

3. VEKTORI

PROSTOR RADIJVEKTORA $V^3(O)$.

OPERACIJE S VEKTORIMA.

PRIMJENE VEKTORA U GEOMETRIJI

3.1. PROSTOR RADIJVEKTORA $V^3(O)$

- U standardnom trodimenzionalnom *prostoru* (oznaka: \mathbb{E}^3) pravokutni koordinatni sustav tvore *tri koordinatne osi*: os apscisa (os x), os ordinata (os y) i os aplikata (os z).
- Te tri osi su međusobno okomite i sijeku se u jednoj točki – *ishodištu koordinatnoga sustava* (oznaka: O).
- Za svaku točku T tako organiziranoga koordinatnoga sustava *jedinstveno* je određena *dužina* kojoj je početak (početna točka) u točki O , a kraj (krajnja točka) u točki T .
- Takvu usmjerenu dužinu nazivamo **radijvektor** (ponekad kraće i nepreciznije: *vektor*) i označavamo s \overrightarrow{OT} .
- Skup $V^3(O) := \left\{ \overrightarrow{OT} : T \in \mathbb{E}^3 \right\}$ naziva se **prostor radijvektora**.
- **Podsjetnik:** *Vektor* je svaka *usmjerena* dužina kojoj su zadane *početna* i *krajnja* točka.

3.2. OSNOVNA SVOJSTVA VEKTORA

- Svaki radijvektor je tzv. *vezani vektor* (ne smijemo ga pomicati niti zakretati).
- U općem slučaju – kad je početna točka vektora bilo koja točka prostora – vektore smijemo *translatirati* (paralelno pomicati u sva četiri smjera), ali ne i *rotirati* (zakretati). Tada govorimo o tzv. *slobodnim vektorima*.
- Svaki radijvektor je jednoznačno određen svojom krajnjom točkom $T = (x_T, y_T, z_T)$. Obratno, svakoj točki T pripada jedinstven vektor čiji je početak u točki O , a kraj u točki T . Zbog toga ima smisla *bijektivno poistovjetiti*:
 - $\overrightarrow{OT} = (x_T, y_T, z_T)$.
 - Kažemo da smo vektor *koordinatizirali*.
 - Svrha koordinatizacije je omogućiti definiranje operacija s vektorima pomoću operacija s realnim brojevima.

3.2. OSNOVNA SVOJSTVA VEKTORA

- *Duljina* bilo kojega vektora jednaka je udaljenosti između njegove početne i njegove krajnje točke. U slučaju radijvektora vrijedi:

$$|\overrightarrow{OT}| = \sqrt{x_T^2 + y_T^2 + z_T^2}$$

- Svaki vektor čija je duljina jednaka 1 naziva se **jedinični vektor** ili **ort** (korisno za rješavanje križaljki!).
- Skup svih jediničnih radijvektora u prostoru $V^3(O)$ možemo *bijektivno poistovjetiti* sa *središnjom jediničnom sferom*: svakoj točki jedinične sfere pripada točno jedan ort, odnosno svakom ortu pripada točno jedna točka jedinične sfere.
- U dvodimenzionalnoj Oxy ravnini skup svih jediničnih vektora čiji je početak u točki S možemo poistovjetiti sa jediničnom kružnicom čije je središte u točki S .
- Vektor čiji je i početak i kraj u točki O naziva se **nulvektor**. On se zapisuje kao $\vec{0} = (0, 0, 0)$ njegova je duljina jednaka nuli.

3.3. OSNOVNI VEKTORI

- Radijvektore pridružene točkama $E_1 = (1, 0, 0)$, $E_2 = (0, 1, 0)$ i $E_3 = (0, 0, 1)$ nazivamo osnovni (bazični) vektori.
- Oni imaju i svoje posebne oznake:

$$\vec{i} := \overrightarrow{OE}_1 = (1, 0, 0)$$

$$\vec{j} := \overrightarrow{OE}_2 = (0, 1, 0)$$

$$\vec{k} := \overrightarrow{OE}_3 = (0, 0, 1)$$

- Lako se vidi da sva tri osnovna vektora pripadaju skupu svih jediničnih vektora (ortova).

3.4. ZBRAJANJE I ODUZIMANJE VEKTORA

- Neka su zadani vektori $\overrightarrow{OA} = (a_1, a_2, a_3)$ i $\overrightarrow{OB} = (b_1, b_2, b_3)$.
- Zbroj zadanih vektora je *vektor* čiji je početak u točki O , a kraj u točki $C = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$. Kratko pišemo:

$$\overrightarrow{OC} := \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$$

- Analogno, razlika zadanih vektora je *vektor* čiji je početak u točki O , a kraj u točki $D = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3)$. Kratko pišemo:

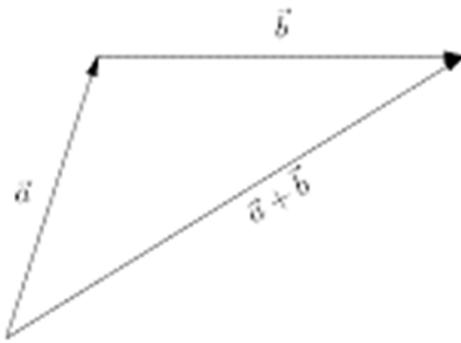
$$\overrightarrow{OD} := \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3)$$

- Iz gornjih definicija slijedi da zbroj i razlika *bilo kojega* vektora i nulvektora jednaki tom vektoru.
- Važno: Operacija zbrajanja vektora je komutativna (nije bitno koji vektor je prvi, a koji drugi pribrojnik), ali operacija oduzimanja vektora nije (pa treba pripaziti na poredak vektora).
- Ove operacije se grafički mogu interpretirati koristeći *pravilo paralelograma*.
- To pravilo ukratko kaže: ako je $ABCD$ paralelogram, onda su:

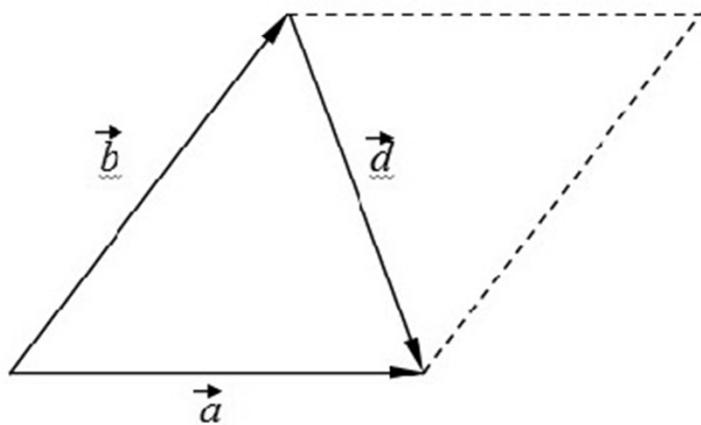
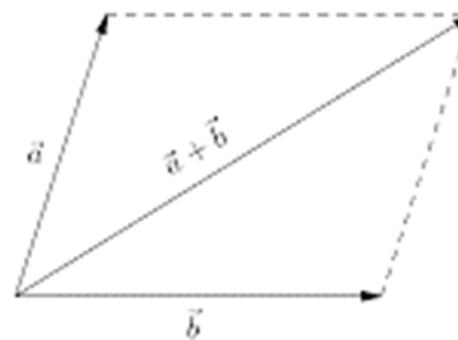
$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}, \\ \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB}. \end{cases}$$

3.4. ZBRAJANJE I ODUZIMANJE VEKTORA

a) Pravilo trokuta



b) Pravilo paralelograma



$$\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$$

3.5. MNOŽENJE VEKTORA SA SKALAROM

- Neka su zadani vektor $\overrightarrow{OA} = (a_1, a_2, a_3)$ i bilo koji $\alpha \in \mathbb{R}$.
- *Umnožak* broja (kratko: *skalara*) α i vektora \overrightarrow{OA} je *vektor* čiji je početak u točki O , a kraj u točki $B = (\alpha \cdot a_1, \alpha \cdot a_2, \alpha \cdot a_3)$. Kratko pišemo: $\alpha \cdot \overrightarrow{OA} := (\alpha \cdot a_1, \alpha \cdot a_2, \alpha \cdot a_3)$.
- Iz definicije slijedi da je umnožak skalara i vektora jednak nulvektoru ako i samo ako je skalar jednak nuli ili vektor jednak nulvektoru (može i oboje).
- Ako za vektore \overrightarrow{OA} i \overrightarrow{OB} vrijedi jednakost $\overrightarrow{OB} = (-1) \cdot \overrightarrow{OA}$, kažemo
- da su ti vektori *suprotni*.
- Uočimo da iz $\overrightarrow{OB} = (-1) \cdot \overrightarrow{OA}$ slijedi $\overrightarrow{OA} = (-1) \cdot \overrightarrow{OB}$.
- Dakle, relacija *biti suprotan* je simetrična relacija.

3.6. KOLINEARNI VEKTORI

- Neka su zadani vektori \overrightarrow{OA} i \overrightarrow{OB} .
- Kažemo da su zadani vektori kolinearni ako postoji $\alpha \in \mathbb{R}$ takav da vrijedi jednakost $\overrightarrow{OB} = \alpha \cdot \overrightarrow{OA}$.
- Iz definicije slijedi da je *jedino* nulvektor kolinearan s *bilo kojim* vektorom.
- Ako dodatno vrijedi nejednakost $\alpha > 0$, kažemo da zadani vektori imaju istu orijentaciju.
- Ako dodatno vrijedi nejednakost $\alpha < 0$, kažemo da zadani vektori imaju suprotnu orijentaciju.
- *Kolinearnost* zadanih vektora ekvivalentna je kolinearnosti točaka A , O i B .
- Ekvivalentno: zadani vektori su kolinearni ako i samo ako točke A , O i B pripadaju istom pravcu.

3.7. SKALARNI UMNOŽAK

- Neka su zadani vektori $\overrightarrow{OA} = (a_1, a_2, a_3)$ i $\overrightarrow{OB} = (b_1, b_2, b_3)$.
- Skalarni umnožak zadanih vektora je $\Theta \in \mathbb{R}$ definiran formulom: $\Theta := \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} := a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$
- **OPREZ!** Treba razlikovati *skalarni umnožak* od *umnoška sa skalarom* iako su ti izrazi vrlo slični. Rezultat prve operacije (skalarnoga umnoška) je *realan broj*, dok je rezultat druge operacije (umnoška sa skalarom) *vektor*.
- Iz definicije slijedi da je skalarni umnožak komutativna operacija, tj. poredak vektora („faktora“) u skalarnom umnošku nije bitan.

3.8. KUT DVAJU VEKTORA

- Promatramo bilo koja dva vektora imaju zajedničku početnu točku O . Tada je jednoznačno određen kut koji međusobno zatvaraju ti vektori.
- Mjera kuta između vektora $\overrightarrow{OA} = (a_1, a_2, a_3)$ i $\overrightarrow{OB} = (b_1, b_2, b_3)$
- je $\varphi \in [0, \pi]$ jednoznačno određen jednadžbom:

$$\cos \varphi = \frac{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}| \cdot |\overrightarrow{OB}|} = \frac{a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

- OPREZ: *Istom oznakom* \cdot označene su dvije različite operacije: skalarni umnožak i množenje realnih brojeva.

3.9. OKOMITOST VEKTORA

- Kažemo da su dva vektora međusobno okomita ako pravci OA i OB zatvaraju kut od $\pi/2$ radijana.
- Okomitost vektora se može jednostavno provjeriti pomoću njihova skalarnoga umnoška:
- *Dva vektora su okomita ako i samo ako je barem jedan od njih nulvektor ili je njihov skalarni umnožak jednak nuli.*
- Odatle slijedi da je nulvektor *jedini* vektor koji je okomit na *bilo koji* vektor, te da su dva vektora – od kojih niti jedan nije nulvektor – okomiti ako i samo ako je njihov skalarni umnožak jednak nuli.

3.10. VEKTORSKI UMNOŽAK

- Neka su zadani vektori $\overrightarrow{OA} = (a_1, a_2, a_3)$ i $\overrightarrow{OB} = (b_1, b_2, b_3)$.
- Vektorski umnožak zadanih vektora je *vektor* čija je početna točka O , a krajnja točka

$$C = (a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2, a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3, a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1)$$

- Kratko pišemo:

$$\overrightarrow{OC} := \overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB} = (a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2, a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3, a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1)$$

- Ovako definirani vektorski umnožak ima sljedeća svojstva:
- 1. Duljina vektora \overrightarrow{OC} jednaka je:

$$|\overrightarrow{OC}| = |\overrightarrow{OA}| \cdot |\overrightarrow{OB}| \cdot \sin \varphi,$$

- gdje je φ kut između zadanih vektora.

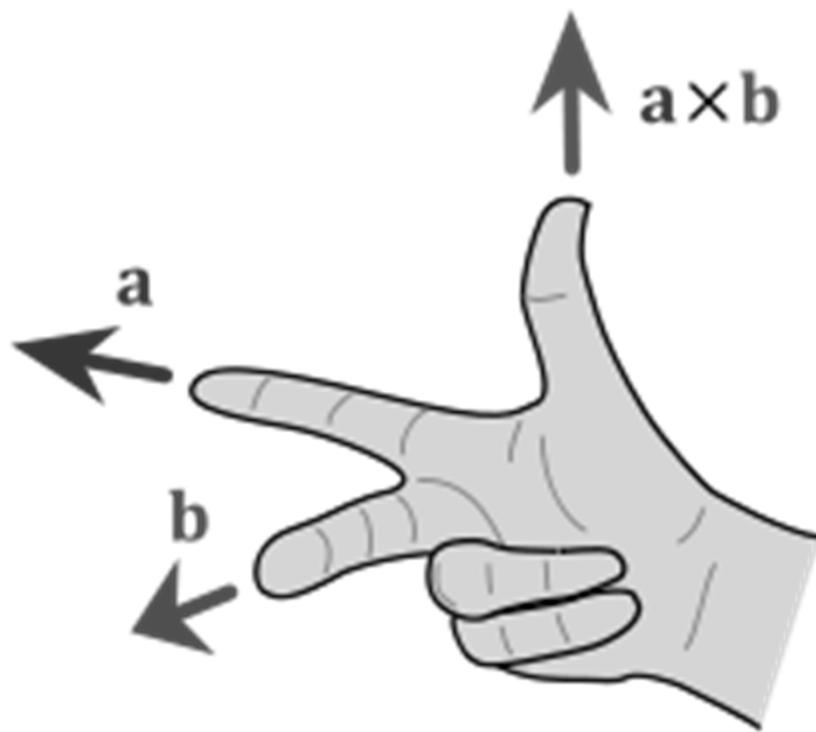
3.10. VEKTORSKI UMNOŽAK

- 2. Geometrijska interpretacija *duljine* vektorskoga umnoška je:
- *Duljina vektorskoga umnoška dvaju vektori jednaka je površini paralelograma kojega razapinju ti vektori.*
- 3. Vektorski umnožak dvaju vektori je *okomit na svaki* od tih vektori („faktora“).
- 4. Vektorski umnožak dvaju vektori jednak je nulvektoru ako i samo ako je jedan „faktor“ jednak nulvektoru ili su „faktori“ kolinearni.
- Drugim riječima, vektorski produkt dvaju vektori – od kojih niti jedan nije nulvektor – jednak je nulvektoru ako i samo ako su ti vektori kolinearni.

3.10. VEKTORSKI UMNOŽAK

- 4. Vektori \overrightarrow{OA} , \overrightarrow{OB} i $\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}$ u navedenom poretku su desno orijentirani.
- To znači da zakretanje vektora \overrightarrow{OA} u vektor \overrightarrow{OB} za kut φ , promatrano iz krajnje točke njihova vektorskoga umnoška, ima smjer suprotan smjeru gibanja kazaljke na satu.
- Iz toga svojstva ili iz definicije vektorskoga umnoška lagano se pokazuje da vektorski umnožak ima svojstvo *antikomutativnosti*, tj. vrijedi: $\overrightarrow{OB} \times \overrightarrow{OA} = (-1) \cdot (\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB})$.
- OPREZ: Zbog gornjega svojstva bitan je poredak vektora prigodom računanja njihova vektorskoga umnoška!
- Smjer vektorskoga umnoška često se određuje tzv. *pravilom desne ruke* (vidjeti sljedeći slide).
- 5. Vektorski umnožak je operacija karakteristična *isključivo* za skup $V^3(O)$.

3.11. PRAVILO DESNE RUKE



Postavimo desnu ruku tako da kažiprst pokazuje smjer prvoga vektora, a srednji prst smjer drugoga vektora.

Tada palac pokazuje smjer njihova vektorskoga umnoška.

3.12. NAPOMENE

- 1. Definicija vektorskoga umnoška lakše se pamti u obliku sljedeće formalne determinante reda 3:

$$\overrightarrow{OC} := \overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

- 2. *Površina trokuta* kojega razapinju dva zadana vektora jednaka je polovici duljine njihova vektorskoga umnoška.

3.13. MJEŠOVITI UMNOŽAK

- Ako su zadani vektori $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ i $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$
- onda je mješoviti umnožak tih vektora *realan broj* M definiran s

$$M := (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} \Rightarrow M = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

- *Apsolutna vrijednost* mješovitoga umnoška M jednaka je volumenu *paralelepipeda* (tijelo čiju mrežu tvore šest u parovima jednakih paralelograma) razapetoga zadanim vektorima.
- Ako zadani vektori razapinju *trostranu prizmu*, onda je volumen te prizme jednak *polovici* absolutne vrijednosti broja M .
- Ako zadani vektori razapinju *tetraedar*, onda je volumen te piramide jednak *šestini* absolutne vrijednosti broja M .

3.13. MJEŠOVITI UMNOŽAK

- Pokazuje se da vrijedi sljedeće svojstvo:
- *Mješoviti umnožak triju vektora jednak je nuli ako i samo ako je jedan od tih vektora nulvektor ili ako sva tri vektora pripadaju istoj ravnini* (tj. ako su komplanarni).
- Drugim riječima, mješoviti umnožak triju vektora – od kojih niti jedan nije nulvektor – jednak je nuli ako i samo ako su ti vektori komplanarni (tj. ako i samo ako ti vektori pripadaju istoj ravnini).
- *Podsjetnik:* Svaka ravnina u standardnom euklidskom prostoru jednoznačno je zadana izborom bilo koje tri različite *točke* te ravnine. Ekvivalentno, svaka ravnina jednoznačno je zadana izborom bilo kojih *dvaju* nekolinearnih vektora koji pripadaju toj ravnini.

3.14. NAPOMENA

- Ako u *mješovitu umnošku* zamijenimo *poredak dvaju vektora* (ne mijenjajući redoslijed operacija – to ne smijemo učiniti jer će, u suprotnom, konačan rezultat biti vektor, a ne realan broj!), onda će *mješoviti umnožak promijeniti predznak*.
- Ovo svojstvo lagano slijedi iz svojstva determinante:
- Ako u determinanti zamijenimo *bilo koja* dva njezina retka, onda će determinanta promijeniti predznak.
- Iz navedene tvrdnje slijede ove jednakosti:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b}$$