

4. DISKRETNE SLUČAJNE VARIJABLE

4.1. SLUČAJNE VARIJABLE.
FUNKCIJA RAZDIOBE SLUČAJNE
VARIJABLE. ČEBIŠEVLJEV POUČAK.

4.1.1. POJAM SLUČAJNE VARIJABLE

- Pri svakoj izvedbi nekoga slučajnog pokusa ostvaruje se točno jedan elementaran događaj.
- Svrha pokusa može biti i *mjerenje* numeričke veličine čije vrijednosti ovise o ishodu slučajnoga pokusa.
- Npr. u *izvlačenju prvoga broja* u igri LOTO 7/35 možemo *svakom* od 35 elementarnih događaja pridružiti pripadni izvučeni broj.
- Analogno možemo učiniti i u slučajnim pokusima *izvlačenje prvih dvaju brojeva, ..., izvlačenje svih sedam brojeva* (uz oprez: prostori elementarnih događaja u svakom od tih pokusa su međusobno različiti!)
- Preslikavanje koje *svakom* elementarnom događaju pridružuje neki realan broj pripada u kategoriju tzv. *slučajnih varijabli*.

4.1.2. DISKRETNA SLUČAJNA VARIJABLA

- Neka je S bilo koji *konačan* ili *prebrojiv* podskup skupa \mathbb{R} .
- *Podsjetnik:* Skup S je prebrojiv ako postoji bijekcija $f: S \rightarrow \mathbb{N}$.
- Promatramo slučajni pokus čiji je vjerojatnosni prostor (Ω, \mathcal{F}, P) .
- **Diskretna slučajna varijabla** je svako preslikavanje $X: \Omega \rightarrow S$ takvo da za svaki $s \in S$ skup $A_s := \{\omega \in \Omega : X(\omega) = s\} \in \mathcal{F}$.
- Zahtjev $A_s := \{\omega \in \Omega : X(\omega) = s\} \in \mathcal{F}$ sigurno vrijedi ako je $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$, ali u općem slučaju ne mora biti ispunjen.

4.1.3. PRIMJER 1.

- Neka je $S = [35] := \{1, 2, \dots, 35\}$.
- Promatramo slučajni pokus *izvlačenje prvoga broja u igri LOTO 7/35*.
- Skup svih elementarnih događaja toga slučajnoga pokusa je $\Omega = \{\omega_k : k \in [35]\}$, gdje je $\omega_k := \{\text{izvučen je broj } k\}$.
- Uz pretpostavku nemanještenoga izvlačenja, vjerojatnost *svakoga* od 35 elementarnih događaja iznosi

$$p_k = p = \frac{1}{35}.$$

- Preslikavanje $X : \Omega \rightarrow S$ definirano pravilom:
 - $X(\omega_k) = k$,
- je diskretna slučajna varijabla. Njezina prirodna domena je skup Ω . Njezina slika je skup S .
- Na skupu Ω moguće je zadati još neke diskrete slučajne varijable, npr. :
- $X(\omega_k) = \text{zbroj svih znamenaka broja } k$,
- $X(\omega_k) = \text{umnožak svih znamenaka broja } k$ itd.
- Te diskrette slučajne varijable imaju *istu prirodnu domenu, ali različite slike* (i različita pravila).

4.1.4. PRIMJER 2.

- Neka je $S = \{0, 1, 2\}$.
- Promatramo slučajni pokus *nogometna utakmica između NK Akumulator i NK Uskok* (u 1. kolu međužupanijske lige).
- Skup svih elementarnih događaja je $\Omega = \{\{\text{neodlučeno}\}, \{\text{pobjeda NK Akumulator}\}, \{\text{pobjeda NK Uskok}\}\}$.
- Uz pretpostavke da su obje momčadi podjednake “jakosti” i da utakmica nije namještena, sva tri elementarna događaja su jednako vjerojatna. Vjerojatnost svakoga od njih iznosi
 - $p = \frac{1}{3}$.
- Preslikavanje $X : \Omega \rightarrow S$ definirano s:
 - $X(\{\text{neodlučeno}\}) = 0;$
 - $X(\{\text{pobjeda NK Akumulator}\}) = 1;$
 - $X(\{\text{pobjeda NK Uskok}\}) = 2;$
 - je diskretna slučajna varijabla.
- **Zadatak:** Sami zadajte barem još dvije diskrete slučajne varijable na skupu Ω .

4.1.5. PRIMJER 3.

- Neka je $S = \{0, 1\}$.
- Promatramo slučajni pokus *rođenje djeteta*.
- Skup svih elementarnih događaja je $\Omega = \{\{\text{rođen je dječak}\}, \{\text{rođena je djevojčica}\}\}$.
- Uz pretpostavku da tijekom razdoblja trudnoće ultrazvukom nije određen djetetov spol, oba elementarna događaja su jednakovjerojatna. Vjerojatnost svakoga od njih iznosi
 - $p = \frac{1}{2}$.
- Svakom pojedinom elementarnom događaju prirodno je pridružiti spol rođenoga djeteta, tj.
 - $\{\text{rođen je dječak}\} \mapsto \text{dječak}$,
 - $\{\text{rođena je djevojčica}\} \mapsto \text{djevojčica}$.
- Ako kodiramo spol djeteta šiframa:
 - dječak $\leftrightarrow 0$, djevojčica $\leftrightarrow 1$,
 - gornje preslikavanje postaje diskretna slučajna varijabla $X : \Omega \rightarrow S$.
- Bez provedenoga kodiranja gornje preslikavanje ne bismo svrstali u kategoriju slučajnih varijabli. Naime, iako je skup $A = \{\text{dječak}, \text{djevojčica}\}$ konačan, on nije podskup skupa realnih brojeva.
- Zbog ovakvih slučajnih pokusa u definiciji slučajne varijable tražimo da je S podskup skupa \mathbb{R} , a ne bilo kakav konačan ili prebrojiv skup.

4.1.6. FUNKCIJA VJEROJATNOSTI

- Neka je S konačan ili prebrojiv podskup skupa \mathbb{R} .
- Neka je (Ω, \mathcal{F}, P) vjerojatnosni prostor i neka je $X : \Omega \rightarrow S$ diskretna slučajna varijabla.
- U definiciji slučajne varijable X navodi se da za svaki $s \in S$ skup $A_s := \{\omega \in \Omega : X(\omega) = s\}$ treba biti element algebre događaja \mathcal{F} .
- Zbog toga za svaki $s \in S$ postoji jedinstveni $p_s \in [0, 1]$ takav da je $p_s = P(A_s)$. p_s je, dakle, vjerojatnost događaja A_s .
- Zbog toga ima smisla promatrati preslikavanje koje svakom $s \in S$ pridružuje broj p_s . Kratko pišemo:
- $p_s = P(A_s) =: P(X = s)$
- i čitamo: “pe es je vjerojatnost da slučajna varijabla iks poprimi vrijednost es”.

4.1.6. FUNKCIJA VJEROJATNOSTI

- Formalno, *funkcija vjerojatnosti diskretne slučajne varijable* je realna funkcija $f : S \rightarrow [0, 1]$ definirana pravilom:

$$f(s) = p_s.$$

- Za različite vrijednosti $s \in S$ događaji A_s su međusobno isključivi, a mora se dogoditi točno jedan od njih. Zbog toga vrijedi jednakost:

$$\sum_{s \in S} f(s) = \sum_{s \in S} p_s = 1$$

4.1.7. TABLICA RAZDIOBE

- Nakon što svakoj vrijednosti $s \in S$ pridružimo odgovarajuću vjerojatnost $p_s \in [0, 1]$, dobiveni rezultat pregledno možemo zapisati ovako:

$$X \sim \begin{pmatrix} s_1 & s_2 & \dots & s_n & \dots \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n & \dots \end{pmatrix}$$

- Gornji zapis nazivamo **tablica razdiobe** slučajne varijable X .
- Umjesto termina „tablica razdiobe” još se koriste termini **zakon razdiobe** i **distribucija**.

4.1.8. FUNKCIJA RAZDIOBE VJEROJATNOSTI

- Ako znamo tablicu razdiobe neke slučajne varijable, onda ima smisla definirati realnu funkciju $F : S \rightarrow [0, 1]$ s:
$$F(s) := P(X \leq s) = \sum_{s_i \leq s} P(X = s_i) = \sum_{s_i \leq s} p_i$$
- Funkcija F naziva se **funkcija razdiobe vjerojatnosti** (u literaturi često i kraće: *funkcija razdiobe*) slučajne varijable X .
- Prema definiciji, interpretacija funkcije F je:
- $F(s)$ je *vjerojatnost* da slučajna varijabla X poprimi vrijednost jednaku ili manju od s .

4.1.9. NAPOMENE

- **1.** Vrijede sljedeće “jezične ekvivalencije”:
- *barem* \leftrightarrow *najmanje* (*jednako*) \leftrightarrow *ne manje od* \leftrightarrow *jednako ili veće od*
- *najviše (jednako)* \leftrightarrow *ne veće od* \leftrightarrow *jednako ili manje od.*
- **2.** Iz svojstava funkcije vjerojatnosti i definicije funkcije razdiobe vjerojatnosti slijedi (**oprez**: obratite pozornost na znakove nejednakosti):

$$P(X < s) = F(s) - p_s$$

$$P(X \geq s) = 1 + p_s - F(s)$$

$$P(X > s) = 1 - F(s)$$

4.1.10. OČEKIVANJE SLUČAJNE VARIJABLE

- Prema definiciji vjerojatnosti, tablicu razdiobe slučajne varijable X možemo protumačiti i ovako:
- *Tablica razdiobe slučajne varijable X određena je modalitetima slučajne varijable X (to su svi elementi skupa S) i njihovim relativnim frekvencijama (za svaki $s \in S$ to je vjerojatnost p_s).*
- Tako se tablica razdiobe može “poistovjetiti” s tablicom relativnih frekvencija iz opisne statistike, a funkcija razdiobe vjerojatnosti s kumulativnim nizom relativnih frekvencija „manje od”.

4.1.10. OČEKIVANJE SLUČAJNE VARIJABLE

- U opisnoj statistici naučili smo pojmove *aritmetička sredina, varijanca i standardna devijacija*.
- Analogone tih pojmove primijenit ćemo na diskretne slučajne varijable.
- *Težinska ili vagana aritmetička sredina svih vrijednosti slučajne varijable naziva se matematičko očekivanje ili, kraće, očekivanje.*
- *Očekivanje diskretne slučajne varijable X označava se s $E(X)$ i računa prema formuli:*

$$E(X) = \sum_{s \in S} s \cdot p_s$$

4.1.10. OČEKIVANJE SLUČAJNE VARIJABLE

- **Oprez:** Ako je S beskonačan skup, očekivanje se definira kao zbroj odgovarajućega reda, pa općenito ne mora postojati (postojanje ovisi o tome je li dotični red konvergentan ili divergentan).
- Uzmemo li *bilo koje* $a, b \in \mathbb{R}$ i definiramo li slučajnu varijablu Y s

$$Y := a \cdot X + b \sim \begin{pmatrix} a \cdot s_1 + b & a \cdot s_2 + b & \dots & a \cdot s_n + b & \dots \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n & \dots \end{pmatrix},$$

- tada nije teško pokazati da vrijedi jednakost:
- $E(a \cdot X + b) = a \cdot E(X) + b.$

4.1.11. NAPOMENA

- Ako je f bilo koja realna funkcija i X diskretna slučajna varijabla, tada je $Y := f(X)$ također diskretna slučajna varijabla.
- Njezina slika je skup $A = \{f(s) : s \in S\}$, a tablica razdiobe:

$$Y = f(X) \sim \begin{pmatrix} f(s_1) & f(s_2) & \dots & f(s_n) & \dots \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n & \dots \end{pmatrix}$$

- Kad god je to moguće, tablicu razdiobe slučajne varijable Y treba “reducirati” tako da među vrijednostima $f(s_1), \dots, f(s_n)$ nema međusobno jednakih brojeva.

4.1.12. VARIJANCA I STANDARDNA DEVIJACIJA SLUČAJNE VARIJABLE

- Analogno kao i za *grupirane* podatke u opisnoj statistici, definiraju se *varijanca* i *standardna devijacija* slučajne varijable X
- Pritom u definicijskim formulama “ulogu” aritmetičke sredine “igra” očekivanje slučajne varijable
- Definicijske formule su:
$$V(X) = \sum_{s \in S} s^2 \cdot p_s - [E(X)]^2$$
$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$
- Interpretacije su analogne onima iz opisne statistike:
- **Varijanca** diskretne slučajne varijable je prosječno kvadratno odstupanje vrijednosti slučajne varijable od očekivanja te varijable.
- **Standardna devijacija** diskretne slučajne varijable je prosječno odstupanje vrijednosti slučajne varijable od očekivanja te varijable.

4.1.13. NAPOMENA

- Može se pokazati da vrijede sljedeće jednakosti:

$$1. V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

$$2. V(X) = E((X - E(X))^2)$$

$$3. V(a \cdot X + b) = a^2 \cdot V(X)$$

$$4. \sigma(a \cdot X + b) = |a| \cdot \sqrt{V(X)}$$

4.1.14. ČEBIŠEVLJEV POUČAK

- Podsjetnik: Čebiševljev poučak u opisnoj statistici govorio je o “raspršenosti” elemenata statističkoga niza oko aritmetičke sredine toga niza.
- U terminologiji matematičke statistike aritmetičku sredinu zamjenjujemo matematičkim očekivanjem slučajne varijable. Tako dobivamo:
- **Poučak 1.** (*Čebiševljev poučak za diskretnе slučajne varijable*) Neka je X diskretna slučajna varijabla s očekivanjem E i standardnom devijacijom σ . Tada za svaki $\alpha > 0$ vrijedi nejednakost:

$$P\left(X \in [E - \alpha \cdot \sigma, E + \alpha \cdot \sigma]\right) > 1 - \frac{1}{\alpha^2}$$