Napomena: Pretpostavljamo da su sve promatrane slučajne varijable diskretne.

1. Tvrtka *Macrohard* d.o.o. iz Ripišta planira investiranje u proizvodnju novoga tipa računala *Pear*. U pripadnom projektu se navodi da će, nakon aktiviranja investicije, prosječna mjesečna potražnja za računalom *Pear* iznositi 100, 200, 300 i 400 komada, pri čemu je svaki iznos jednako vjerojatan. Neka je X slučajna varijabla koja označava prosječnu mjesečnu potražnju za računalom *Pear*.

a) Napišite tablicu razdiobe varijable X.

b) Napišite funkciju razdiobe vjerojatnosti varijable X.

c) Izračunajte vjerojatnost da će prosječna mjesečna potražnja biti manja od 250 komada.

d) Izračunajte očekivanje, varijancu i standardnu devijaciju slučajne varijable X. Interpretirajte svaki od dobivenih rezultata.

2. Tablica razdiobe slučajne varijable X je:

$$X \sim \begin{pmatrix} -\frac{\pi}{4} & 0 & \frac{\pi}{4} & \frac{3}{4}\cdot\pi \\ p & 2\cdot p & \frac{1}{3}\cdot p & \frac{2}{3}\cdot p \end{pmatrix}.$$

a) Odredite vrijednost p.

b) Napišite tablicu razdiobe slučajne varijable $Y = \operatorname{tg} X$.

c) Izračunajte očekivanje, varijancu i standardnu devijaciju obiju slučajnih varijabli.

3. Funkcija razdiobe vjerojatnosti slučajne varijable X definirana je pravilom:

$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{ za } x < -1, \\ 0.5, \text{ za } -1 \le x \le 1, \\ 1, \text{ za } x > 1. \end{cases}$$

Odredite tablicu razdiobe slučajne varijable $Y = 2^{|X-1|} - 1$.

4. Slučajna varijabla X ima zakon razdiobe: $P(X = k) = \frac{1}{2^k}$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Izračunajte očekivanje, varijancu i standardnu devijaciju varijabli X i $Y = \cos(\pi \cdot X)$. Sve svoje tvrdnje precizno obrazložite.

Rezultati zadataka

1.

a) $X \sim \begin{pmatrix} 100 & 200 & 300 & 400 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$.

b)

x	100	200	300	400
$F(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1

Tablica 1.

c) $P(X < 250) = P(X = 100) + P(X = 200) = F(200) = \frac{1}{2}$.

d)

$$E(X) = \frac{1}{4} \cdot (100 + 200 + 300 + 400) = 250,$$

$$V(X) = \left(\frac{1}{4}\right) \cdot \left(100^2 + 200^2 + 300^2 + 400^2\right) - (250)^2 = 12500,$$

$$\sigma(X) = \sqrt{12500} = 50 \cdot \sqrt{5} \approx 111.8.$$

2.

a) Iz $p + 2 \cdot p + \frac{1}{3} \cdot p + \frac{2}{3} \cdot p = 1$ slijedi $p = \frac{1}{4}$. Dakle, $X \sim \begin{pmatrix} -\frac{\pi}{4} & 0 & \frac{\pi}{4} & \frac{3}{4} \cdot \pi \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{12} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$.

b) $Y \sim \begin{pmatrix} \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) & \operatorname{tg} 0 & \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right) & \operatorname{tg}\left(\frac{3}{4} \cdot \pi\right) \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{12} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & -1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{12} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{5}{12} & \frac{1}{2} & \frac{1}{12} \end{pmatrix}$.

c) Prema definicijskim formulama računamo redom:

$$E(X) = \left(-\frac{\pi}{4}\right) \cdot \frac{1}{4} + 0 \cdot \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{12} + \frac{3}{4} \cdot \pi \cdot \frac{1}{6} = \frac{\pi}{12},$$

$$V(X) = \left(-\frac{\pi}{4}\right)^2 \cdot \frac{1}{4} + 0^2 \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 \cdot \frac{1}{12} + \left(\frac{3}{4} \cdot \pi\right)^2 \cdot \frac{1}{6} - \left(\frac{\pi}{12}\right)^2 = \frac{31}{288} \cdot \pi^2,$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \frac{1}{24} \cdot \sqrt{62} \cdot \pi,$$

$$E(Y) = (-1) \cdot \frac{5}{12} + 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{12} = -\frac{1}{3},$$

$$V(Y) = (-1)^2 \cdot \frac{5}{12} + 0^2 \cdot \frac{1}{2} + 1^2 \cdot \frac{1}{12} - \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{7}{18},$$

$$\sigma(Y) = \sqrt{V(Y)} = \frac{1}{6} \cdot \sqrt{14}.$$

3. Prema definiciji funkcije razdiobe vjerojatnosti diskretne slučajne varijable zaključujemo da je:

$$X \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

Odatle slijedi:

$$Y \sim \begin{pmatrix} 2^{|-1-1|}-1 & 2^{|2-1|-1} \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

4. Znamo da vrijedi jednakost $\sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$, $\forall x \in \langle -1,1 \rangle$. Deriviranjem ove jednakosti po varijabli *x* dobijemo $\sum_{k=1}^{+\infty} k \cdot x^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$. Pomnožimo svaki član ove jednakosti s *x*, pa dobijemo: $\sum_{k=1}^{+\infty} k \cdot x^k = \frac{x}{(1-x)^2}$. U ovu jednakost uvrstimo $x = \frac{1}{2}$, pa dobijemo: $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k}{2^k} = 2$. Tako je $E(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k}{2^k} = 2$.

Deriviramo li jednakost $\sum_{k=1}^{+\infty} k \cdot x^k = \frac{x}{(1-x)^2}$ ponovno po varijabli *x*, dobit ćemo: $\sum_{k=1}^{+\infty} k^2 \cdot x^{k-1} = \frac{x+1}{(1-x)^3}$. Pomnožimo svaki član ove jednakosti s *x*, pa dobijemo: $\sum_{k=1}^{+\infty} k^2 \cdot x^k = \frac{x^2+x}{(1-x)^3}$. U tu jednakost uvrstimo $x = \frac{1}{2}$, pa dobijemo $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k^2}{2^k} = 6$. Tako je varijanca varijable *X* jednaka: $V(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k^2}{2^k} - (E(X))^2 = 6 - 4 = 2$.

Sada lako izračunamo standardnu devijaciju varijable *X*: $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{2}$.

Primijetimo da varijabla *Y* može poprimiti točno dvije vrijednosti: –1 i 1. Vjerojatnost da varijabla *Y* poprimi vrijednost –1 jednaka je $p_1 = \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^5} + \ldots = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2^2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} = \frac{2}{3}$, pa je vjerojatnost da varijabla *Y* poprimi vrijednost 1 jednaka $p_2 = 1 - p_1 = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$. Dakle, $Y \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$, pa lako izračunamo:

$$E(Y) = (-1)\cdot\frac{2}{3} + 1\cdot\frac{1}{3} = -\frac{1}{3},$$

$$V(Y) = (-1)^2\cdot\frac{2}{3} + 1^2\cdot\frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9},$$

$$\sigma(Y) = \sqrt{V(Y)} = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2}{3}\cdot\sqrt{2}.$$