3. VEKTORI

PROSTOR RADIJVEKTORA $V^3(O)$. OPERACIJE S VEKTORIMA. PRIMJENE VEKTORA U GEOMETRIJI

3.1. PROSTOR RADIJVEKTORA $V^3(O)$

- U standardnom trodimenzionalnom *prostoru* (oznaka: $\mathbb{E}^3$) pravokutni koordinatni sustav tvore *tri koordinatne osi*: os apscisa (os x), os ordinata (os y) i os aplikata (os z).
- Te tri osi su međusobno okomite i sijeku se u jednoj točki – *ishodištu koordinatnoga sustava* (oznaka: O).
- Za svaku točku T tako organiziranoga koordinatnoga sustava *jedinstveno* je određena *dužina* kojoj je početak (početna točka) u točki O, a kraj (krajnja točka) u točki T.
- Takvu usmjerenu dužinu nazivamo **radijvektor** (ponekad kraće i nepreciznije: *vektor*) i označavamo s $\overrightarrow{OT}$.
- Skup $V^3(O) := \left\{ \overrightarrow{OT} : T \in \mathbb{E}^3 \right\}$ naziva se **prostor radijvektora**.
- Podsjetnik: *Vektor* je svaka *usmjerena* dužina kojoj su zadane *početna* i *krajnja* točka.

3.2. OSNOVNA SVOJSTVA VEKTORA

- Svaki **radijvektor** je tzv. *vezani vektor* (ne smijemo ga pomicati niti zakretati).
- U općem slučaju – kad je početna točka vektora bilo koja točka prostora – vektore smijemo *translatirati* (paralelno pomicati u sva četiri smjera), ali ne i *rotirati* (zakretati). Tada govorimo o tzv. *slobodnim vektorima.*
- Svaki radijvektor je jednoznačno određen svojom krajnjom točkom $T = (x_T, y_T, z_T)$. Obratno, svakoj točki T pripada jedinstven vektor čiji je početak u točki O, a kraj u točki T. Zbog toga ima smisla *bijektivno poistovjetiti*:
- $\overrightarrow{OT} = (x_T, y_T, z_T)$.
- Kažemo da smo vektor *koordinatizirali.*
- Svrha koordinatizacije je omogućiti definiranje operacija s vektorima pomoću operacija s realnim brojevima.

3.2. OSNOVNA SVOJSTVA VEKTORA

- *Duljina* bilo kojega vektora jednaka je udaljenosti između njegove početne i njegove krajnje točke. U slučaju radijvektora vrijedi:

$$\left|\overrightarrow{OT}\right| = \sqrt{x_T^2 + y_T^2 + z_T^2}$$

- Svaki vektor čija je duljina jednaka 1 naziva se **jedinični vektor** ili **ort** (korisno za rješavanje križaljki!).
- Skup svih jediničnih radijvektora u prostoru $V^3(O)$ možemo *bijektivno poistovjetiti* sa *središnjom jediničnom sferom*: svakoj točki jedinične sfere pripada točno jedan ort, odnosno svakom ortu pripada točno jedna točka jedinične sfere.
- U dvodimenzionalnoj Oxy ravnini skup svih jediničnih vektora čiji je početak u točki S možemo poistovjetiti sa jediničnom kružnicom čije je središte u točki S.
- Vektor čiji je i početak i kraj u točki O naziva se **nulvektor.** On se zapisuje kao $\vec{0} = (0,0,0)$ i njegova je duljina jednaka nuli.

3.3. OSNOVNI VEKTORI

- Radijvektore pridružene točkama $E_1 = (1, 0, 0)$, $E_2 = (0, 1, 0)$ i $E_3 = (0, 0, 1)$ nazivamo osnovni (bazični) vektori.
- Oni imaju i svoje posebne oznake:

$$\vec{i} := \overrightarrow{OE_1} = (1,0,0)$$

$$\vec{j} := \overrightarrow{OE_2} = (0,1,0)$$

$$\vec{k} := \overrightarrow{OE_3} = (0,0,1)$$

- Lako se vidi da sva tri osnovna vektora pripadaju skupu svih jediničnih vektora (ortova).

3.4. ZBRAJANJE I ODUZIMANJE VEKTORA

- Neka su zadani vektori $\overrightarrow{OA} = (a_1, a_2, a_3)$ i $\overrightarrow{OB} = (b_1, b_2, b_3)$.
- **Zbroj** zadanih vektora je *vektor* čiji je početak u točki O, a kraj u točki $C = (a_1 + b_1,\ a_2 + b_2,\ a_3 + b_3)$. Kratko pišemo:

$$\overrightarrow{OC} := \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$$

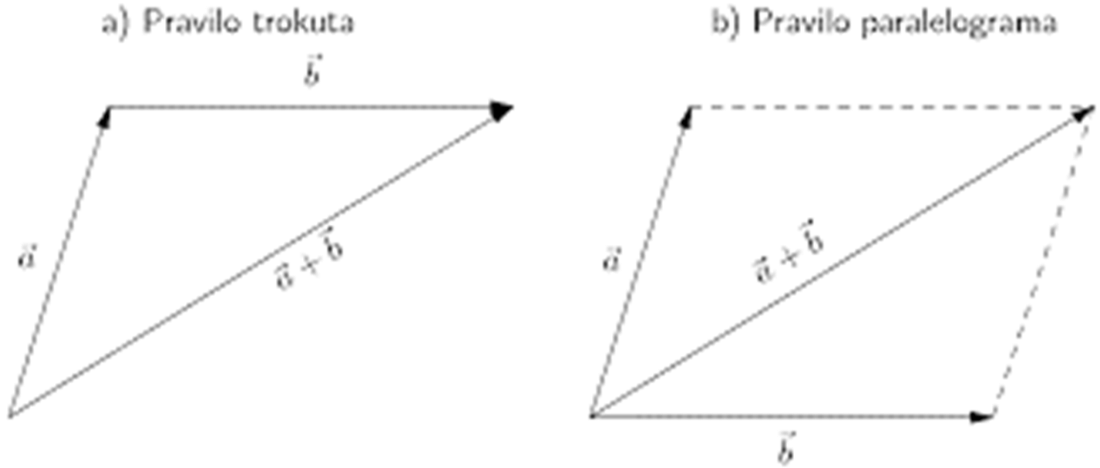
- Analogno, **razlika** zadanih vektora je *vektor* čiji je početak u točki O, a kraj u točki $D = (a_1 - b_1,\ a_2 - b_2,\ a_3 - b_3)$. Kratko pišemo:

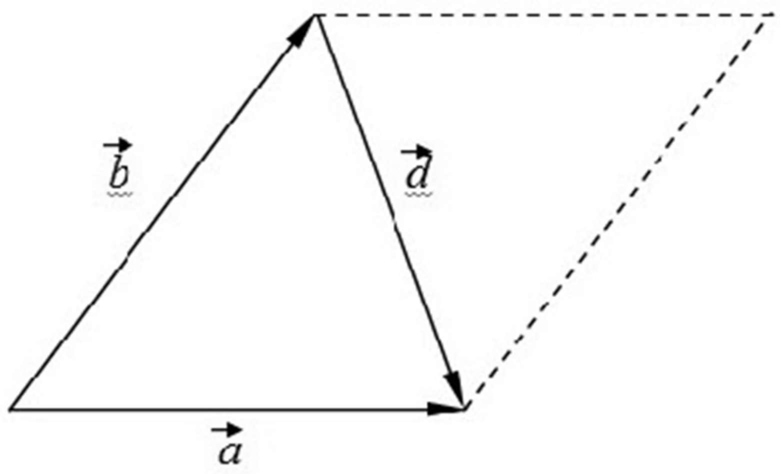
$$\overrightarrow{OD} := \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3)$$

- Iz gornjih definicija slijedi da zbroj i razlika *bilo kojega* vektora i nulvektora jednaki tom vektoru.
- **Važno**: Operacija zbrajanja vektora je komutativna (nije bitno koji vektor je prvi, a koji drugi pribrojnik), ali operacija oduzimanja vektora **nije** (pa treba pripaziti na poredak vektora).
- Ove operacije se grafički mogu interpretirati koristeći *pravilo paralelograma*.
- To pravilo ukratko kaže: ako je $ABCD$ paralelogram, onda su:

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}, \\ \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB}. \end{cases}$$

3.4. ZBRAJANJE I ODUZIMANJE VEKTORA





$$\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$$

3.5. MNOŽENJE VEKTORA SA SKALAROM

- Neka su zadani vektor $\overrightarrow{OA} = (a_1, a_2, a_3)$ i bilo koji $\alpha \in \mathbb{R}$.
- *Umnožak* broja (kratko: *skalara*) α i vektora $\overrightarrow{OA}$ je *vektor* čiji je početak u točki O, a kraj u točki $B = (\alpha \cdot a_1,\ \alpha \cdot a_2,\ \alpha \cdot a_3)$. Kratko pišemo: $\alpha \cdot \overrightarrow{OA} := (\alpha \cdot a_1, \alpha \cdot a_2, \alpha \cdot a_3)$.
- Iz definicije slijedi da je umnožak skalara i vektora jednak nulvektoru ako i samo ako je skalar jednak nuli ili vektor jednak nulvektoru (može i oboje).
- Ako za vektore $\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OB}$ vrijedi jednakost $\overrightarrow{OB} = (-1) \cdot \overrightarrow{OA}$, kažemo
- da su ti vektori **suprotni**.
- Uočimo da iz $\overrightarrow{OB} = (-1) \cdot \overrightarrow{OA}$ slijedi $\overrightarrow{OA} = (-1) \cdot \overrightarrow{OB}$.
- Dakle, relacija *biti suprotan* je simetrična relacija.

3.6. KOLINEARNI VEKTORI

- Neka su zadani vektori $\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OB}$.
- Kažemo da su zadani vektori **kolinearni** ako postoji $\alpha \in \mathbb{R}$
- takav da vrijedi jednakost $\overrightarrow{OB} = \alpha \cdot \overrightarrow{OA}$.
- Iz definicije slijedi da je *jedino* nulvektor kolinearan s *bilo kojim* vektorom.
- Ako dodatno vrijedi nejednakost $\alpha > 0$, kažemo da zadani vektori **imaju istu orijentaciju**.
- Ako dodatno vrijedi nejednakost $\alpha < 0$, kažemo da zadani vektori **imaju suprotnu orijentaciju**.
- *Kolinearnost* zadanih vektora ekvivalentna je kolinearnosti točaka A, O i B.
- Ekvivalentno: zadani vektori su kolinearni ako i samo ako točke A, O i B pripadaju istom pravcu.

3.7. SKALARNI UMNOŽAK

- Neka su zadani vektori $\overrightarrow{OA}=(a_1,a_2,a_3)$ i $\overrightarrow{OB}=(b_1,b_2,b_3)$.
- **Skalarni umnožak** zadanih vektora je $\Theta\in\mathbb{R}$ definiran formulom: $\Theta:=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}:=a_1\cdot b_1+a_2\cdot b_2+a_3\cdot b_3$
- OPREZ! Treba razlikovati *skalarni umnožak* od *umnoška sa skalarom* iako su ti izrazi vrlo slični. Rezultat prve operacije (skalarnoga umnoška) je *realan broj*, dok je rezultat druge operacije (umnoška sa skalarom) *vektor*.
- Iz definicije slijedi da je skalarni umnožak komutativna operacija, tj. poredak vektora („faktora") u skalarnom umnošku nije bitan.

3.8. KUT IZMEĐU DVAJU VEKTORA

- Promatramo bilo koja dva vektora imaju zajedničku početnu točku O. Tada je jednoznačno određen **kut** koji međusobno zatvaraju ti vektori.
- Mjera **kuta** između vektora $\overrightarrow{OA}=(a_1,a_2,a_3)$ i $\overrightarrow{OB}=(b_1,b_2,b_3)$
- je $\varphi \in [0, \pi]$ jednoznačno određen jednadžbom:

$$\varphi=\arccos\left(\frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{\left|\overrightarrow{OA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{OB}\right|}\right)=\arccos\left(\frac{a_1\cdot b_1+a_2\cdot b_2+a_3\cdot b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}\right)$$

- OPREZ: *Istom oznakom* $\cdot$ označene su dvije različite operacije: skalarni umnožak i množenje realnih brojeva.

3.9. OKOMITOST VEKTORA

- Kažemo da su dva vektora **međusobno okomita** ako pravci OA i OB zatvaraju kut od $\pi/2$ radijana.
- Okomitost vektora se može jednostavno provjeriti pomoću njihova skalarnoga umnoška:
- *Dva vektora su okomita ako i samo ako je barem jedan od njih nulvektor ili je njihov skalarni umnožak jednak nuli.*
- Odatle slijedi da je nulvektor *jedini* vektor koji je okomit na *bilo koji* vektor, te da su dva vektora – od kojih niti jedan nije nulvektor – okomiti ako i samo ako je njihov skalarni umnožak jednak nuli.

3.10. VEKTORSKI UMNOŽAK

- Neka su zadani vektori $\overrightarrow{OA}=(a_1,a_2,a_3)$ i $\overrightarrow{OB}=(b_1,b_2,b_3)$.
- **Vektorski umnožak** zadanih vektora je *vektor* čija je početna točka O, a krajnja točka

$$C=(a_2\cdot b_3-a_3\cdot b_2, a_3\cdot b_1-a_1\cdot b_3, a_1\cdot b_2-a_2\cdot b_1)$$

- Kratko pišemo:

$$\overrightarrow{OC}:=\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}=(a_2\cdot b_3-a_3\cdot b_2, a_3\cdot b_1-a_1\cdot b_3, a_1\cdot b_2-a_2\cdot b_1)$$

- Ovako definirani vektorski umnožak ima sljedeća svojstva:
- 1. Duljina vektora $\overrightarrow{OC}$ jednaka je:

$$\left|\overrightarrow{OC}\right|=\left|\overrightarrow{OA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{OB}\right|\cdot\sin\varphi,$$

- gdje je φ kut između zadanih vektora.

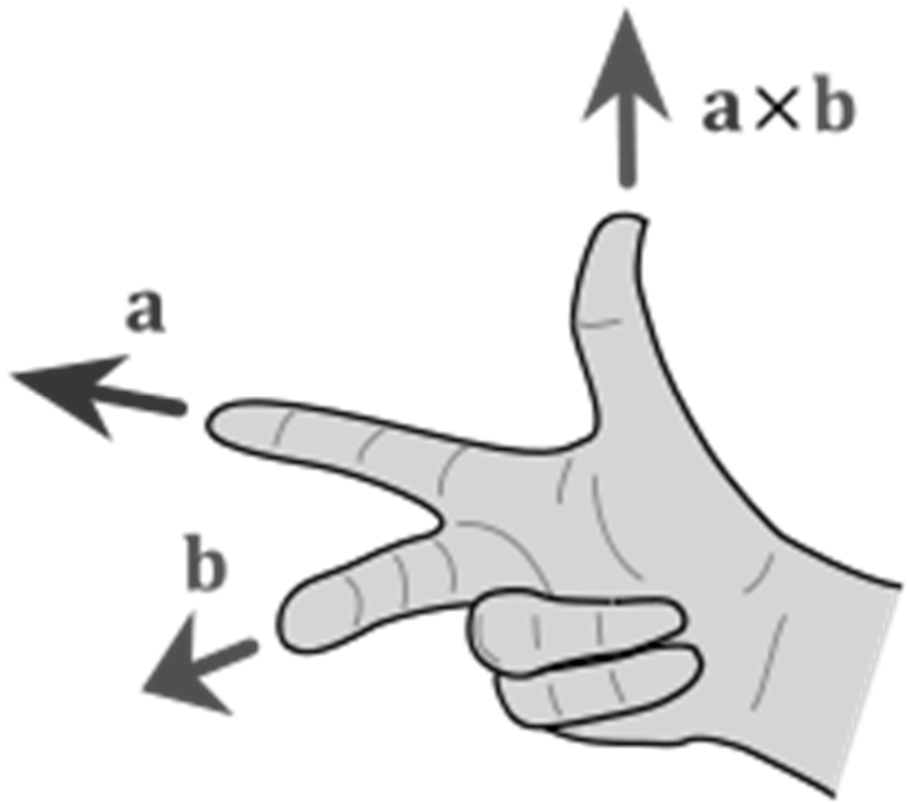
3.10. VEKTORSKI UMNOŽAK

- 2. Geometrijska interpretacija *duljine* vektorskoga umnoška je:
- *Duljina vektorskoga umnoška dvaju vektora jednaka je površini paralelograma kojega razapinju ti vektori.*
- 3. Vektorski umnožak dvaju vektora je *okomit na svaki* od tih vektora („faktora”).
- 4. Vektorski umnožak dvaju vektora jednak je nulvektoru ako i samo ako je jedan „faktor” jednak nulvektoru ili su „faktori” kolinearni.
- Drugim riječima, vektorski produkt dvaju vektora – od kojih niti jedan nije nulvektor – jednak je nulvektoru ako i samo ako su ti vektori kolinearni.

3.10. VEKTORSKI UMNOŽAK

- 4. Vektori $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ i $\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}$ *u navedenom poretku* su desno orijentirani.
- To znači da zakretanje vektora $\overrightarrow{OA}$ u vektor $\overrightarrow{OB}$ za kut φ, promatrano iz krajnje točke njihova vektorskoga umnoška, ima smjer suprotan smjeru gibanja kazaljke na satu.
- Iz toga svojstva ili iz definicije vektorskoga umnoška lagano se pokazuje da vektorski umnožak ima svojstvo *antikomutativnosti*, tj. vrijedi: $\overrightarrow{OB}\times\overrightarrow{OA}=(-1)\cdot\left(\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}\right)$.
- OPREZ: Zbog gornjega svojstva bitan je poredak vektora prigodom računanja njihova vektorskoga umnoška!
- Smjer vektorskoga umnoška često se određuje tzv. *pravilom desne ruke* (vidjeti sljedeći slide).
- 5. Vektorski umnožak je operacija karakteristična *isključivo* za skup $V^3(O)$.

3.11. PRAVILO DESNE RUKE



Postavimo desnu ruku tako da kažiprst pokazuje smjer prvoga vektora, a srednji prst smjer drugoga vektora.
Tada palac pokazuje smjer njihova vektorskoga umnoška.

3.12. NAPOMENE

- 1. Definicija vektorskoga umnoška lakše se pamti u obliku sljedeće formalne determinante reda 3:

$$\overrightarrow{OC} := \overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

- 2. *Površina trokuta* kojega razapinju dva zadana vektora jednaka je polovici duljine njihova vektorskoga umnoška.

3.13. MJEŠOVITI UMNOŽAK

- Ako su zadani vektori $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$ i $\vec{c}=(c_1,c_2,c_3)$
- onda je **mješoviti umnožak** tih vektora *realan broj M* definiran s

$$M := \left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c} \Rightarrow M = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

- *Apsolutna vrijednost* mješovitoga umnoška *M* jednaka je volumenu *paralelepipeda* (tijelo čiju mrežu tvore šest u parovima jednakih paralelograma) razapetoga zadanim vektorima.
- Ako zadani vektori razapinju *trostranu prizmu*, onda je volumen te prizme jednak *polovici* apsolutne vrijednosti broja *M*.
- Ako zadani vektori razapinju *tetraedar*, onda je volumen te piramide jednak *šestini* apsolutne vrijednosti broja *M*.

3.13. MJEŠOVITI UMNOŽAK

- Pokazuje se da vrijedi sljedeće svojstvo:
- *Mješoviti umnožak triju vektora jednak je nuli ako i samo ako je jedan od tih vektora nulvektor ili ako sva tri vektora pripadaju istoj ravnini* (tj. ako su komplanarni).
- Drugim riječima, mješoviti umnožak triju vektora – od kojih niti jedan nije nulvektor – jednak je nuli ako i samo ako su ti vektori komplanarni (tj. ako i samo ako ti vektori pripadaju istoj ravnini).
- *Podsjetnik*: Svaka ravnina u standardnom euklidskom prostoru jednoznačno je zadana izborom bilo koje tri različite *točke* te ravnine. Ekvivalentno, svaka ravnina jednoznačno je zadana izborom bilo kojih *dvaju* nekolinearnih vektora koji pripadaju toj ravnini.

3.14. NAPOMENA

- Ako u *mješovitomu umnošku* zamijenimo *poredak dvaju vektora* (**ne** mijenjajući redoslijed operacija – to **ne smijemo** učiniti jer će, u suprotnom, konačan rezultat biti vektor, a ne realan broj!), onda će *mješoviti umnožak promijeniti predznak*.
- Ovo svojstvo lagano slijedi iz svojstva determinante:
- Ako u determinanti zamijenimo *bilo koja* dva njezina retka, onda će determinanta promijeniti predznak.
- Iz navedene tvrdnje slijede ove jednakosti:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b}$$

1. Vektori $\vec{m}=2\cdot\vec{a}-\vec{b}$ i $\vec{n}=4\cdot\vec{a}+5\cdot\vec{b}$ su međusobno okomiti. Ako su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ nenulvektori iste duljine, odredite kut između tih vektora.

Rješenje: Skalarni umnožak vektora $\vec{m}$ i $\vec{n}$ treba biti jednak nuli, pa imamo redom:

$$
\begin{aligned}
&\vec{m}\cdot\vec{n}=0,\\
&\left(2\cdot\vec{a}-\vec{b}\right)\cdot\left(4\cdot\vec{a}+5\cdot\vec{b}\right)=0,\\
&(2\cdot 4)\cdot\left(\vec{a}\cdot\vec{a}\right)-1\cdot 4\cdot\left(\vec{b}\cdot\vec{a}\right)+(2\cdot 5)\cdot\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)-1\cdot 5\cdot\left(\vec{b}\cdot\vec{b}\right)=0,\\
&8\cdot\left|\vec{a}\right|^2-4\cdot\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)+10\cdot\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)-5\cdot\left|\vec{b}\right|^2=0,\\
&8\cdot\left|\vec{a}\right|^2-4\cdot\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\varphi+10\cdot\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\varphi-5\cdot\left|\vec{b}\right|^2=0.
\end{aligned}
$$

Prema pretpostavci zadatka vrijedi jednakost $\left|\vec{a}\right|=\left|\vec{b}\right|$, pa dalje slijedi:

$$
\begin{aligned}
&8\cdot\left|\vec{a}\right|^2-4\cdot\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{a}\right|\cdot\cos\varphi+10\cdot\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{a}\right|\cdot\cos\varphi-5\cdot\left|\vec{a}\right|^2=0, \quad /:\left|\vec{a}\right|^2\\
&8-4\cdot\cos\varphi+10\cdot\cos\varphi-5=0,\\
&6\cdot\cos\varphi=-3, \quad /:6\\
&\cos\varphi=\frac{-1}{2}.
\end{aligned}
$$

Odatle slijedi

$$\varphi=\frac{2}{3}\cdot\pi \text{ radijana.}$$

2. Zadani su vektori $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}-2\cdot\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{i}-2\cdot\vec{j}+\vec{k}$ i $\vec{c}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$. Izračunajte mjeru kuta (iskazanu u radijanima) između vektora $\vec{c}$ i $\vec{a}\times\vec{b}$.

Rješenje: Odredimo najprije vektor $\vec{a}\times\vec{b}$. Imamo redom:

$$
\begin{aligned}
&\vec{a}=(1,1,-2),\\
&\vec{b}=(1,-2,1),\\
&\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 1 & -2\\ 1 & -2 & 1\end{vmatrix}=\\
&\quad=\vec{i}\cdot\underbrace{\begin{vmatrix}1 & -2\\ -2 & 1\end{vmatrix}}_{=1\cdot 1-(-2)\cdot(-2)=1-4=-3}-\vec{j}\cdot\underbrace{\begin{vmatrix}1 & -2\\ 1 & 1\end{vmatrix}}_{=1\cdot 1-1\cdot(-2)=1+2=3}+\vec{k}\cdot\underbrace{\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & -2\end{vmatrix}}_{=1\cdot(-2)-1\cdot 1=-2-1=-3}=\\
&\quad=-3\cdot\vec{i}-3\cdot\vec{j}-3\cdot\vec{k}=\\
&\quad=(-3)\cdot\left(\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}\right)=(-3)\cdot\vec{c}.
\end{aligned}
$$

Odatle zaključujemo da su vektori $\vec{c}$ i $\vec{a}\times\vec{b}$ kolinearni, ali suprotnoga smjera. Zbog toga je tražena mjera kuta jednaka

$$\varphi=\pi \text{ radijana.}$$

3. (pismeni ispit, 25. 8. 2020.) Zadani su vektori $\vec{a}=\vec{k}-\vec{i}$ i $\vec{b}=\vec{i}+4\cdot\vec{k}$. Odredite sve vektore $\vec{x}$ duljine 2 koji su okomiti na vektore $2\cdot\vec{a}+\vec{b}$ i $\vec{a}-2\cdot\vec{b}$. Sve svoje tvrdnje precizno obrazložite.

Rješenje: Odredimo najprije vektore $2\cdot\vec{a}+\vec{b}$ i $\vec{a}-2\cdot\vec{b}$. Dobivamo:

$$\begin{aligned}
&\vec{a}=(-1,0,1),\\
&\vec{b}=(1,0,4),\\
&2\cdot\vec{a}+\vec{b}=2\cdot(-1,0,1)+(1,0,4)=\\
&\qquad=(-2,0,2)+(1,0,4)=\\
&\qquad=(-1,0,6),\\
&\vec{a}-2\cdot\vec{b}=(-1,0,1)-2\cdot(1,0,4)=\\
&\qquad=(-1,0,1)-(2,0,8)=\\
&\qquad=(-3,0,-7).
\end{aligned}$$

Traženi vektori su kolinearni s vektorskim umnoškom vektora $2\cdot\vec{a}+\vec{b}$ i $\vec{a}-2\cdot\vec{b}$. Zbog toga odredimo taj umnožak:

$$\begin{aligned}
\left(2\cdot\vec{a}+\vec{b}\right)\times\left(\vec{a}-2\cdot\vec{b}\right)&=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\-1&0&6\\-3&0&-7\end{vmatrix}=\\
&=-\vec{j}\cdot\begin{vmatrix}-1&6\\-3&-7\end{vmatrix}=\\
&=-\vec{j}\cdot(7-(-18))=-25\cdot\vec{j}.
\end{aligned}$$

Odatle sada lako slijedi da su traženi vektori

$$\vec{x_1}=-2\cdot\vec{j}\ \text{ i }\ \vec{x_1}=2\cdot\vec{j}.$$

4. Zadani su vektori $\vec{a} = (\alpha,\ 0,\ 1)$ i $\vec{b} = (-1,\ 1,\ 0)$. Odredite vrijednost $\alpha \in \mathbb{R}$ tako da površina paralelograma razapetoga zadanim vektorima bude jednaka $3 \cdot \sqrt{2}$ kv. jed.

Rješenje: Izračunajmo najprije duljinu vektorskoga umnoška zadanih vektora. Imamo redom:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \alpha & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \underbrace{=}_{I.+II.\to II.}$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{i}+\vec{j} & \vec{k} \\ \alpha & \alpha & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1) \cdot \begin{vmatrix} \vec{i}+\vec{j} & \vec{k} \\ \alpha & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -\left(\vec{i} + \vec{j} - \alpha \cdot \vec{k}\right) =$$

$$= -\vec{i} - \vec{j} + \alpha \cdot \vec{k},$$

$$\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + \alpha^2} =$$

$$= \sqrt{1+1+\alpha^2} =$$

$$= \sqrt{\alpha^2 + 2}.$$

Dobivena duljina vektorskoga umnoška zadanih vektora jednaka je površini paralelograma. Tako dobivamo jednadžbu:

$$\sqrt{\alpha^2 + 2} = 3 \cdot \sqrt{2}.$$

Kvadriranjem obiju strana te jednadžbe slijedi

$$\alpha^2 = 16\,.$$

Odatle je

$$\alpha \in \{-4, 4\}\,.$$

5. **(pismeni ispit, 1. 9. 2020.)** Duljina vektora $\vec{a}$ iznosi $\sqrt{3}$ jed. duljina. Duljina vektora $\vec{b}$ iznosi 2 jed. duljine. Površina trokuta kojega razapinju vektori $\vec{c} = 3 \cdot \vec{a} + \vec{b}$ i $\vec{d} = \vec{a} - 5 \cdot \vec{b}$ iznosi 24 kv. jed. Odredite mjeru (u radijanima) šiljastoga kuta među vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

   Rješenje: Označimo s φ traženi kut. Površina trokuta kojega zatvaraju vektori $\vec{c}$ i $\vec{d}$ jednaka je polovici duljine njihova vektorskoga umnoška. Zbog toga odredimo:

$$\begin{aligned}
\vec{c} \times \vec{d} &= \left(3 \cdot \vec{a} + \vec{b}\right) \times \left(\vec{a} - 5 \cdot \vec{b}\right) = \\
&= 3 \cdot \Bigg(\underbrace{\vec{a} \times \vec{a}}_{=\vec{0}}\Bigg) \underbrace{+\vec{b} \times \vec{a}}_{=-\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)} - 15 \cdot \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) - 5 \cdot \Bigg(\underbrace{\vec{b} \times \vec{b}}_{=\vec{0}}\Bigg) = \\
&= (-16) \cdot \left(\vec{a} \times \vec{b}\right), \\
P &= \frac{1}{2} \cdot \left|\vec{c} \times \vec{d}\right| = \\
&= \frac{1}{2} \cdot \left|(-16) \cdot \left(\vec{a} \times \vec{b}\right)\right| = \\
&= \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot \underbrace{\left|\vec{a}\right|}_{=\sqrt{3}} \cdot \underbrace{\left|\vec{b}\right|}_{=2} \cdot \sin\varphi = \\
&= 16 \cdot \sqrt{3} \cdot \sin\varphi.
\end{aligned}$$

   Prema zahtjevu zadatka, ta površina mora biti jednaka 24 kv. jed. Tako dobivamo trigonometrijsku jednadžbu:

$$\begin{aligned}
16 \cdot \sqrt{3} \cdot \sin\varphi &= 24, \\
\sin\varphi &= \frac{\sqrt{3}}{2}.
\end{aligned}$$

   U intervalu $\left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle$ ta jednadžba ima jedinstveno rješenje

$$\varphi = \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3}.$$

   Dakle, $\varphi = \frac{\pi}{3}$ radijana.

6. **(1. kolokvij, ak. god. 2019./2020.)** Vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ razapinju paralelepiped volumena 1 kub. jed. Izračunajte volumen paralelepipeda kojega razapinju vektori $\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{a}-\vec{b}$ i $\frac{1}{2}\cdot\vec{c}$.

Rješenje: Prema pretpostavci zadatka vrijedi jednakost

$$\left|\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}\right| = 1.$$

Tako redom imamo:

$$\begin{aligned}
V &= \left|\left(\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\times\left(\vec{a}-\vec{b}\right)\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\vec{c}\right)\right| = \\
&= \left|\left(\underbrace{\vec{a}\times\vec{a}}_{=\vec{0}} + \underbrace{\vec{b}\times\vec{a}}_{=-\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)} - \vec{a}\times\vec{b} - \underbrace{\vec{b}\times\vec{b}}_{=\vec{0}}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\vec{c}\right)\right| = \\
&= \left|\left((-2)\cdot\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\vec{c}\right)\right| = \\
&= \left|\left(\left((-2)\cdot\frac{1}{2}\right)\cdot\underbrace{\left(\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}\right)}_{=1}\right)\right| = \\
&= |-1| = \\
&= 1 \text{ kub. jed.}
\end{aligned}$$

7. (**1. kolokvij, ak. god. 2017./2018.**) Zadani su vektori $\vec{a}=\vec{i}+\vec{k}$ i $\vec{b}=\vec{j}-\vec{k}$. Izračunajte volumen prizme razapete vektorima $\vec{a}\times\vec{b}$, $(\vec{a}\cdot\vec{b})\cdot\vec{a}$ i $(\vec{b}\cdot\vec{a})\cdot\vec{b}$.

Rješenje: Zapišimo zadane vektore u koordinatnom obliku:

$$\vec{a}=(1,0,1),\ \vec{b}=(0,1,-1).$$

Računamo:

$$\begin{aligned}
\vec{a}\times\vec{b}&=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{vmatrix}=\\
&=\vec{i}\cdot\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}-\vec{j}\cdot\begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{vmatrix}+\vec{k}\cdot\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}=\\
&=-\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}=\\
&=(-1,\ 1,\ 1),\\
(\vec{a}\cdot\vec{b})\cdot\vec{a}&=\big((1,0,1)\cdot(0,1,-1)\big)\cdot(1,0,1)=\\
&=\big(1\cdot0+0\cdot1+1\cdot(-1)\big)\cdot(1,0,1)=\\
&=(-1)\cdot(1,0,1)=\\
&=(-1,0,-1),\\
(\vec{b}\cdot\vec{a})\cdot\vec{b}&=(\vec{a}\cdot\vec{b})\cdot\vec{b}=\\
&=(-1)\cdot(0,1,-1)=\\
&=(0,-1,1).
\end{aligned}$$

Volumen prizme razapete izračunanim vektorima jednak je:

$$\begin{aligned}
V&=\frac{1}{2}\cdot\left\|\begin{matrix}-1 & 1 & 1\\ -1 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 1\end{matrix}\right\|\overset{I.-II.\to II.}{=}\\
&=\frac{1}{2}\cdot\left\|\begin{matrix}-1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & -1 & 1\end{matrix}\right\|=\\
&=\frac{1}{2}\cdot\left|(-1)\cdot\begin{vmatrix}1 & 2\\ -1 & 1\end{vmatrix}\right|=\\
&=\frac{1}{2}\cdot\left|\big((-1)\cdot(1\cdot1-2\cdot(-1)\big)\right|=\\
&=\frac{1}{2}\cdot|-3|=\\
&=\frac{1}{2}\cdot3=1.5\text{ kub. jed.}
\end{aligned}$$

8. (**pismeni ispit, 30. 8. 2021.**) Jedinični vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ zatvaraju kut mjere $\dfrac{\pi}{6}$ rad. Izračunajte **volumen paralelepipeda** razapetoga vektorima $4\cdot\vec{a}$, $-\vec{b}$ i $\vec{a}\times\vec{b}$.

Rješenje: Koristeći definiciju mješovitoga umnoška redom dobivamo:

$$
\begin{aligned}
V &= \left|\left(4\cdot\vec{a}\times\left(-\vec{b}\right)\right)\cdot\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\right| = \\
&= \left|(-4)\cdot\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\right| = \\
&= 4\cdot\left|\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\right| = \\
&= 4\cdot\left|\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\right|\cdot\left|\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\right|\cdot\underbrace{\cos\left(\angle\left(\vec{a}\times\vec{b},\vec{a}\times\vec{b}\right)\right)}_{=\cos 0=1} = \\
&= 4\cdot\left|\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\right|^2 = \\
&= 4\cdot\left|\underbrace{\left|\vec{a}\right|}_{=1}\cdot\underbrace{\left|\vec{b}\right|}_{=1}\cdot\underbrace{\sin\left(\angle\left(\vec{a},\vec{b}\right)\right)}_{=\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}}\right|^2 = \\
&= 4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \\
&= 4\cdot\frac{1}{4} = \\
&= 1 \text{ kub. jed.}
\end{aligned}
$$