalna broju bakterija u istom trenutku, što znači da postoji $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ takav da pomnožen sa brojem bakterija u trenutku t daje trenutnu stopu rasta u istom trenutku. Naposljetku, znamo da nakon tri sata u kulturi ima ukupno 9000 bakterija, što znači da je $N(3) = 9000$.

Tako dobivamo sljedeći Cauchyjev problem:

$$\begin{cases} N' = k \cdot N, \\ N(0) = 5000, \\ N(3) = 9000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} N' - k \cdot N = 0, \\ N(0) = 5000, \\ N(3) = 9000. \end{cases}$$

Prva jednadžba je homogena linearna obična diferencijalna jednadžba 1. reda. Potpuno analogno kao u primjeru 1. dobijemo:

$$N(t) = C \cdot e^{\int k \cdot dt} = C \cdot e^{k \cdot \int 1 \cdot dt} = C \cdot e^{k \cdot t}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

U tu jednakost najprije uvrstimo $t = 0$, $N(0) = 5000$. Dobivamo:

$$5000 = C \cdot e^{k \cdot 0} \Leftrightarrow 5000 = C \cdot 1 \Leftrightarrow C = 5000.$$

Sada u istu jednakost uvrstimo $t = 3$, $C = 5000$ i $N(3) = 9000$. Dobijemo:

$$9000 = 5000 \cdot e^{k \cdot 3} \Leftrightarrow e^{k \cdot 3} = 1.8 \Leftrightarrow 3 \cdot k = \ln 1.8 \Leftrightarrow k = \frac{\ln 1.8}{3}.$$

Zbog toga je:

$$N(t) = 5000 \cdot e^{\frac{\ln 1.8}{3} \cdot t}.$$

Preostaje izračunati $N(9)$. Odmah dobivamo:

$$N(9) = 5000 \cdot e^{\frac{\ln 1.8}{3} \cdot 9} = 5000 \cdot e^{3 \cdot \ln 1.8} = 5000 \cdot e^{\ln(1.8^3)} = 5000 \cdot 1.8^3 = 29\,160.$$

| | | |
|--|---|--|
|  TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU POLYTECHNICUM ZAGREBIENSE Elektrotehnički odjel | Matematika 2 (preddiplomski stručni studij elektrotehnike) | 3.8. Primjeri primjene ODJ 1. i 2. reda – riješeni zadaci |
|--|---|--|

Primjer 4. Logistička jednadžba

U nekoj populaciji čudnovatih kljunaša u početnom trenutku ima ukupno P_0 jedinki. Zbog prostornih ograničenja, populacija može podnijeti ukupno najviše P_{\max} jedinki. Trenutna stopa rasta broja jedinki k se smanjuje što se ukupan broj jedinki više približava broju P_{\max} . Takvo ponašanje populacije modelira se tzv. *logističkom jednadžbom*:

$$P' = k \cdot P \cdot \left(1 - \frac{P}{P_{\max}}\right).$$

Odredite eksplizitni oblik pravila funkcije P u zavisnosti o vremenu t .

Rješenje: Obična diferencijalna jednadžba je već zadana. Dodat ćemo joj početni uvjet $P(0) = P_0$ jer populacija u početnom trenutku ima ukupno P_0 jedinki. Tako dobivamo sljedeći Cauchyjev problem:

$$\begin{cases} P' = k \cdot P \cdot \left(1 - \frac{P}{P_{\max}}\right), \\ P(0) = P_0. \end{cases}$$

Riješimo taj problem. Običnu diferencijalnu jednadžbu možemo zapisati u obliku:

$$P' - k \cdot P = \left(-\frac{k}{P_{\max}}\right) \cdot P^2.$$

Vidimo da se radi o Bernoullijevoj običnoj diferencijalnoj jednadžbi. Riješimo je na uobičajen način. Očitamo:

$$p(t) = -k, \quad q(t) = -\frac{k}{P_{\max}}, \quad k = 2,$$

pa redom imamo:

$$\begin{aligned} g(x) &= e^{(1-k) \cdot \int p(t) dt} = e^{(1-2) \cdot \int (-k) dt} = e^{-(-k) \cdot \int 1 dt} = e^{k \cdot t}, \\ P^{2-1}(t) &= \frac{e^{k \cdot t}}{(1-2) \cdot \int \left(-\frac{k}{P_{\max}}\right) \cdot e^{k \cdot t} dt + C} \Leftrightarrow P(t) = \frac{e^{k \cdot t}}{(-1) \cdot \left(-\frac{1}{P_{\max}}\right) \int k \cdot e^{k \cdot t} dt + C} = \frac{e^{k \cdot t}}{\frac{1}{P_{\max}} \cdot e^{k \cdot t} + C} = \\ &= \frac{P_{\max} \cdot e^{k \cdot t}}{e^{k \cdot t} + \underbrace{C \cdot P_{\max}}_{=: C_1}} = \frac{P_{\max} \cdot e^{k \cdot t}}{e^{k \cdot t} + C_1}. \end{aligned}$$

| | | |
|---|---|--|
|  TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU POLYTECHNICUM ZAGREBIENSE Elektrotehnički odjel | Matematika 2 (preddiplomski stručni studij elektrotehnike) | 3.8. Primjeri primjene ODJ 1. i 2. reda – riješeni zadaci |
|---|---|--|

Nepoznatu realnu konstantu C_1 odredimo iz početnoga uvjeta $P(0) = P_0$. U dobiveno pravilo uvrstimo $t = 0$, $P(0) = P_0$, pa dobijemo:

$$P_0 = \frac{P_{\max} \cdot e^{k \cdot 0}}{e^{k \cdot 0} + C_1} \Leftrightarrow P_0 = \frac{P_{\max} \cdot 1}{1 + C_1} \Leftrightarrow 1 + C_1 = \frac{P_{\max}}{P_0} \Leftrightarrow C_1 = \frac{P_{\max}}{P_0} - 1.$$

Tako konačno imamo:

$$P(t) = \frac{P_{\max} \cdot e^{k \cdot t}}{e^{k \cdot t} + \frac{P_{\max}}{P_0} - 1} = \frac{P_0 \cdot P_{\max} \cdot e^{k \cdot t}}{P_0 \cdot e^{k \cdot t} + P_{\max} - P_0}.$$

Primjer 5. a) Slobodni pad bez otpora zraka

Zadatak: Kojom brzinom će na tlo pasti tijelo bačeno s visine h u polju Zemljine sile teže? Otpor zraka zanemarujemo. Prepostavljamo da je početna brzina tijela $v = 0$.

Rješenje: Prema 2. Newtonovu zakonu, tijelo mase m pod utjecajem sile F giba se ubrzanjem a tako da vrijedi jednakost $F = m \cdot a$. Zamislimo tijelo kao materijalnu točku. Smjestimo ga u pravokutni koordinatni sustav u ravnini tako da se tijelo na početku gibanja nalazi u ishodištu i da je pozitivan dio osi apscisa okrenut prema dolje.

Tada je $a = g = 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, pa dobivamo Cauchyjev problem:

$$\begin{cases} m \cdot x'' = m \cdot g, \\ x(0) = 0, \\ x'(0) = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'' = g, \\ x(0) = 0, \\ x'(0) = 0. \end{cases}$$

Navedeni početni uvjeti proizlaze iz zahtjeva da se na početku gibanja tijelo nalazi u ishodištu i da mu je početna brzina jednaka nuli.

Pripadnu nehomogenu običnu diferencijalnu jednadžbu 2. reda s konstantnim koeficijentima najlakše i najbrže riješimo dvostrukim integriranjem. Tako dobivamo:

$$\begin{aligned} x' &= \int g \cdot dt = g \cdot \int 1 \cdot dt = g \cdot t + C_1, \\ x(t) &= \int (g \cdot t + C_1) \cdot dt = g \cdot \int t \cdot dt + C_1 \cdot \int 1 \cdot dt = g \cdot \frac{1}{2} \cdot t^2 + C_1 \cdot t + C_2 = \frac{g}{2} \cdot t^2 + C_1 \cdot t + C_2, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Nepoznate realne konstante C_1 i C_2 odredimo koristeći početne uvjete.

Uvrštavanjem $t = 0$ i $x(0) = 0$ u pravilo funkcije x odmah dobivamo $C_2 = 0$.

Uvrštavanjem $t = 0$ i $x'(0) = 0$ u pravilo funkcije x' odmah dobivamo $C_1 = 0$.

| | | |
|--|---|--|
|  TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU POLYTECHNICUM ZAGREBIENSE Elektrotehnički odjel | Matematika 2 (preddiplomski stručni studij elektrotehnike) | 3.8. Primjeri primjene ODJ 1. i 2. reda – riješeni zadaci |
|--|---|--|

Dakle, rješenje promatranoga Cauchyjeva problema je funkcija

$$x(t) = \frac{g}{2} \cdot t^2.$$

U trenutku t_1 završetka gibanja (pada) vrijedi $x(t_1) = h$, pa uvrštavanjem $t = t_1$ i $x(t_1) = h$ u pravilo funkcije x slijedi:

$$\begin{aligned} h &= \frac{g}{2} \cdot t_1^2, \\ t_1^2 &= \frac{2 \cdot h}{g}, \\ t_1 &= \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}}. \end{aligned}$$

Zbog toga je tražena brzina jednaka

$$v = (x')_{t=t_1} = (x')_{t=\sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}}} = g \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}} = \sqrt{g^2 \cdot \frac{2 \cdot h}{g}} = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}.$$

b) Slobodni pad s otporom zraka

Zadatak: Riješite prethodni zadatak uz pretpostavku da je otpor zraka proporcionalan brzini tijela. Utvrdite što se događa kad $t \rightarrow \infty$.

Rješenje: Budući da je otpor zraka proporcionalan brzini tijela, jednadžbu gibanja zapisat ćemo koristeći brzinu tijela kao nepoznatu funkciju $v = v(t)$. Tako se dobiva Cauchyjev problem:

$$\begin{cases} m \cdot v' = m \cdot g - k \cdot v, \\ v(0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \cdot v' + k \cdot v = m \cdot g, \\ v(0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v' + \frac{k}{m} \cdot v = g, \\ v(0) = 0. \end{cases}$$

Prva jednadžba je nehomogena linearna obična diferencijalna jednadžba 1. reda. Očitamo: $P(t) = \frac{k}{m}$, $Q(t) = g$, pa uvrštavanjem u formulu za opće rješenje navedenoga tipa jednadžbe dobivamo:

$$\begin{aligned} v(t) &= e^{-\int \frac{k}{m} dt} \cdot \left(\int g \cdot e^{\int \frac{k}{m} dt} \cdot dt + C \right) = e^{-\frac{k}{m} \int 1 dt} \cdot \left(g \cdot \int e^{\frac{k}{m} t} \cdot dt + C \right) = e^{-\frac{k}{m} t} \cdot \left(g \cdot \int e^{\frac{k}{m} t} \cdot dt + C \right) = \\ &= e^{-\frac{k}{m} t} \cdot \left(g \cdot \frac{m}{k} \cdot e^{\frac{k}{m} t} + C \right) = C \cdot e^{-\frac{k}{m} t} + \frac{m \cdot g}{k}, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

| | | |
|--|---|--|
|  TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE Elektrotehnički odjel | Matematika 2 (preddiplomski stručni studij elektrotehnike) | 3.8. Primjeri primjene ODJ 1. i 2. reda – riješeni zadaci |
|--|---|--|

Uvrštavanjem početnoga uvjeta slijedi:

$$0 = C \cdot e^{-\frac{k}{m} \cdot 0} + \frac{m \cdot g}{k} \Leftrightarrow C + \frac{m \cdot g}{k} = 0 \Leftrightarrow C = -\frac{m \cdot g}{k}.$$

Dakle, rješenje zadatka je funkcija:

$$v = v(t) = \frac{m \cdot g}{k} \cdot \left(1 - e^{-\frac{k}{m} \cdot t} \right).$$

Primjer 6. Druga kozmička brzina

Zadatak: Tijelo koje nastoji „pobjeći“ iz gravitacijskoga polja nekoga planeta mora se udaljavati od toga planeta nekom najmanjom brzinom. Odredite tu brzinu za tijelo izbačeno s površine Zemlje.

Opća gravitacijska konstanta iznosi $G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$. Masa Zemlje iznosi $m = 5.975 \cdot 10^{24} \text{ kg}$. Polumjer Zemlje iznosi $r = 6.371 \cdot 10^6 \text{ m}$.

Napomena: Predznak brzine je pozitivan ako se tijelo udaljuje od planeta.

Rješenje: Neka je $x = x(t)$ udaljenost tijela od središta Zemlje u trenutku t . Sila koja djeluje na tijelo u točki x je privlačna Zemljina sila dana izrazom $F = G \cdot \frac{m \cdot m_1}{x^2}$, gdje je m_1 masa tijela. Tijelo mora savladati tu силу gibajući se ubrzano, i to s ubrzanjem jednakim drugoj derivaciji funkcije x po vremenu t .

U početnom trenutku tijelo se nalazi na površini Zemlje, pa je od središta Zemlje udaljeno R metara. To znači da je $x(0) = R$.

Naposljeku, početna brzina tijela je neka brzina $v_0 \neq 0$. Ona je jednaka prvoj derivaciji funkcije x po vremenu t u trenutku $t = 0$, pa je $x'(0) = v_0$.

Tako smo dobili sljedeći Cauchyjev problem:

$$\begin{cases} m_1 \cdot x'' = -G \cdot \frac{m \cdot m_1}{x^2}, \\ x(0) = R, \\ x'(0) = v_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'' = -G \cdot \frac{m}{x^2}, \\ x(0) = R, \\ x'(0) = v_0 \end{cases}$$

Prvu (običnu diferencijalnu) jednadžbu transformiramo na sljedeći način:

| | | |
|---|---|--|
|  TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU POLYTECHNICUM ZAGREBIENSE Elektrotehnički odjel | Matematika 2 (preddiplomski stručni studij elektrotehnike) | 3.8. Primjeri primjene ODJ 1. i 2. reda – riješeni zadaci |
|---|---|--|

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -G \cdot \frac{m}{x^2} \Leftrightarrow \frac{dv}{dt} = -G \cdot \frac{m}{x^2} \Leftrightarrow \frac{dv}{dx} \cdot \underbrace{\frac{dx}{dt}}_{=v} = -G \cdot \frac{m}{x^2} \Leftrightarrow v \cdot \frac{dv}{dx} = -G \cdot \frac{m}{x^2} \Leftrightarrow v \cdot dv = -G \cdot m \cdot \frac{1}{x^2} \cdot dx.$$

Ova jednadžba je obična diferencijalna jednadžba 1. reda sa razdvojenim varijablama. Njezinim integriranjem dobijemo:

$$\begin{aligned} \int v \cdot dv &= \int -G \cdot m \cdot \frac{1}{x^2} \cdot dx + C, \\ \frac{1}{2} \cdot v^2 &= -G \cdot m \cdot \int \frac{1}{x^2} \cdot dx + C, \\ \frac{1}{2} \cdot v^2 &= -G \cdot m \cdot \left(-\frac{1}{x} \right) + C, \quad / \cdot 2 \\ v^2 &= \frac{2 \cdot G \cdot m}{x} + \underbrace{2 \cdot C}_{=:C_1}, \\ v^2 &= \frac{2 \cdot G \cdot m}{x} + C_1. \end{aligned}$$

U ovu jednakost uvrstimo $t=0$. Prema početnim uvjetima vrijede jednakosti $v(0)=v_0$ i $x(0)=x_0$, pa dobivamo:

$$v_0^2 = \frac{2 \cdot G \cdot m}{R} + C_1 \Leftrightarrow C_1 = v_0^2 - \frac{2 \cdot G \cdot m}{R}.$$

Uvrstimo ovaj izraz u izraz za određivanje brzine v , pa lako dobivamo:

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot m}{x} + v_0^2 - \frac{2 \cdot G \cdot m}{R}}.$$

Najviša visina koju će dosegnuti tijelo dobiva se za $v=0$. Zbog toga izjednačimo gornji izraz s nulom i riješimo dobivenu jednadžbu po nepoznanici x . Imamo:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{2 \cdot G \cdot m}{x} + v_0^2 - \frac{2 \cdot G \cdot m}{R}, \\ \frac{2 \cdot G \cdot m}{x} &= \frac{2 \cdot G \cdot m}{R} - v_0^2, \\ \frac{x}{2 \cdot G \cdot m} &= \frac{1}{\frac{2 \cdot G \cdot m}{R} - v_0^2}, \quad / \cdot 2 \cdot G \cdot m \\ x &= \frac{2 \cdot G \cdot m \cdot R}{2 \cdot G \cdot m - R \cdot v_0^2}. \end{aligned}$$

Odavde izrazimo početnu brzinu v_0 . Dobijemo:

| | | |
|---|---|--|
|  TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU POLYTECHNICUM ZAGREBIENSE Elektrotehnički odjel | Matematika 2 (preddiplomski stručni studij elektrotehnike) | 3.8. Primjeri primjene ODJ 1. i 2. reda – riješeni zadaci |
|---|---|--|

$$x = \frac{2 \cdot G \cdot m \cdot R}{2 \cdot G \cdot m - R \cdot v_0^2} \Leftrightarrow 2 \cdot G \cdot m - R \cdot v_0^2 = \frac{2 \cdot G \cdot m \cdot R}{x} \Leftrightarrow 2 \cdot G \cdot m - \frac{2 \cdot G \cdot m \cdot R}{x} = R \cdot v_0^2 \Leftrightarrow$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{1}{R} \cdot \left(2 \cdot G \cdot m - \frac{2 \cdot G \cdot m \cdot R}{x} \right)} = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot m}{R} - \frac{2 \cdot G \cdot m}{x}}.$$

U ovom izrazu pustimo $x \rightarrow +\infty$, pa konačno dobijemo:

$$v_0 = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot m}{R} - 0} = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot m}{R}} = 11.2 \frac{\text{km}}{\text{s}}.$$

Primjer 7. Problem mase tvari u otopini

Zadatak: U spremniku se nalazi ukupno V litara vodene otopine s ukupno m kilograma soli. Voda utječe u spremnik stalnom brzinom od v_1 litara u jedinici vremena. Vodena otopina istječe iz spremnika stalnom brzinom od v_2 litara u jedinici vremena, pri čemu je $v_2 < v_1$. Jednolika koncentracija soli u otopini održava se stalnim miješanjem. Odredite masu soli u spremniku po isteku vremena t .

Rješenje: Pojasnjimo najprije neke pojmove korištene u ovom zadatku. *Koncentracija* (oznaka: c) neke tvari u otopini je masa te tvari po jedinici volumena. Dakle, u ovom je slučaju koncentracija soli jednaka masi soli u jednoj litri otopine. Prema prepostavci, ona je jednolika, odnosno stalna, jer se održava stalnim miješanjem.

Iz definicije koncentracije tvari u otopini zaključujemo da je masa te tvari u otopini jednaka umnošku koncentracije tvari u otopini i volumena otopine:

$$m = c \cdot V.$$

Vratimo se na problem koji rješavamo. Neka je $m_s = m_s(t)$ masa soli u spremniku po isteku vremena t . Želimo odrediti pravilo funkcije m_s . Pogledajmo što znamo o vrijednostima veličina iz zadatka u trenutku t .

Ako u jedinici vremena u spremnik dotekne v_1 litara vode, a istovremeno iz spremnika istekne v_2 litara vodene otopine, onda se u jedinici vremena volumen otopine u spremniku promijeni za ukupno $v_1 - v_2$ litara. Zbog prepostavke o jednolikim brzinama utjecanja vode, odnosno istjecanja vodene otopine, to znači da će po isteku vremena t u spremniku biti ukupno $V + (v_1 - v_2) \cdot t$ vodene otopine. Dakle, koncentracija soli u otopini po isteku vremena t iznosit će:

$$c = \frac{m_s(t)}{V + (v_1 - v_2) \cdot t} \text{ kilograma po litri.}$$

| | | |
|--|---|--|
|  TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU POLYTECHNICUM ZAGREBIENSE Elektrotehnički odjel | Matematika 2 (preddiplomski stručni studij elektrotehnike) | 3.8. Primjeri primjene ODJ 1. i 2. reda – riješeni zadaci |
|--|---|--|

Pogledajmo kako opisati trenutnu promjenu mase soli u spremniku po jedinici vremena. U toj jedinici iz spremnika istekne v_2 litara otopine. U tih v_2 litara otopine ima ukupno $c \cdot v_2$ kilograma soli. To znači da je *trenutna brzina promjene mase soli u otopini* s jedne strane jednak prvoj derivaciji mase soli po vremenu (to vrijedi uvijek), a s druge strane umnošku $c \cdot v_2$ (to vrijedi u ovom zadatku), pa možemo pisati:

$$\frac{dm_s}{dt} = -c \cdot v_2.$$

(Negativan predznak desne strane jednakosti sugerira da se radi o smanjenju mase.) U tu jednakost uvrstimo ranije dobiveni izraz za c , pa dobijemo:

$$\frac{dm_s}{dt} = -\frac{m_s}{V + (v_1 - v_2) \cdot t} \cdot v_2.$$

Ovo je obična diferencijalna jednadžba s nepoznanicom m_s . Zapišimo je u standardnom obliku:

$$m_s' + \frac{v_2}{V + (v_1 - v_2) \cdot t} \cdot m_s = 0.$$

Vidimo da se radi o homogenoj linearnej običnoj diferencijalnoj jednadžbi 1. reda. Očitamo:

$$p(t) = \frac{v_2}{V + (v_1 - v_2) \cdot t},$$

pa uvrštavanjem u „gotovu“ formulu za rješenje navedenoga tipa obične diferencijalne jednadžbe dobivamo:

$$\begin{aligned} m_s(t) &= C \cdot e^{-\int \frac{v_2}{V + (v_1 - v_2) \cdot t} dt} = C \cdot e^{\frac{-v_2}{v_1 - v_2} \ln(V + (v_1 - v_2) \cdot t)} = C \cdot e^{\ln\left((V + (v_1 - v_2) \cdot t)^{\frac{-v_2}{v_1 - v_2}}\right)} = \\ &= C \cdot (V + (v_1 - v_2) \cdot t)^{\frac{-v_2}{v_1 - v_2}} = \frac{C}{(V + (v_1 - v_2) \cdot t)^{\frac{v_2}{v_1 - v_2}}}. \end{aligned}$$

Ovo pravilo sadrži nepoznatu konstantu C . Nju ćemo odrediti iz početnoga uvjeta. Dosad nismo koristili podatak da je masa soli u početnom trenutku bila jednaka m . Zbog toga u gornju jednakost uvrstimo $t = 0$ i $m_s = m$, pa dobijemo:

$$m = \frac{C}{V^{\frac{v_2}{v_1 - v_2}}} \Leftrightarrow C = m \cdot V^{\frac{v_2}{v_1 - v_2}}.$$

| | | |
|---|---|--|
|  TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE Elektrotehnički odjel | Matematika 2 (preddiplomski stručni studij elektrotehnike) | 3.8. Primjeri primjene ODJ 1. i 2. reda – riješeni zadaci |
|---|---|--|

Dakle, rješenje zadatka je:

$$m_s(t) = \frac{m \cdot V^{\frac{v_2}{v_1-v_2}}}{(V + (v_1 - v_2) \cdot t)^{\frac{v_2}{v_1-v_2}}} = \frac{m}{\left(1 + \frac{v_1 - v_2}{V} \cdot t\right)^{\frac{v_2}{v_1-v_2}}}.$$

Npr. ako je na početku u spremniku bilo 100 litara vodene otopine s ukupno 10 kg soli i ako voda u spremnik utječe stalnom brzinom od 2 litre u minuti, a vodena otopina istječe iz spremnika stalnom brzinom od 1 litre u minuti, onda će nakon jednoga sata masa soli u otopini biti jednaka:

$$m_s(60) = \frac{10}{\left(1 + \frac{2-1}{100} \cdot 60\right)^{\frac{1}{2-1}}} = \frac{25}{4} = 6.25 \text{ kg.}$$

Primjer 8. Newtonov zakon hlađenja

Zadatak: Tijelo temperature T_0 smješteno je u prostoriju čija je temperatura T_p , pri čemu je $T_0 > T_p$. Brzina promjene temperature tijela proporcionalna je razlici temperature tijela i temperature prostorije. Odredite temperaturu tijela u trenutku t .

Rješenje: Neka je $T = T(t)$ temperatura tijela u trenutku t . Brzina promjene temperature tijela je prva derivacija funkcije T po vremenu t . Prema podacima u zadatku dobivamo običnu diferencijalnu jednadžbu:

$$T' = k \cdot (T - T_p).$$

Zapišimo tu jednadžbu u uobičajenom obliku:

$$T' - k \cdot T = -k \cdot T_p.$$

Vidimo da se radi o nehomogenoj linearnoj običnoj diferencijalnoj jednadžbi 1. reda. Očitamo: $p(t) = -k$, $q(t) = -k \cdot T_p$, pa uvrštavanjem u „gotovu“ formulu za rješenje navedenoga tipa jednadžbe dobivamo:

$$\begin{aligned} T(t) &= e^{-\int -k \, dt} \cdot \left(\int -k \cdot T_p \cdot e^{\int -k \, dt} \cdot dt + C \right) = e^{k \int 1 \, dt} \cdot \left(T_p \cdot \int -k \cdot e^{-k \int 1 \, dt} \cdot dt + C \right) = e^{k \cdot t} \cdot \left(T_p \cdot \int -k \cdot e^{-k \cdot t} \cdot dt + C \right) = \\ &= e^{k \cdot t} \cdot \left(T_p \cdot e^{-k \cdot t} + C \right) = C \cdot e^{-k \cdot t} + T_p. \end{aligned}$$

Nepoznatu konstantu C odredit ćemo iz početnoga uvjeta: $T(0) = T_0$. Uvrštavanjem $t=0$

i $T(0)=T_0$ u gornju jednakost dobijemo:

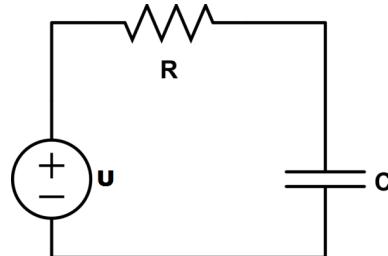
$$T_0 = C + T_p \Leftrightarrow C = T_0 - T_p.$$

Dakle, rješenje zadatka je:

$$T(t) = (T_0 - T_p) \cdot e^{-kt} + T_p.$$

Primjer 9. Serijski RC – krug

Zadatak: Serijski RC-krug se sastoji od serijski spojenih izvora napona (U), otpornika čiji je otpor R , kondenzatora čiji je kapacitet C i sklopke (vidjeti sliku 1.)



Slika 1.

Odredite naboј i napon na kondenzatoru, te jakost struje koja teče krugom u svakom od sljedećih slučajeva:

- a) Kondenzator u početnom trenutku nije nabijen.
- b) Prije uključenja prekidača kondenzator je nabijen početnim naboјem Q_0 .

U rješavanju obaju zadataka primijenite *drugo Kirchhoffovo pravilo*: U svakoj zatvorenoj petlji nekoga složenog strujnog kruga algebarski zbroj elektromotornih napona izvora u krugu jednak je algebarskomu zbroju padova napona na otporima.

Rješenje: Zasebno ćemo razmotriti svaki pojedini slučaj.

- a) Neka je $Q=Q(t)$ naboј na kondenzatoru u trenutku t . Pretpostavimo li da kondenzator u početnom trenutku nije nabijen, onda možemo zaključiti da je $Q(0)=0$. Kad zatvorimo prekidač, krugom počinje teći struja. Jakost te struje lagano možemo odrediti prema Ohmovom zakonu:

$$I_0 = \frac{U}{R}.$$

Iznos struje nabijanja kondenzatora u početku je relativno velik, ali se vremenom smanjuje kao posljedica opiranja dotoku istovrsnoga naboјa. Napon U_C na kondenzatoru

| | | |
|--|---|--|
|  TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU POLYTECHNICUM ZAGREBIENSE Elektrotehnički odjel | Matematika 2 (preddiplomski stručni studij elektrotehnike) | 3.8. Primjeri primjene ODJ 1. i 2. reda – riješeni zadaci |
|--|---|--|

se, međutim, povećava tijekom vremena, i to prema formuli:

$$U_c(t) = \frac{Q(t)}{R}.$$

Primjenom drugoga Kirchhoffova zakona dobivamo:

$$U - I(t) \cdot R - U_c(t) = 0.$$

Preostaje prisjetiti se veze između naboja i jakosti struje. Preciznije, znamo da je jakost struje derivacija naboja po vremenu:

$$I(t) = \frac{dQ(t)}{dt}.$$

Uvrštavanjem toga izraza i izraza za $U_c(t)$ Tako dobivamo jednadžbu:

$$U - R \cdot \frac{dQ}{dt} - \frac{Q(t)}{C} = 0.$$

Zapišimo tu običnu diferencijalnu jednadžbu u standardnom obliku:

$$Q' + \frac{1}{R \cdot C} \cdot Q = \frac{U}{R}.$$

Vidimo da smo dobili nehomogenu linearnu običnu diferencijalnu jednadžbu 1. reda. Očitamo: $p(t) = \frac{1}{R \cdot C}$, $q(t) = \frac{U}{R}$, pa uvrštavanjem u „gotovu“ formulu za opće rješenje navedenoga tipa jednadžbe dobijemo:

$$Q(t) = e^{-\int \frac{1}{R \cdot C} dt} \cdot \left(\int \frac{U}{R} \cdot e^{\int \frac{1}{R \cdot C} dt} \cdot dt + C_1 \right), \quad C_1 \in \mathbb{R}.$$

Veličine C , R i U su strogo pozitivne konstante, pa dalje imamo:

$$\begin{aligned} Q(t) &= e^{\frac{-1}{R \cdot C} \int 1 dt} \cdot \left(\frac{U}{R} \cdot \int e^{\frac{1}{R \cdot C} \int 1 dt} \cdot dt + C_1 \right) = e^{\frac{-1}{R \cdot C} t} \cdot \left(\frac{U}{R} \cdot \int e^{\frac{1}{R \cdot C} t} \cdot dt + C_1 \right) = e^{\frac{-1}{R \cdot C} t} \cdot \left(\frac{U}{R} \cdot R \cdot C \cdot e^{\frac{1}{R \cdot C} t} + C_1 \right) = \\ &= C_1 \cdot e^{\frac{-1}{R \cdot C} t} + U \cdot C. \end{aligned}$$

Nepoznatu konstantu C_1 odredimo iz uvjeta $Q(0) = 0$. U gornju jednakost uvrstimo $t = 0$ i $Q(0) = 0$, pa dobijemo:

$$C_1 + U \cdot C = 0 \Leftrightarrow C_1 = -U \cdot C.$$

Zbog toga je:

| | | |
|--|---|--|
|  TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU POLYTECHNICUM ZAGABRIENSE Elektrotehnički odjel | Matematika 2 (preddiplomski stručni studij elektrotehnike) | 3.8. Primjeri primjene ODJ 1. i 2. reda – riješeni zadaci |
|--|---|--|

$$Q(t) = U \cdot C - U \cdot C \cdot e^{\frac{-1}{R \cdot C} t} = U \cdot C \cdot \left(1 - e^{\frac{-1}{R \cdot C} t} \right).$$

Odatle slijedi da je napon na kondenzatoru u trenutku t jednak:

$$U_C(t) = \frac{Q(t)}{C} = U \cdot C \cdot \left(1 - e^{\frac{-1}{R \cdot C} t} \right),$$

dok je jakost struje koja teče cijelim strujnim krugom u trenutku t jednaka:

$$I(t) = Q'(t) = U \cdot C \cdot \left(0 - \left(-\frac{1}{R \cdot C} \right) \cdot e^{\frac{-1}{R \cdot C} t} \right) = \frac{U}{R} \cdot e^{\frac{-1}{R \cdot C} t} = I_0 \cdot e^{\frac{-1}{R \cdot C} t}.$$

Napomena: Veličina $\tau = R \cdot C$ često se naziva *vremenska konstanta*. Iz gornjih jednakosti lako slijedi da za $t = \tau$ napon na kondenzatoru poraste za iznos $\left(1 - \frac{1}{e}\right)U \approx 0.63212 \cdot U \approx 63\% \cdot U$, dok se jakost struje smanji na iznos $\frac{I_0}{e} \approx 0.3679 \cdot I_0 \approx 37\% \cdot I_0$.

Pritom treba primijetiti da je najveća moguća vrijednost napona jednaka U , najveća moguća vrijednost jakosti struje I_0 , a najveća moguća količina naboja koju mogu primiti ploče kondenzatora jednaka $U \cdot C$.

b) Sada pretpostavimo da je prije uključenja prekidača kondenzator nabijen početnim nabojem Q_0 . To znači da je početni napon na kondenzatoru jednak:

$$U_0 = \frac{Q(0)}{C} = \frac{Q_0}{C}.$$

Pad napona na otporniku na početku je jednak 0 jer struja ne teče kroz otpornik. Nakon uključenja prekidača, kondenzator se počinje prazniti preko otpornika. Zbog toga ga možemo smatrati izvorom napona. Tijekom njegova pražnjenja napon između ploča kondenzatora se smanjuje. Primjenom Kirchhoffova pravila dobijemo:

$$\frac{Q(t)}{C} - I(t) \cdot R = 0.$$

U ovom slučaju struja otjeće sa pozitivne ploče kondenzatora, pa vrijedi jednakost:

$$I(t) = -Q'(t)$$

Tako dobivamo običnu diferencijalnu jednadžbu:

$$\frac{Q}{C} - (-Q') \cdot R = 0 \Leftrightarrow Q + \frac{1}{R \cdot C} \cdot Q' = 0.$$

Vidimo da se radi o homogenoj linearnej običnoj diferencijalnoj jednadžbi 1. reda.

Očitamo: $p(t) = \frac{1}{R \cdot C}$, pa uvrštavanjem u „gotovu“ formulu za opće rješenje navedenoga tipa jednadžbe dobivamo:

$$Q(t) = C_1 \cdot e^{-\int \frac{1}{R \cdot C} dt} = C_1 \cdot e^{\frac{-1}{R \cdot C} \int 1 \cdot dt} = C_1 \cdot e^{\frac{-1}{R \cdot C} t}, \quad C_1 \in \mathbb{R}.$$

Nepoznatu konstantu C_1 odredimo iz početnoga uvjeta $Q(0) = 0$. Uvrštavanjem $t = 0$ i $Q(0) = 0$ u gornju jednakost odmah slijedi $C_1 = Q_0$. Zbog toga je:

$$Q(t) = Q_0 \cdot e^{\frac{-1}{R \cdot C} t}.$$

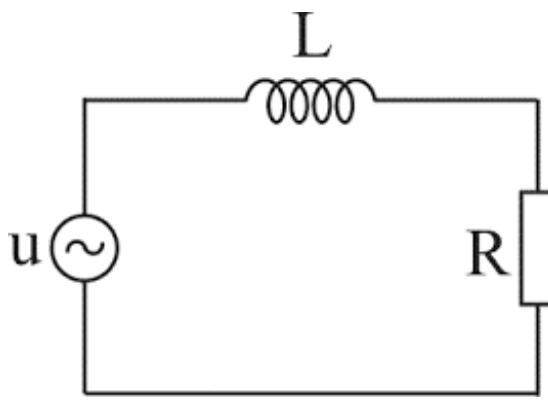
Analogno kao u a) podzadatku slijedi:

$$U_c(t) = \frac{Q(t)}{C} = \frac{Q_0}{C} \cdot e^{\frac{-1}{R \cdot C} t} = U_0 \cdot e^{\frac{-1}{R \cdot C} t},$$

$$I(t) = -Q'(t) = -Q_0 \cdot \left(-\frac{1}{R \cdot C} \right) \cdot e^{\frac{-1}{R \cdot C} t} = \frac{Q_0}{C} \cdot \frac{1}{R} \cdot e^{\frac{-1}{R \cdot C} t} = \frac{U_0}{R} \cdot e^{\frac{-1}{R \cdot C} t} = I_0 \cdot e^{\frac{-1}{R \cdot C} t}.$$

Napomena: Ako ponovno označimo $\tau = R \cdot C$, onda iz gornjih jednakosti lagano slijedi da se za vrijeme $t = \tau$ i napon na kondenzatoru i jakost struje koja protječe pri izbijanju kondenzatora tijekom toga vremena smanje na približno 37% svojega najvećega mogućega iznosa.

Primjer 10. Serijski RL – krug



Slika 2.

Zadatak: Serijski RL-krug se sastoji od serijski spojenih izvora napora (U), otpornika čiji je otpor R i zavojnice čiji je induktivitet L . Pretpostavimo da prekidač u krugu zatvorimo u trenutku $t = 0$. Odredite jakost struje u krugu i iznos samoinduciranoga napona u zavojnici u trenutku t .

| | | |
|---|---|--|
|  TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU POLYTECHNICUM ZAGREBIENSE Elektrotehnički odjel | Matematika 2 (preddiplomski stručni studij elektrotehnike) | 3.8. Primjeri primjene ODJ 1. i 2. reda – riješeni zadaci |
|---|---|--|

Rješenje: Zbog samoinducirane elektromotorne sile u zavojnici, bit će potrebno neko vrijeme da jakost struje koja teče krugom dosegne vrijednost određenu Ohmovim zakonom. Primjenom Kirchhoffova pravila (vidjeti prethodni primjer) dobivamo:

$$U - I \cdot R - |U_L| = 0,$$

gdje je $|U_L|$ samoinducirani napon na zavojnici. Podsjetimo se da se induktivitet zavojnice definira kao količnik samoinduciranoga napona i brzine kojom se mijenja jakost struje u zavojnici:

$$L = \frac{-U_L}{\frac{dI}{dt}}$$

(opet s negativnim predznakom jer se jakost struje u zavojnici vremenom povećava, pa se samoinducirani napon vremenom smanjuje). Odatle slijedi:

$$U_L = -L \cdot \frac{dI}{dt} \Leftrightarrow |U_L| = L \cdot \frac{dI}{dt} = L \cdot I'.$$

Uvrštavanjem toga izraza u izraz $U - I \cdot R - |U_L| = 0$ dobivamo:

$$U - I \cdot R - L \cdot I' = 0 \Leftrightarrow I' + \frac{R}{L} \cdot I = \frac{U}{L}.$$

Ponovno smo dobili nehomogenu linearnu običnu diferencijalnu jednadžbu 1. reda. Riješimo je potpuno analogno kao u prethodnim zadacima. Očitamo:

$$p(t) = \frac{R}{L}, \quad q(t) = \frac{U}{L},$$

pa uvrštavanjem u „gotovu“ formulu za rješavanje navedenoga tipa jednadžbe slijedi:

$$\begin{aligned} I(t) &= e^{-\int \frac{R}{L} dt} \cdot \left(\int \frac{U}{L} \cdot e^{\int \frac{R}{L} dt} \cdot dt + C \right) = e^{\frac{-R}{L} t} \cdot \left(\frac{U}{L} \cdot \int e^{\frac{R}{L} t} \cdot dt + C \right) = e^{\frac{-R}{L} t} \cdot \left(\frac{U}{L} \cdot \int e^{\frac{R}{L} t} \cdot dt + C \right) = \\ &= e^{\frac{-R}{L} t} \cdot \left(\frac{U}{L} \cdot \frac{L}{R} \cdot e^{\frac{R}{L} t} + C \right) = C \cdot e^{\frac{-R}{L} t} + \frac{U}{R}. \end{aligned}$$

Nepoznatu konstantu C odredimo iz početnoga uvjeta $I(0) = 0$. U gornju jednakost uvrstimo $t = 0$ i $I(0) = 0$, pa odmah dobijemo $C = -\frac{U}{R}$. Tako je:

$$I(t) = \frac{U}{R} - \frac{U}{R} \cdot e^{\frac{-R}{L} t} = \frac{U}{R} \cdot \left(1 - e^{\frac{-R}{L} t} \right).$$

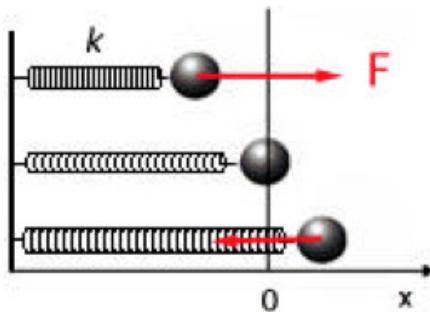
Vrijednost samoinduciranoga napona je jednaka:

$$|U_L(t)| = L \cdot I'(t) = L \cdot \frac{U}{R} \cdot \left(0 - \left(-\frac{R}{L} \cdot e^{\frac{-R}{L}t} \right) \right) = L \cdot \frac{U}{R} \cdot \frac{R}{L} \cdot e^{\frac{-R}{L}t} = U \cdot e^{\frac{-R}{L}t}.$$

Napomena: Vremenska konstanta za RL-krug iznosi $\tau = \frac{L}{R}$. Iz gornjih jednadžbi se lako vidi da, ako $t \rightarrow +\infty$, onda $I(t) \rightarrow \frac{U}{R} = I_0$ i $U_L \rightarrow 0$. To znači da nakon dovoljno dugoga vremena jakost struje u krugu doseže vrijednost odredenu Ohmovim zakonom, dok samoinducirani napon postaje jednak nuli, tj. isčezava.

Primjer 11. Harmonijski oscilator

Zadatak: Sustav koji titra (oscilira) pod utjecajem harmonijske sile nazivamo **harmonijski oscilator**. (Vidjeti sliku 3.)



Slika 3.

Njegovi osnovni elementi su:

- otklon točke od ravnotežnoga položaja ($y = y(t)$);
- masa točke (m);
- koeficijent trenja (h);
- koeficijent elastičnosti (k).

Prepostavljamo da je sila trenja proporcionalna brzini gibanja točke, kao i da je elastična sila proporcionalna otklonu.

Jednadžba harmonijskoga oscilatora glasi:

$$m \cdot y'' + h \cdot y' + k \cdot y = 0.$$

Razmotrite gibanje u slučajevima velikoga trenja, relativno maloga trenja i bez trenja.

Rješenje: Običnoj diferencijalnoj jednadžbi koja opisuje gibanje harmonijskoga oscilatora pripada karakteristična jednadžba $m \cdot \lambda^2 + h \cdot \lambda + k = 0$. Označimo $D := h^2 - 4 \cdot k \cdot m$.

| | | |
|--|---|--|
|  TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU POLYTECHNICUM ZAGREBIENSE Elektrotehnički odjel | Matematika 2 (preddiplomski stručni studij elektrotehnike) | 3.8. Primjeri primjene ODJ 1. i 2. reda – riješeni zadaci |
|--|---|--|

Zaključujemo da su rješenja karakteristične jednadžbe dana izrazom:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-h \pm \sqrt{D}}{2 \cdot m}.$$

Razmotrimo sljedeće slučajeve:

1. $D > 0$, tj. $h^2 > 4 \cdot m \cdot k$ (*slučaj velikoga trenja*).

U ovom slučaju karakteristična jednadžba ima dva različita realna rješenja. Pogledajmo predznačke tih rješenja. Znamo da je $D > 0$, pa je i $\sqrt{D} > 0$. Prirodni uvjet je i $m > 0$ jer masa ne može biti nepozitivna. Prema tome, vrijedi:

$$\lambda_2 = \frac{-h - \sqrt{D}}{2 \cdot m} < 0.$$

Prema Vièteovim formulama, umnožak rješenja karakteristične jednadžbe jednak je $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = \frac{k}{m}$. Brojevi k i m su strogo pozitivni, pa je i $\frac{k}{m} > 0$. Međutim, zaključili smo i da je $\lambda_2 < 0$. Umnožak negativnoga broja λ_2 i broja λ_1 bit će strogo pozitivan ako i samo ako je $\lambda_1 < 0$. To znači da su oba rješenja karakteristične jednadžbe strogo negativni realni brojevi.

Dakle, opće rješenje je funkcija oblika

$$y(t) = C_1 \cdot e^{\lambda_1 t} + C_2 \cdot e^{\lambda_2 t}, \quad C_1, C_2, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \quad \lambda_1, \lambda_2 < 0.$$

Kad $t \rightarrow +\infty$, onda $y \rightarrow 0$, što znači da će točka pri velikom otporu težiti postizanju ravnotežnoga položaja.

2. $D = 0$, tj. $h^2 = 4 \cdot m \cdot k$ (*granični slučaj*)

U ovom slučaju karakteristična jednadžba ima jedno dvostruko realno rješenje:

$$\lambda_0 = \frac{-h}{2 \cdot m}.$$

Prema prepostavci su $h, m > 0$, pa zaključujemo da je $\lambda_0 < 0$. Dakle, opće rješenje je funkcija oblika

$$y(t) = (C_1 + C_2 \cdot t) \cdot e^{\lambda_0 t}, \quad C_1, C_2, \lambda_0 \in \mathbb{R}, \quad \lambda_0 < 0.$$

L'Hôpital-Bernoullijevim pravilom lako se pokaže $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = 0$ (učinite to sami za vježbu), pa će točka i u ovom slučaju težiti postizanju ravnotežnoga položaja.

| | | |
|--|---|--|
|  TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE Elektrotehnički odjel | Matematika 2 (preddiplomski stručni studij elektrotehnike) | 3.8. Primjeri primjene ODJ 1. i 2. reda – riješeni zadaci |
|--|---|--|

3. $D < 0$, tj. $0 < h^2 < 4 \cdot m \cdot k$ (slučaj maloga trenja).

U ovom slučaju karakteristična jednadžba ima kompleksna rješenja. Označimo li

$$\alpha = -\frac{h}{2 \cdot m}, \beta = \frac{\sqrt{-D}}{2 \cdot m},$$

lako vidimo da su $\alpha < 0$ i $\beta > 0$. Dakle, opće rješenje polazne jednadžbe je:

$$y(t) = e^{\alpha \cdot t} \cdot (C_1 \cdot \cos(\beta \cdot t) + C_2 \cdot \sin(\beta \cdot t)), C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Izraz u uglatoj zagradi zapravo je superpozicija dviju harmonijskih funkcija s istom kružnom frekvencijom $\omega = \beta$. U *Matematici 1* smo pokazali da je superpozicija takvih harmonijskih funkcija opet harmonijska funkcija s istom kružnom frekvencijom. To znači da postoje $A \geq 0$ i $\varphi \in [-\pi, \pi]$ takvi da je

$$C_1 \cdot \cos(\beta \cdot t) + C_2 \cdot \sin(\beta \cdot t) = A \cdot \sin(\beta \cdot t + \varphi)$$

Zbog toga opće rješenje polazne jednadžbe možemo zapisati u obliku:

$$y = A \cdot e^{\alpha \cdot t} \cdot \sin(\beta \cdot t + \varphi).$$

Zbog nejednakosti $-1 \leq \sin(\beta \cdot t + \varphi) \leq 1$ zaključujemo da vrijedi nejednakost:

$$-A \cdot e^{\alpha \cdot t} \leq y \leq A \cdot e^{\alpha \cdot t}.$$

Pustimo li $t \rightarrow +\infty$ i primjenimo $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{\alpha \cdot t} = 0$ (jer je $\alpha < 0$), dobivamo $\lim_{t \rightarrow +\infty} y = 0$.

Dakle, u ovom slučaju se titranja eksponencijalno prigušuju.

4. $h = 0$ (slučaj bez trenja)

U ovome je slučaju $\alpha = 0$, pa je opće rješenje polazne obične diferencijalne jednadžbe

$$y(t) = C_1 \cdot \cos(\beta \cdot t) + C_2 \cdot \sin(\beta \cdot t), C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Analogno kao u slučaju 3., postoje $A \geq 0$ i $\varphi \in [-\pi, \pi]$ takvi da je

$$C_1 \cdot \cos(\beta \cdot t) + C_2 \cdot \sin(\beta \cdot t) = A \cdot \sin(\beta \cdot t + \varphi)$$

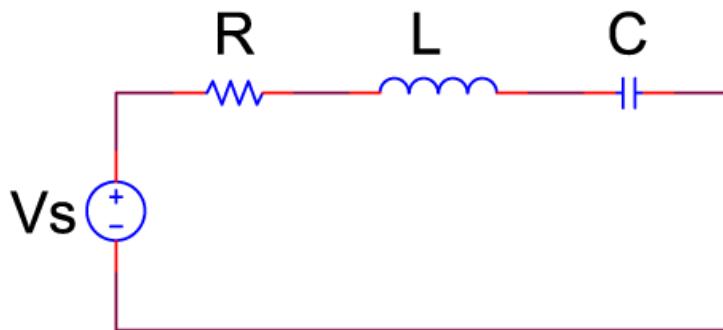
Zbog toga opće rješenje polazne jednadžbe možemo zapisati u obliku:

$$y(t) = A \cdot \sin(\beta \cdot t + \varphi).$$

Dakle, u ovom slučaju gibanje točke možemo opisati harmonijskom funkcijom, pri čemu nema prigušivanja.

Primjer 12. Serijski RLC-krug

Zadatak: Serijski RLC-krug zamišljamo kao serijski spoj idealnoga otpornika (čiji je otpor R), idealne zavojnice (čiji je induktivitet L) i idealnoga kondenzatora (čiji je kapacitet C). Vidjeti sliku 4.



Slika 4.

Ako nabijemo kondenzator i zatvorimo prekidač, dolazi do slobodnih električnih titraja.

U početnom trenutku nabijeni kondenzator sadrži električnu energiju. Izbijanjem kondenzatora ta se energija pretvara u magnetsku (koju stvara struja u zavojnici). Struja u zavojnici nabija kondenzator naboјima suprotnima od početnih. Tako se magnetska energija pretvara u električnu, čime se ponavlja cjelokupni proces.

Prepostavimo li da je napon u strujnom krugu konstantan, onda jakost struje $I = I(t)$ zadovoljava običnu diferencijalnu jednadžbu:

$$L \cdot I'' + R \cdot I' + \frac{1}{C} \cdot I = 0.$$

Zasebno razmotrite slučajeve velikoga otpora, maloga otpora i bez otpora.

Uputa i rezultati: Obična diferencijalna jednadžba u ovom primjeru zapravo je obična diferencijalna jednadžba iz prethodnoga primjera. „Ulogu“ mase m , „igra“ induktivitet L , „Ulogu“ koeficijenta trenja h , „igra“ otpor R , „Ulogu“ koeficijenta elastičnosti k , „igra“ $\frac{1}{C}$. Zbog toga je razmatranje potpuno analogno onome u prethodnom primjeru, pa ga detaljno raspišite sami za vježbu.

Dobiju se sljedeći rezultati:

- a) *Slučaj velikoga otpora:* Ako je $R^2 > 4 \cdot \frac{L}{C}$, onda struja postaje sve slabija i teži prema nuli, tj. $\lim_{t \rightarrow +\infty} I(t) = 0$.
- b) *Slučaj maloga otpora:* Ako je $0 < R^2 < 4 \cdot \frac{L}{C}$, onda jakost struje opisuje funkcija oblika $I(t) = A \cdot e^{-\alpha \cdot t} \cdot \sin(\beta \cdot t + \gamma)$. I u ovom je slučaju $\lim_{t \rightarrow +\infty} I(t) = 0$.
- c) *Slučaj kad nema otpora* (tj. kad je $R = 0$): U ovom slučaju promatrani strujni krug titra kružnom frekvencijom $\omega = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}}$. Naime, uz oznake iz postupka rješenja prethodnoga primjera, u ovom slučaju dobivamo:

$$\omega = \beta = \frac{\sqrt{4 \cdot L \cdot \frac{1}{C}}}{2 \cdot L} = \sqrt{\frac{4 \cdot \frac{L}{C}}{4 \cdot L^2}} = \sqrt{\frac{1}{L \cdot C}} = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}}.$$