4. DISKRETNE SLUČAJNE VARIJABLE

4.1. SLUČAJNE VARIJABLE. FUNKCIJA RAZDIOBE SLUČAJNE VARIJABLE. ČEBIŠEVLJEV TEOREM.

4.1.1. POJAM SLUČAJNE VARIJABLE

- Pri svakoj izvedbi nekoga slučajnog pokusa ostvaruje se točno jedan elementaran događaj.
- Svrha pokusa može biti i *mjerenje* numeričke veličine čije vrijednosti ovise o ishodu slučajnoga pokusa.
- Npr. u *izvlačenju prvoga broja* u igri LOTO 7/35 možemo *svakom* od 35 elementarnih događaja pridružiti pripadni izvučeni broj.
- Analogno možemo učiniti i u slučajnim pokusima *izvlačenje prvih dvaju brojeva*, ..., *izvlačenje svih sedam brojeva* (uz oprez: prostori elementarnih događaja u svakom od tih pokusa su međusobno različiti!)
- Preslikavanje koje *svakom* elementarnom događaju pridružuje neki realan broj pripada u kategoriju tzv. *slučajnih varijabli.*

4.1.2. DISKRETNA SLUČAJNA VARIJABLA

- Neka je S bilo koji *konačan* ili *prebrojiv* podskup skupa $\mathbb{R}$.
- *Podsjetnik*: Skup S je prebrojiv ako postoji bijekcija $f : \mathbb{N} \to S$.
- Promatramo slučajni pokus čiji je vjerojatnosni prostor $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.
- Diskretna slučajna varijabla je svako preslikavanje $X : \Omega \to S$ takvo da je za svaki $s \in S$ skup $A_s := \{\omega \in \Omega : X(\omega) = s\} \in \mathcal{F}$.
- Zahtjev $A_s := \{\omega \in \Omega : X(\omega) = s\} \in \mathcal{F}$ sigurno vrijedi ako je $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$, ali u općem slučaju ne mora biti ispunjen.

4.1.3. PRIMJER 1.

- Neka je $S = [35] := \{1, 2, ..., 35\}$.
- Promatramo slučajni pokus *izvlačenje prvoga broja u igri* LOTO 7/35.
- Skup svih elementarnih događaja toga slučajnoga pokusa je $\mathbf{\Omega} = \{\boldsymbol{\omega}_k : k \in [35]\}$, gdje je $\boldsymbol{\omega}_k := \{\text{izvučen je broj } k\}$.
- Uz pretpostavku nenamještenoga izvlačenja, vjerojatnost *svakoga* od 35 elementarnih događaja iznosi

$$p_k = p = \frac{1}{35}.$$

- Preslikavanje $X : \mathbf{\Omega} \to S$ definirano pravilom:
  - $X(\boldsymbol{\omega}_k) = k$,
- je diskretna slučajna varijabla. Njezina prirodna domena je skup $\mathbf{\Omega}$. Njezina slika je skup S.
- Na skupu $\mathbf{\Omega}$ moguće je zadati još neke diskretne slučajne varijable, npr. :
- $X(\boldsymbol{\omega}_k)$ = zbroj svih znamenaka broja k,
- $X(\boldsymbol{\omega}_k)$ = umnožak svih znamenaka broja k itd.
- Te diskretne slučajne varijable imaju *istu prirodnu domenu*, *ali različite slike* (i različita pravila).

4.1.4. PRIMJER 2.

- Neka je $S = \{0, 1, 2\}$.
- Promatramo slučajni pokus *nogometna utakmica između NK Akumulator i NK Uskok* (u 1. kolu međužupanijske lige).
- Skup svih elementarnih događaja je $\mathbf{\Omega} = \{\{\textit{neodlučeno}\}, \{\textit{pobjeda NK Akumulator}\}, \{\textit{pobjeda NK Uskok}\}\}$.
- Uz pretpostavke da su obje momčadi podjednake "jakosti" i da utakmica nije namještena, sva tri elementarna događaja su jednako vjerojatna. Vjerojatnost svakoga od njih iznosi
  - $p = \frac{1}{3}$.
- Preslikavanje $X : \mathbf{\Omega} \to S$ definirano s:
- $X(\{\textit{neodlučeno}\}) = 0$;
- $X(\{\textit{pobjeda NK Akumulator}\}) = 1$;
- $X(\{\textit{pobjeda NK Uskok}\}) = 2$;
- je diskretna slučajna varijabla.
- **Zadatak**: Sami zadajte barem još dvije diskretne slučajne varijable na skupu $\mathbf{\Omega}$.

4.1.5. PRIMJER 3.

- Neka je $S = \{0, 1\}$.
- Promatramo slučajni pokus *rođenje djeteta*.
- Skup svih elementarnih događaja je $\mathbf{\Omega} = \{\{\text{rođen je dječak}\}, \{\text{rođena je djevojčica}\}\}$.
- Uz pretpostavku da tijekom razdoblja trudnoće ultrazvukom nije određen djetetov spol, *oba* elementarna događaja su jednako vjerojatna. Vjerojatnost svakoga od njih iznosi
  - $p = \dfrac{1}{2}$.
- Svakom pojedinom elementarnom događaju prirodno je pridružiti spol rođenoga djeteta, tj.
- $\{\text{rođen je dječak}\} \mapsto$ dječak,
- $\{\text{rođena je djevojčica}\} \mapsto$ djevojčica.
- Ako *kodiramo* spol djeteta šiframa:
- dječak $\leftrightarrow 0$, djevojčica $\leftrightarrow 1$,
- gornje preslikavanje postaje diskretna slučajna varijabla $X : \mathbf{\Omega} \to S$.
- Bez provedenoga kodiranja gornje preslikavanje ne bismo svrstali u kategoriju slučajnih varijabli. Naime, iako je skup $A = \{\text{dječak, djevojčica}\}$ konačan, on nije podskup skupa realnih brojeva.
- Zbog ovakvih slučajnih pokusa, u definiciji slučajne varijable tražimo da je S podskup skupa $\mathbb{R}$, a ne bilo kakav konačan ili prebrojiv skup.

4.1.6. FUNKCIJA VJEROJATNOSTI

- Neka je S konačan ili prebrojiv podskup skupa $\mathbb{R}$.
- Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ vjerojatnosni prostor i neka je $X : \Omega \to S$ diskretna slučajna varijabla.
- U definiciji slučajne varijable X navodi se da za svaki $s \in S$ skup $A_s := \{\omega \in \Omega : X(\omega) = s\}$ treba biti element algebre događaja $\mathcal{F}$.
- Zbog toga za svaki $s \in S$ *postoji jedinstveni* $p_s \in [0, 1]$ takav da je $p_s = P(A_s)$. p_s je, dakle, vjerojatnost događaja A_s.
- Zbog toga ima smisla promatrati preslikavanje koje svakom $s \in S$ pridružuje broj p_s. Kratko pišemo:
- $p_s = P(A_s) =: P(X = s)$
- i čitamo: "pe es je vjerojatnost da slučajna varijabla iks poprimi vrijednost es".

4.1.6. FUNKCIJA VJEROJATNOSTI

- Formalno, *funkcija vjerojatnosti diskretne slučajne varijable* je realna funkcija $f : S \to [0, 1]$ definirana pravilom:

$$f(s) = p_s.$$

- Za različite vrijednosti $s \in S$ događaji A_s su međusobno isključivi, a mora se dogoditi točno jedan od njih. Zbog toga vrijedi jednakost:

$$\sum_{s \in S} f(s) = \sum_{s \in S} p_s = 1$$

4.1.7. TABLICA RAZDIOBE

- Nakon što svakoj vrijednosti $s \in S$ pridružimo odgovarajuću vjerojatnost $p_s \in [0, 1]$, dobiveni rezultat pregledno možemo zapisati ovako:

$$X \sim \begin{pmatrix} s_1 & s_2 & \dots & s_n & \dots \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n & \dots \end{pmatrix}$$

- Gornji zapis nazivamo **tablica razdiobe** slučajne varijable X.
- Umjesto termina „tablica razdiobe" još se koriste termini **zakon razdiobe** i **distribucija**.

4.1.8. FUNKCIJA RAZDIOBE VJEROJATNOSTI

- Ako znamo tablicu razdiobe neke slučajne varijable, onda ima smisla definirati realnu funkciju $F : S \to [0, 1]$ s:

$$F(s) := P(X \leq s) = \sum_{s_i \leq s} P(X = s_i) = \sum_{s_i \leq s} p_i$$

- Funkcija F naziva se **funkcija razdiobe vjerojatnosti** (u literaturi često i kraće: *funkcija razdiobe*) slučajne varijable X.
- Prema definiciciji, interpretacija funkcije F je:
- *$F(s)$ je* ***vjerojatnost*** *da slučajna varijabla X poprimi vrijednost jednaku ili manju od s.*

4.1.9. NAPOMENE

- 1. Vrijede sljedeće "jezične ekvivalencije":
- *barem* $\leftrightarrow$ *najmanje (jednako)* $\leftrightarrow$ *ne manje od* $\leftrightarrow$ *jednako ili veće od*
- *najviše (jednako)* $\leftrightarrow$ *ne veće od* $\leftrightarrow$ *jednako ili manje od.*
- 2. Iz svojstava funkcije vjerojatnosti i definicije funkcije razdiobe vjerojatnosti slijedi (oprez: obratite pozornost na znakove nejednakosti):

$$P(X < s) = F(s) - p_s$$

$$P(X \geq s) = 1 + p_s - F(s)$$

$$P(X > s) = 1 - F(s)$$

4.1.10. OČEKIVANJE SLUČAJNE VARIJABLE

- Prema definiciji vjerojatnosti, tablicu razdiobe slučajne varijable X možemo protumačiti i ovako:
- *Tablica razdiobe slučajne varijable X određena je modalitetima slučajne varijable X* (to su svi elementi skupa S) *i njihovim relativnim frekvencijama* (za svaki $s \in S$ to je vjerojatnost p_s).
- Tako se tablica razdiobe može "poistovjetiti" s tablicom relativnih frekvencija iz opisne statistike, a funkcija razdiobe vjerojatnosti s kumulativnim nizom relativnih frekvencija „manje od".

4.1.10. OČEKIVANJE SLUČAJNE VARIJABLE

- U opisnoj statistici naučili smo pojmove *aritmetička sredina*, *varijanca* i *standardna devijacija*.
- Analogone tih pojmova primijenit ćemo na diskretne slučajne varijable.
- *Težinska* ili *vagana* aritmetička sredina svih vrijednosti slučajne varijable naziva se **matematičko očekivanje** ili, kraće, **očekivanje**.
- *Očekivanje* diskretne slučajne varijable X označava se s $E(X)$ i računa prema formuli:

$$E(X)=\sum_{s\in S} s\cdot p_s$$

4.1.10. OČEKIVANJE SLUČAJNE VARIJABLE

- **Oprez**: Ako je S beskonačan skup, očekivanje se definira kao zbroj odgovarajućega reda, pa općenito ne mora postojati (postojanje ovisi o tome je li dotični red konvergentan ili divergentan).
- Uzmemo li *bilo koje* a, $b \in \mathbb{R}$ i definiramo li slučajnu varijablu Y s

$$Y := a \cdot X + b \sim \begin{pmatrix} a \cdot s_1 + b & a \cdot s_2 + b & \ldots & a \cdot s_n + b & \ldots \\ p_1 & p_2 & \ldots & p_n & \ldots \end{pmatrix},$$

- tada nije teško pokazati da vrijedi jednakost:
- $E(a \cdot X + b) = a \cdot E(X) + b.$

4.1.11. NAPOMENA

- Ako je f bilo koja realna funkcija i X diskretna slučajna varijabla, tada je $Y := f\ (X)$ također diskretna slučajna varijabla.
- Njezina slika je skup $A = \{f\ (s) : s \in S\}$, a tablica razdiobe:

$$Y = f(X) \sim \begin{pmatrix} f(s_1) & f(s_2) & \dots & f(s_n) & \dots \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n & \dots \end{pmatrix}$$

- Kad god je to moguće, tablicu razdiobe slučajne varijable Y treba "reducirati" tako da među vrijednostima $f\ (s_1),\dots,\ f\ (s_n)$ nema međusobno jednakih brojeva.

4.1.12. VARIJANCA I STANDARDNA DEVIJACIJA SLUČAJNE VARIJABLE

- Analogno kao i za *grupirane* podatke u opisnoj statistici, definiraju se *varijanca* i *standardna devijacija* slučajne varijable X
- Pritom u definicijskim formulama "ulogu" aritmetičke sredine "igra" očekivanje slučajne varijable
- Definicijske formule su:

$$V(X) = \sum_{s \in S} s^2 \cdot p_s - \left(E(X)\right)^2$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

- Interpretacije su analogne onima iz opisne statistike:
- **Varijanca** diskretne slučajne varijable je prosječno kvadratno odstupanje vrijednosti slučajne varijable od očekivanja te varijable.
- **Standardna devijacija** diskretne slučajne varijable je prosječno odstupanje vrijednosti slučajne varijable od očekivanja te varijable.

4.1.13. NAPOMENA

- Može se pokazati da vrijede sljedeće jednakosti:

$$\mathbf{1}.\ V(X)=E\left(X^2\right)-\left(E(X)\right)^2.$$

$$\mathbf{2}.\ V(X)=E\left(\left(X-E(X)\right)^2\right).$$

$$\mathbf{3}.\ V(a\cdot X+b)=a^2\cdot V(X).$$

$$\mathbf{4}.\ \sigma(a\cdot X+b)=|a|\cdot\sigma(X).$$

4.1.14. ČEBIŠEVLJEV TEOREM

- Podsjetnik: *Čebiševljev teorem* u opisnoj statistici govorio je o "raspršenosti" elemenata statističkoga niza oko aritmetičke sredine toga niza.
- U „terminologiji" diskretnih slučajnih varijabli aritmetičku sredinu zamjenjujemo matematičkim očekivanjem. Tako dobivamo:
- Teorem 1. (*Čebiševljev teorem za diskretne slučajne varijable*) Neka je X diskretna slučajna varijabla s očekivanjem E i standardnom devijacijom σ. Tada za svaki $\alpha > 1$ vrijedi nejednakost:

$$P\left(X \in \left[E-\alpha \cdot \sigma,\ E+\alpha \cdot \sigma\right]\right) > 1-\frac{1}{\alpha^2}$$

Napomena: Pretpostavljamo da su sve promatrane slučajne varijable diskretne.

1. Tvrtka *Macrohard* d.o.o. iz Ripišta planira investiranje u proizvodnju novoga tipa računala *Pear*. U pripadnom projektu se navodi da će, nakon aktiviranja investicije, prosječna mjesečna potražnja za računalom *Pear* iznositi 100, 200, 300 ili 400 komada, pri čemu je svaka vrijednost jednako vjerojatna. Neka je X slučajna varijabla koja označava prosječnu mjesečnu potražnju za računalom *Pear*.

   a) Napišite tablicu razdiobe varijable X.

   Rješenje: Svakom od četiriju navedenih iznosa prosječne mjesečne potražnje pridružujemo pripadnu vjerojatnost. Prema pretpostavci, svi iznosi imaju međusobno jednake vjerojatnosti. Budući da se, kao prosječna mjesečna potražnja, mora pojaviti jedan od njih, zbroj tih vjerojatnosti mora biti jednak 1. Odatle zaključujemo da je vjerojatnost svakoga iznosa jednaka

$$p = \frac{1}{4} = 0.25\,.$$

   Dakle, pripadna tablica razdiobe varijable X je:

$$X \sim \begin{pmatrix} 100 & 200 & 300 & 400 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

b) Napišite funkciju razdiobe vjerojatnosti varijable X.

Rješenje: Domena funkcije vjerojatnosti F je skup

$$S = \{100, 200, 300, 400\}.$$

Svakom elementu s toga skupa pridružimo vjerojatnost da je slučajna varijabla X jednaka ili manja od s. Iz gornje tablice razdiobe lagano slijedi:

$$\begin{aligned}
F(100) &= P(X = 100) = \\
&= \frac{1}{4}, \\
F(200) &= P(X = 100) + P(X = 200) = \\
&= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \\
&= \frac{1}{2}, \\
F(300) &= P(X = 100) + P(X = 200) + P(X = 300) = \\
&= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \\
&= \frac{3}{4}, \\
F(400) &= P(X = 100) + P(X = 200) + P(X = 300) + P(X = 400) = \\
&= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Dobivene rezultate pregledno prikazujemo sljedećom tablicom.

x	100	200	300	400
$F(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1

c) Izračunajte očekivanje, varijancu i standardnu devijaciju slučajne varijable X. Interpretirajte svaki od dobivenih rezultata.

Rješenje: Koristeći definicijske formule za navedene statističke pokazatelje dobivamo:

$$
\begin{aligned}
E(X) &= \frac{1}{4}\cdot(100+200+300+400) = 250,\\
V(X) &= \left(\frac{1}{4}\right)\cdot\left(100^2+200^2+300^2+400^2\right)-(250)^2 = 12500,\\
\sigma(X) &= \sqrt{12500} = 50\cdot\sqrt{5} \approx 111.8.
\end{aligned}
$$

Interpretacije navedenih pokazatelja su sljedeće:

Očekivana prosječna mjesečna potražnja iznosi 250 komada.

Prosječno kvadratno odstupanje vrijednosti prosječne mjesečne potražnje od *očekivanja* pripadne slučajne varijable iznosi 12 500 („kvadratnih komada“).

Prosječno odstupanje vrijednosti prosječne mjesečne potražnje od *očekivanja* pripadne slučajne varijable iznosi približno 112 komada.

2. Tablica razdiobe slučajne varijable *X* je:

$$X \sim \begin{pmatrix} \frac{-\pi}{4} & 0 & \frac{\pi}{4} & \frac{3}{4}\cdot\pi \\ p & 2\cdot p & \frac{1}{3}\cdot p & \frac{2}{3}\cdot p \end{pmatrix}.$$

a) Odredite vrijednost *p*, pa napišite pripadnu tablicu razdiobe slučajne varijable *X*.

Rješenje: Znamo da zbroj svih vjerojatnosti vrijednosti koje može poprimiti varijabla *X* treba biti jednak 1. Tako dobivamo jednadžbu:

$$\begin{aligned} & p+2\cdot p+\frac{1}{3}\cdot p+\frac{2}{3}\cdot p=1, \\ & 4\cdot p=1, \\ & p=\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Odatle je $p=\frac{1}{4}$. Dakle, tablica razdiobe varijable *X* glasi:

$$X \sim \begin{pmatrix} \frac{-\pi}{4} & 0 & \frac{\pi}{4} & \frac{3}{4}\cdot\pi \\ \frac{1}{4} & 2\cdot\frac{1}{4} & \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4} & \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-\pi}{4} & 0 & \frac{\pi}{4} & \frac{3}{4}\cdot\pi \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{12} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

b) Napišite tablicu razdiobe slučajne varijable $Y=\operatorname{tg} X$.

Rješenje: Traženu tablicu dobijemo tako da na vrijednosti koje može poprimiti varijabla *X* „djelujemo“ funkcijom tg, a pripadne vjerojatnosti prepišemo. Dakle,

$$Y \sim \begin{pmatrix} \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) & \operatorname{tg} 0 & \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right) & \operatorname{tg}\left(\frac{3}{4}\cdot\pi\right) \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{12} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & -1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{12} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{5}{12} & \frac{1}{2} & \frac{1}{12} \end{pmatrix}$$

c) Izračunajte očekivanje, varijancu i standardnu devijaciju obiju slučajnih varijabli.

Rješenje: Koristeći definicijske relacije za tražene statističke pokazatelje dobivamo:

$$E(X)=\left(-\frac{\pi}{4}\right)\cdot\frac{1}{4}+0\cdot\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}\cdot\frac{1}{12}+\frac{3}{4}\cdot\pi\cdot\frac{1}{6}=\frac{\pi}{12},$$

$$V(X)=\left(-\frac{\pi}{4}\right)^2\cdot\frac{1}{4}+0^2\cdot\frac{1}{2}+\left(\frac{\pi}{4}\right)^2\cdot\frac{1}{12}+\left(\frac{3}{4}\cdot\pi\right)^2\cdot\frac{1}{6}-\left(\frac{\pi}{12}\right)^2=\frac{31}{288}\cdot\pi^2,$$

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\frac{1}{24}\cdot\sqrt{62}\cdot\pi,$$

$$E(Y)=(-1)\cdot\frac{5}{12}+0\cdot\frac{1}{2}+1\cdot\frac{1}{12}=-\frac{1}{3},$$

$$V(Y)=(-1)^2\cdot\frac{5}{12}+0^2\cdot\frac{1}{2}+1^2\cdot\frac{1}{12}-\left(-\frac{1}{3}\right)^2=\frac{7}{18},$$

$$\sigma(Y)=\sqrt{V(Y)}=\frac{1}{6}\cdot\sqrt{14}.$$

3. Funkcija razdiobe vjerojatnosti slučajne varijable $X:\Omega \to \mathbb{Z}$ definirana je pravilom:

$$F(x)=\begin{cases}0, \text{ za } x<-1,\\ 0.5, \text{ za } -1\le x\le 1,\\ 1, \text{ za } x>1.\end{cases}$$

Odredite tablicu razdiobe slučajne varijable $Y=2^{|X-1|}-1$.

Rješenje: Znamo da je, po definiciji, $F(x)=P(X\le x)$. Ako je $F(x)=0$ za neki x, onda slučajna varijabla X ne poprima nijednu vrijednost jednaku ili manju od x. Iz pravila kojim je definirana funkcija F u ovom zadatku zaključujemo da je:

$$F(x)=0, \text{ za } x\in\{-2,-3,-4,-5,...\}$$

Dakle, slučajna varijabla X ne poprima nijednu vrijednost strogo manju od –1.

Prema pravilu kojim je definirana funkcija F u ovom zadatku vrijedi:

$$F(-1)=F(0)=F(1)=0.5.$$

Iz te jednakosti možemo odrediti vjerojatnost pridruženu svakoj pojedinoj vrijednosti. Naime, prema definiciji funkcije razdiobe vjerojatnosti vrijedi:

$$F(-1)=P(X\le -1)=P(X=-1)+P(X\le -2).$$

Drugi pribrojnik jednak je nuli jer slučajna varijabla X ne poprima nijednu vrijednost strogo manju od –1. Odatle slijedi:

$$P(X=-1)=F(-1)=0.5.$$

Analogno su:

$$\begin{aligned}&F(0)=P(X\le 0)=P(X=0)+P(X=-1)+P(X\le -2),\\ &0.5=P(X=0)+0.5+0,\\ &P(X=0)=0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&F(1)=P(X\le 1)=P(X=1)+P(X=0)+P(X=-1)+P(X\le -2),\\ &0.5=P(X=1)+0+0.5+0,\\ &P(X=1)=0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&F(2)=P(X\le 2)=P(X=2)+P(X=1)+P(X=0)+P(X=-1)+P(X\le -2),\\ &1=P(X=2)+0+0+0.5+0,\\ &P(X=2)=0.5.\end{aligned}$$

Sada primijetimo da je

$$P(X=-1)+P(X=2)=0.5+0.5=1.$$

Budući da zbroj *svih* vjerojatnosti pridruženih vrijednostima koje može poprimiti slučajna varijabla X mora biti jednak 1, zaključujemo da slučajna varijabla X ne može poprimiti nijednu vrijednost strogo veću od 2. To znači da su jedine vrijednosti koje može poprimiti slučajna varijabla X (vrijednosti sa strogo pozitivnom vjerojatnošću) –1 i 2.

Tako smo dobili:

$$X \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

Dalje lagano slijedi:

$$\begin{aligned} Y = 2^{|X-1|}-1 &\sim \begin{pmatrix} 2^{|-1-1|}-1 & 2^{|2-1|-1} \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

4. Slučajna varijabla X ima zakon razdiobe:

$$P(X=k)=\frac{1}{2^k},\ \forall k\in\mathbb{N}.$$

Izračunajte očekivanje, varijancu i standardnu devijaciju slučajnih varijabli X i $Y=\cos(\pi\cdot X)$. Sve svoje tvrdnje precizno obrazložite.

Rješenje: Znamo da vrijedi jednakost (zbroj konvergentnoga geometrijskoga reda!):

$$\sum_{k=0}^{+\infty}x^k=\frac{1}{1-x},\ \forall x\in\langle -1,1\rangle.$$

Deriviranjem ove jednakosti „član po član“ po varijabli x dobijemo:

$$\sum_{k=1}^{+\infty}k\cdot x^{k-1}=\frac{1}{(1-x)^2}.$$

Pomnožimo svaki član ove jednakosti s x, pa dobijemo:

$$\sum_{k=1}^{+\infty}k\cdot x^{k}=\frac{x}{(1-x)^2}.$$

U ovu jednakost uvrstimo $x=\frac{1}{2}$, pa dobijemo:

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{k}{2^k}=2.$$

Tako je:

$$\begin{aligned}E(X)&=\sum_{k=1}^{+\infty}k\cdot P(X=k)=\\&=\sum_{k=1}^{+\infty}k\cdot\frac{1}{2^k}=\\&=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{k}{2^k}=\\&=2.\end{aligned}$$

Deriviramo li jednakost

$$\sum_{k=1}^{+\infty}k\cdot x^{k}=\frac{x}{(1-x)^2}$$

ponovno „član po član“ po varijabli x, dobit ćemo:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k^2 \cdot x^{k-1} = \frac{x+1}{(1-x)^3}.$$

Pomnožimo svaki član ove jednakosti s x, pa dobijemo:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k^2 \cdot x^{k} = \frac{x^2+x}{(1-x)^3}.$$

U tu jednakost uvrstimo $x=\frac{1}{2}$, pa dobijemo:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k^2}{2^k} = 6.$$

Tako je varijanca varijable X jednaka:

$$\begin{aligned}
V(X) &= \sum_{k=1}^{+\infty} k^2 \cdot P(X=k) - (E(X))^2 = \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} k^2 \cdot \frac{1}{2^k} - 2^2 = \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k^2}{2^k} - 4 = \\
&= 6-4 = \\
&= 2.
\end{aligned}$$

Sada lako izračunamo standardnu devijaciju varijable X:

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{2}.$$

Primijetimo da varijabla Y može poprimiti točno dvije vrijednosti: –1 i 1. Prvu od njih varijabla Y poprima za neparne prirodne brojeve, a drugu za parne prirodne brojeve. Vjerojatnost da varijabla Y poprimi vrijednost –1 jednaka je:

$$\begin{aligned}
p_1 &= P(Y=-1) = \\
&= \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^5} + \ldots = \\
&= \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2^2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} = \\
&= \frac{2}{3}
\end{aligned},$$

pa je vjerojatnost da varijabla Y poprimi vrijednost 1 jednaka:

$$
\begin{aligned}
p_2 &= 1 - p_1 = \\
&= 1 - \frac{2}{3} = \\
&= \frac{1}{3}.
\end{aligned}
$$

Dakle,

$$
Y \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix},
$$

pa lako izračunamo:

$$
\begin{aligned}
E(Y) &= (-1) \cdot \frac{2}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} = \\
&= \frac{-1}{3}, \\
V(Y) &= (-1)^2 \cdot \frac{2}{3} + 1^2 \cdot \frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = \\
&= \frac{8}{9}, \\
\sigma(Y) &= \sqrt{V(Y)} = \\
&= \sqrt{\frac{8}{9}} = \\
&= \frac{2}{3} \cdot \sqrt{2}.
\end{aligned}
$$