4. FUNKCIJE

4.1. POJAM FUNKCIJE.
PRIRODNA DOMENA FUNKCIJE.
NULTOČKA FUNKCIJE. GRAF FUNKCIJE.
BIJEKCIJA.INVERZ BIJEKCIJE.
OMEĐENOST, MONOTONOST I PARNOST REALNE FUNKCIJE. PREBROJIVI I NEPREBROJIVI SKUPOVI.

4.1.1. POJAM FUNKCIJE

- Neka su X i Y dva neprazna skupa.
- Ako je prema nekom *pravilu* f **svakom** elementu skupa X pridružen **točno jedan** element skupa Y, kažemo da je na skupu X zadana **funkcija** f s vrijednostima u skupu Y.
- Pišemo: $f : X \to Y$.
- Skup X nazivamo **područje definicije** ili **domena** funkcije f.
- Skup Y nazivamo **područje vrijednosti** ili **kodomena** funkcije f.
- Funkcija f je potpuno zadana ako zadamo njezinu domenu, kodomenu i pravilo prema kojemu se elementima domene pridružuju elementi kodomene.

4.1.1. POJAM FUNKCIJE

- Svaki element domene funkcije f naziva se (**nezavisna**) **varijabla** ili **argument** funkcije f. Zbog toga se obično kaže da je f funkcija *argumenta* ili *varijable* x, t, u i sl.
- Ako se pravilom f elementu x pridružuje element y, to pišemo kao $y = f(x)$ ili kao $x \mapsto y$. (Prvi zapis se koristi znatno češće.)
- *Pravilo* f najčešće je neka analitička formula npr. $f(x) = x + 1$, ali može biti zadano i *tablično*, odnosno *grafički.*
- Ne istaknemo li drugačije, skupovi X i Y bit će podskupovi skupa $\mathbb{R}$, pa ćemo govoriti o **realnim funkcijama** (taj dio izraza znači da je kodomena podskup skupa $\mathbb{R}$) **jedne realne varijable** (ovaj dio izraza znači da je domena neki podskup skupa $\mathbb{R}$).
- Dvije funkcije f i g su **jednake** ako im se (zasebno) podudaraju domene, podudaraju kodomene i ako vrijedi jednakost $f(x) = g(x)$, za svaki x iz domene.
- Npr. funkcije $f(x) = 1$ i $g(x) = \sin^2 x + \cos^2 x$ su jednake, a funkcije $f(x) = 1$ i $g(x) = \text{tg } x \cdot \text{ctg } x$ nisu jednake (jer imaju različite domene).
- Ne istaknemo li drugačije, u nastavku pretpostavljamo da je f realna funkcija jedne realne varijable.

4.1.2. NAPOMENA

- Funkcije $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ i $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definirane pravilima $f(x) = \sin x$ i $g(x) = \sin x$ *nisu* jednake jer nemaju jednake domene. Međutim, domena funkcije f je pravi podskup domene funkcije g. U tom slučaju kažemo da je f **suženje** ili **restrikcija** funkcije g na segment $[0, 1]$, odnosno, ekvivalentno, da je g **proširenje** funkcije f na skup $\mathbb{R}$.
- Da bismo izbjegli ovakve situacije (tj. utvrđivanje tražimo li domenu restrikcije funkcije ili domenu nekoga od njezinih proširenja), definiramo **prirodnu domenu** funkcije kao najveći (s obzirom na relaciju „biti podskup”) podskup skupa $\mathbb{R}$ na kojemu je definirana ta funkcija.
- Kad god ne istaknemo drukčije, pretpostavljamo da je domena funkcije jednaka njezinoj prirodnoj domeni.

4.1.2. NAPOMENA

- Pojam *kodomene* funkcije treba razlikovati od pojma *slike* funkcije.
- Slika funkcije $f : A \to B$ je skup
- $\mathrm{Im}\, f := \{f(x) : x \in A\} \subseteq B$.
- Iako je vrlo korisna, sliku funkcije je u većini slučajeva vrlo teško odrediti analitički, pa čak i grafički. U takvim slučajevima je bolje i prikladnije koristiti kodomenu.

4.1.3. NULTOČKA FUNKCIJE

- Neka je $f: X \to Y$ i neka je $0 \in Y$.
- Svaki $x \in X$ takav da je $f(x) = 0$ nazivamo nultočka funkcije f.
- Skup svih nultočaka funkcije f označavamo s $N(f)$.
- Oprez: Iz definicije nultočke slijedi $N(f) \subseteq X$. Tako npr. funkcija $f: [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 4$ nema nijednu nultočku, funkcija $g: [0, 2] \to \mathbb{R}$, $g(t) = \sin t$ ima točno jednu nultočku itd.

4.1.4. ALGEBARSKE OPERACIJE S FUNKCIJAMA

- Neka su A, $B \subseteq \mathbb{R}$, $f: A \to \mathbb{R}$ i $g: B \to \mathbb{R}$.
- Definiramo sljedeće osnovne algebarske operacije s funkcijama:

a) zbrajanje: $(f+g)(x) := f(x) + g(x), \ \forall x \in A \cap B;$

b) oduzimanje: $(f-g)(x) := f(x) - g(x), \ \forall x \in A \cap B;$

c) množenje: $(f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x), \ \forall x \in A \cap B;$

d) dijeljenje: $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) := \dfrac{f(x)}{g(x)}, \ \forall x \in A \cap (B \setminus N(g));$

e) kompozicija: $(g \circ f)(x) := g(f(x)), \ \forall x \in C := \{x \in A : f(x) \in B\} \subseteq A.$

4.1.5. GRAF FUNKCIJE

- Neka je $f : X \to Y$.
- **Graf** funkcije f je skup
- $\Gamma(f) := \{(x, f(x)) : x \in X\}$.
- **Oprez**: Često se tvrdi da je graf *svake* realne funkcije jedne realne varijable neka ravninska krivulja. To je općenito netočno. Postoje realne funkcije jedne realne varijable kojima graf nije ravninska krivulja, a postoje i ravninske krivulje (npr. kružnica, elipsa) koje nisu grafovi nijedne realne funkcije jedne realne varijable.
- Za utvrđivanje je li neka ravninska krivulja graf neke realne funkcije praktično je koristan sljedeći kriterij:
- *Neka ravninska krivulja je graf neke realne funkcije ako i samo ako svaki pravac usporedan s osi ordinata siječe tu ravninsku krivulju u najviše jednoj točki* (tj. ili je uopće ne siječe ili je siječe u točno jednoj točki).

4.1.5. BIJEKCIJA. INVERZ BIJEKCIJE

- Neka je $f : X \to Y$.
- Kažemo da je funkcija f **bijekcija** ako postoji funkcija $g : Y \to X$ takva da *istovremeno* vrijede jednakosti:

$$\begin{cases} (f \circ g)(y) = y, \ \forall y \in Y, \\ (g \circ f)(x) = x, \ \forall x \in X. \end{cases}$$

- Može se pokazati da, ako funkcija g postoji, onda je ona jedinstvena. Zbog toga je označavamo s f^{-1} i nazivamo **inverz funkcije** f.
- **Oprez:** $f^{-1} \neq \frac{1}{f}$.

4.1.6. ODREĐIVANJE PRAVILA INVERZA BIJEKCIJE

- Domena i kodomena inverza bijekcije određeni su zadavanjem same bijekcije. Zbog toga preostaje razmotriti sljedeći problem.
- Problem: Odrediti pravilo inverza zadane bijekcije f.
- Algoritam za određivanje pravila inverza bijekcije f
- Ulaz: bijekcija $f : X \to Y$ čije je pravilo zadano analitički (zatvorenom formulom)
- Korak 1. Iz jednakosti $y = f(x)$ izraziti x. Dobiva se izraz oblika $x = g(y)$, gdje je g nova funkcija varijable y.
- Korak 2. Pravilo funkcije g je traženo pravilo inverza f^{-1}. (Praktično, samo treba zamijeniti oznaku varijable u funkciji dobivenoj u koraku 1.)

4.1.7. OMEĐENA FUNKCIJA

- Neka je $f: X \to Y$.
- Ako postoji barem jedan $m \in \mathbb{R}$ takav da za svaki $x \in X$ vrijedi nejednakost $f(x) \geq m$, kažemo da je funkcija f **omeđena odozdo**.
- To praktično znači da se cijeli graf funkcije f nalazi *iznad* pravca $y = m$ ili na tom pravcu. Drugim riječima, nijedna točka grafa funkcije f ne nalazi se ispod pravca $y = m$.
- Analogno, ako postoji barem jedan $M \in \mathbb{R}$ takav da za svaki $x \in X$ vrijedi nejednakost $f(x) \leq M$, kažemo da je funkcija f **omeđena odozgo**.
- To praktično znači da se cijeli graf funkcije f nalazi *ispod* pravca $y = M$ ili na tom pravcu. Drugim riječima, nijedna točka grafa funkcije f ne nalazi se iznad pravca $y = M$.
- Funkciju koja je omeđena i odozdo i odozgo kratko nazivamo **omeđenom** funkcijom.
- Dakle, funkcija f je omeđena ako postoje $m, M \in \mathbb{R}$ takvi da za svaki $x \in X$ vrijedi nejednakost $m \leq f(x) \leq M$.
- To znači da je graf funkcije f "ukliješten" između pravaca $y = m$ i $y = M$.

4.1.8. MONOTONE FUNKCIJE

- Neka je $f: X \to Y$.
- Ako je za *svake dvije* vrijednosti $x_1, x_2 \in X$ istinita tvrdnja:
- $(x_1 < x_2) \Rightarrow (f(x_1) \leq f(x_2))$,
- kažemo da je funkcija f **monotono rastuća** (ili kraće **rastuća**).
- To znači da povećanje vrijednosti nezavisne varijable povlači nesmanjivanje vrijednosti funkcije (tj. vrijednost funkcije f se ili ne mijenja ili povećava).
- Ako u gornjoj implikaciji umjesto $\leq$ vrijedi stroga nejednakost $<$, tj. ako je za *svake dvije* vrijednosti $x_1, x_2 \in X$ istinita tvrdnja:
- $(x_1 < x_2) \Rightarrow (f(x_1) < f(x_2))$,
- kažemo da je funkcija f **strogo rastuća**.
- To znači da povećanje vrijednosti nezavisne varijable povlači povećanje vrijednosti funkcije.

4.1.8. MONOTONE FUNKCIJE

- Ako je za *svake dvije* vrijednosti $x_1, x_2 \in X$ istinita tvrdnja:
- $(x_1 < x_2) \Rightarrow (f(x_1) \geq f(x_2))$,
- kažemo da je funkcija f **monotono padajuća** (ili kraće *padajuća*).
- To znači da povećanje vrijednosti nezavisne varijable povlači nepovećanje vrijednosti funkcije (tj. vrijednost funkcije f se ili ne mijenja ili smanjuje).
- Ako u gornjoj implikaciji umjesto $\geq$ vrijedi stroga nejednakost $>$, tj. ako je za *svake dvije* vrijednosti $x_1, x_2 \in X$ istinita tvrdnja:
- $(x_1 < x_2) \Rightarrow (f(x_1) > f(x_2))$,
- kažemo da je funkcija f **strogo padajuća**.
- To znači da povećanje vrijednosti nezavisne varijable povlači smanjenje vrijednosti funkcije.

4.1.8. MONOTONE FUNKCIJE

- Strogo rastuće i strogo padajuće funkcije nazivamo **strogo monotone funkcije.**
- Iz te definicije i definicije injekcije izravno slijedi:
- **Tvrdnja.** Svaka strogo monotona funkcija je injekcija.
- Obratna tvrdnja nije točna. Protuprimjer je funkcija $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definirana s

$$f(x) = \begin{cases} x, \text{ ako je } x \in \mathbb{Q}, \\ -x, \text{ ako je } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

4.1.9. (NE)PARNE FUNKCIJE

- Neka je $f\colon X \to Y$.
- Ako za *svaki* $x \in X$ vrijede relacije:
- 1.) $-x \in X$;
- 2.) $f(-x) = f(x)$,
- kažemo da je funkcija f parna.
- Ako jednakost 2.) zamijenimo jednakošću
- 2'.) $f(-x) = -f(x)$,
- kažemo da je funkcija neparna.

4.1.9. (NE)PARNE FUNKCIJE

- Iz definicije *parne* funkcije slijedi da nijedna parna funkcija nije injekcija.
- Za neparne funkcije je moguće da budu injekcije (npr. $f(x) = x$) i da ne budu injekcije (npr. $f(x) = \sin x$).
- (Ne)parnost funkcije može se "očitati" iz njezina grafa.
- Graf *svake* parne funkcije je *osno simetričan* s obzirom na os ordinata.
- Graf *svake* neparne funkcije je *centralno simetričan* s obzirom na ishodište pravokutnoga koordinatnoga sustava u ravnini.
- (Ne)parnost funkcije najlakše je provjeravati izravno iz odgovarajuće definicije toga svojstva funkcije.

4.1.10. PREBROJIVI I NEPREBROJIVI SKUPOVI

- Osnovni „motiv” za uvođenje pojma bijekcije nije definiranje inverza osnovnih elementarnih funkcija, nego *prebrajanje* (bes)konačnih skupova.
- Za *bilo koja* dva skupa, kao i za kompleksne brojeve, možemo reći (samo) jesu li međusobno jednaki ili međusobno različiti. U posebnim slučajevima možemo govoriti i o podskupovima.
- Koristeći bijekcije, *bilo koja* dva skupa možemo uspoređivati i prema *broju elemenata*.
- Kažemo da su skupovi A i B **jednakobrojni** ili **ekvipotentni** ako postoji (barem jedna) bijekcija $f\colon A \to B$.
- Može se pokazati da se u slučaju *konačnih* skupova ta definicija podudara s uobičajenom definicijom jednakobrojnosti konačnih skupova (imaju jednako mnogo elemenata).
- Bitno zanimljiviji slučaj je kad su A i B *beskonačni* skupovi.

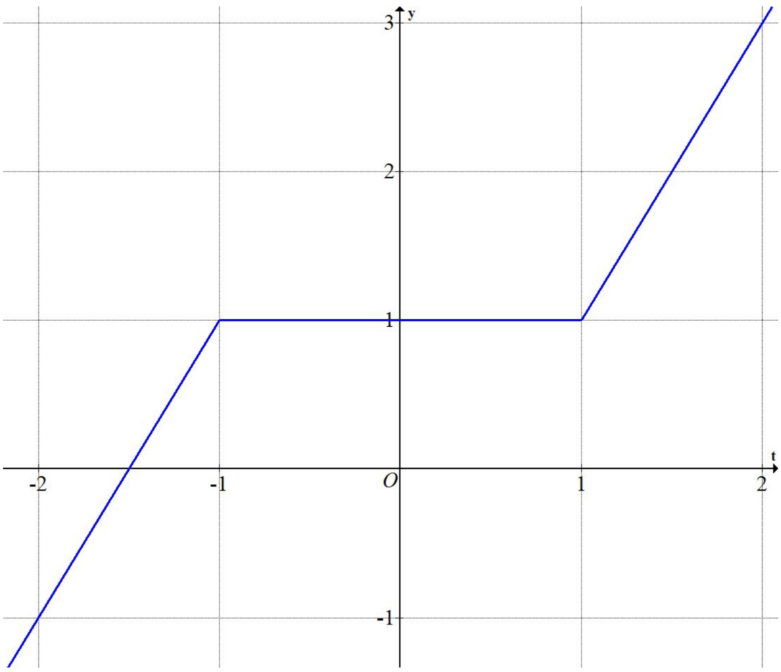
4.1.10. PREBROJIVI I NEPREBROJIVI SKUPOVI

- Neka je A beskonačan skup.
- Kažemo da je skup A **prebrojiv** ili *prebrojivo beskonačan* ako postoji bijekcija $f\colon \mathbb{N} \to A$.
- To zapravo znači da sve elemente skupa A možemo poredati u beskonačan niz.
- Može se pokazati da su skupovi $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ *i svi njihovi beskonačni podskupovi* prebrojivi skupovi.
- Skup iracionalnih brojeva, skup $\mathbb{R}$ i skup $\mathbb{C}$ nisu prebrojivi skupovi. Takve skupove nazivamo **neprebrojivi** ili *neprebrojivo beskonačni skupovi*.
- Preciznije, skup A je *neprebrojiv* ili *neprebrojivo beskonačan* ako postoji bijekcija $f\colon \mathbb{R} \to A$.
- Svi standardni oblici intervala su neprebrojivi skupovi.
- Sve elemente takvih skupova ne možemo poredati u beskonačan niz.

Napomena: Pretpostavljamo da su sve promatrane funkcije realne funkcije realne varijable.

1. Funkcija f zadana je grafički. Klasificirajte je s obzirom na omeđenost, monotonost i (ne)parnost ako je:

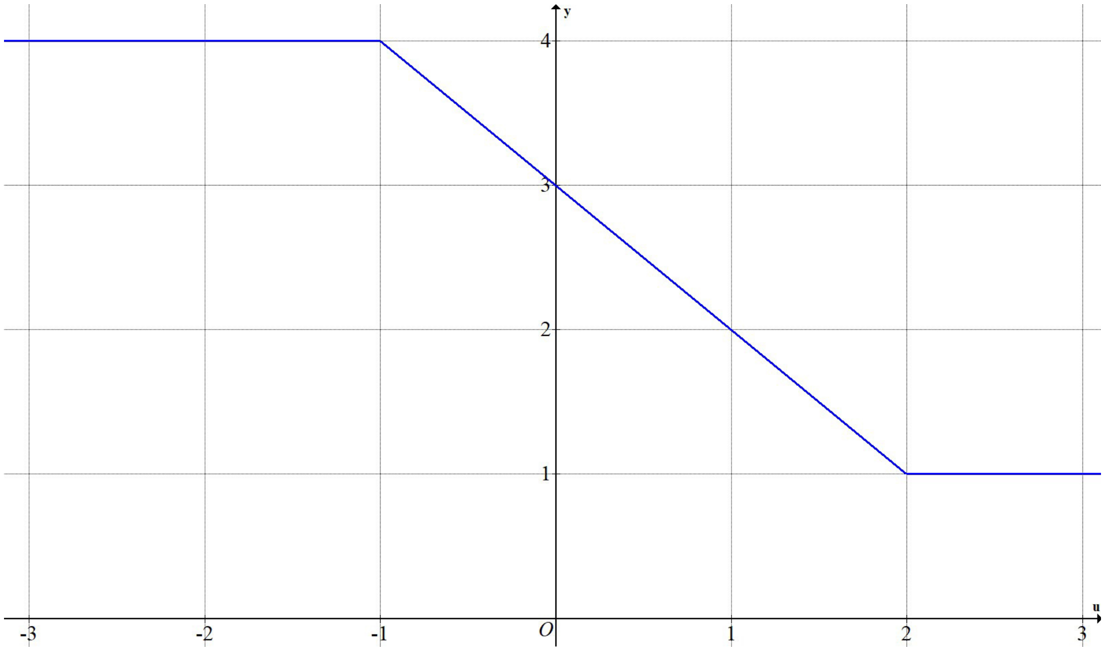
   a)



Slika 1.

Rješenje: Neomeđena, rastuća, ni parna, ni neparna. (Primijetite da su $f(2)=3$ i $f(-2)=-1$, pa postoje suprotni brojevi koji niti se preslikaju u jednake brojeve, niti se preslikaju u suprotne brojeve.)

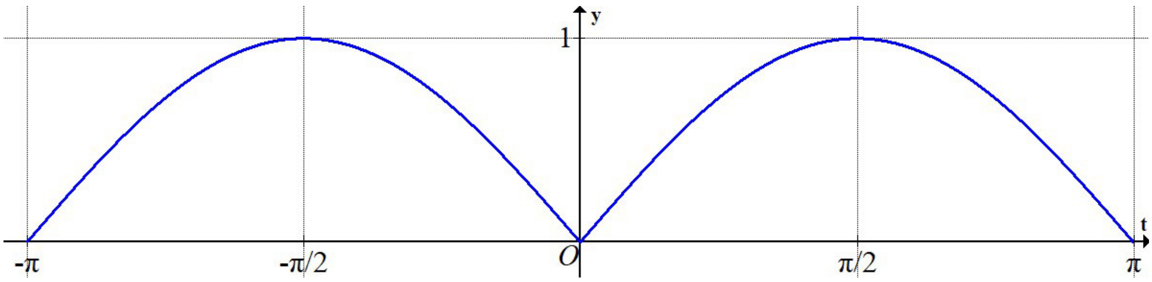
b)



Slika 2.

Rješenje: Neomeđena, padajuća, ni parna, ni neparna.

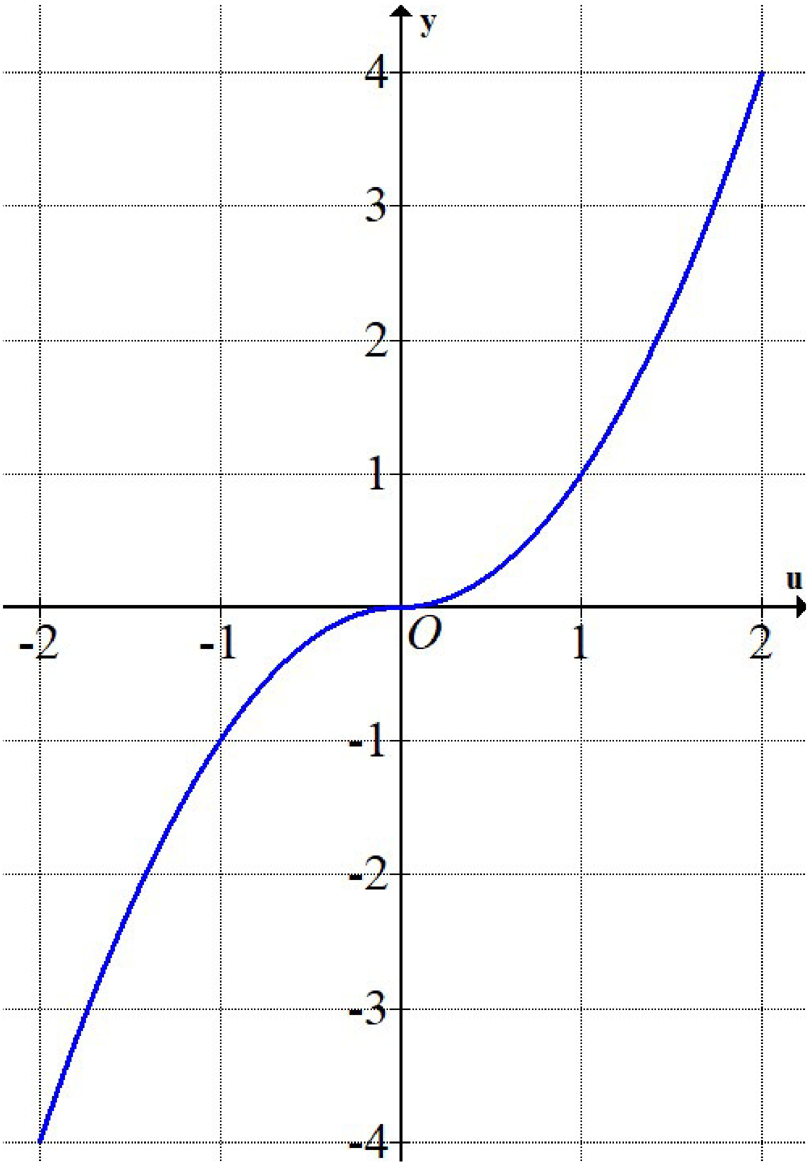
c)



Slika 3.

Rješenje: Omeđena, ni rastuća, ni padajuća, parna.

d)



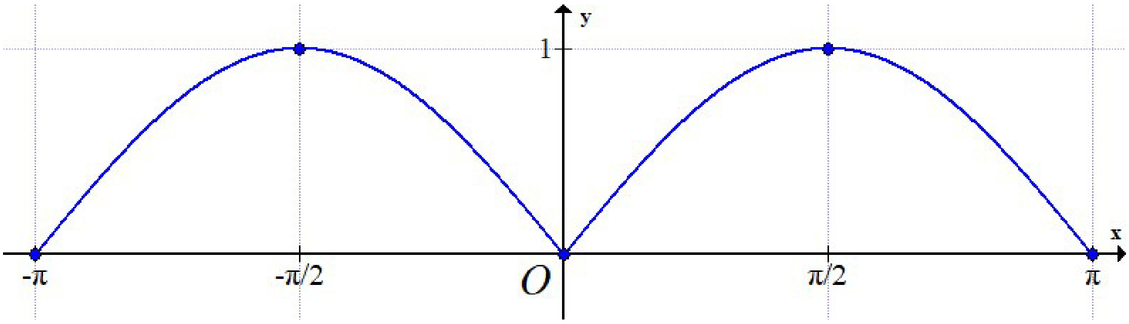
Slika 4.

Rješenje: Omeđena, strogo rastuća, neparna.

2. Nacrtajte grafove sljedećih funkcija:

a) $\begin{cases} f_1 \text{ je parna na } D(f_1) = [-\pi, \pi]; \\ f_1(x) = \sin x, \text{ za svaki } x \in [0, \pi]. \end{cases}$

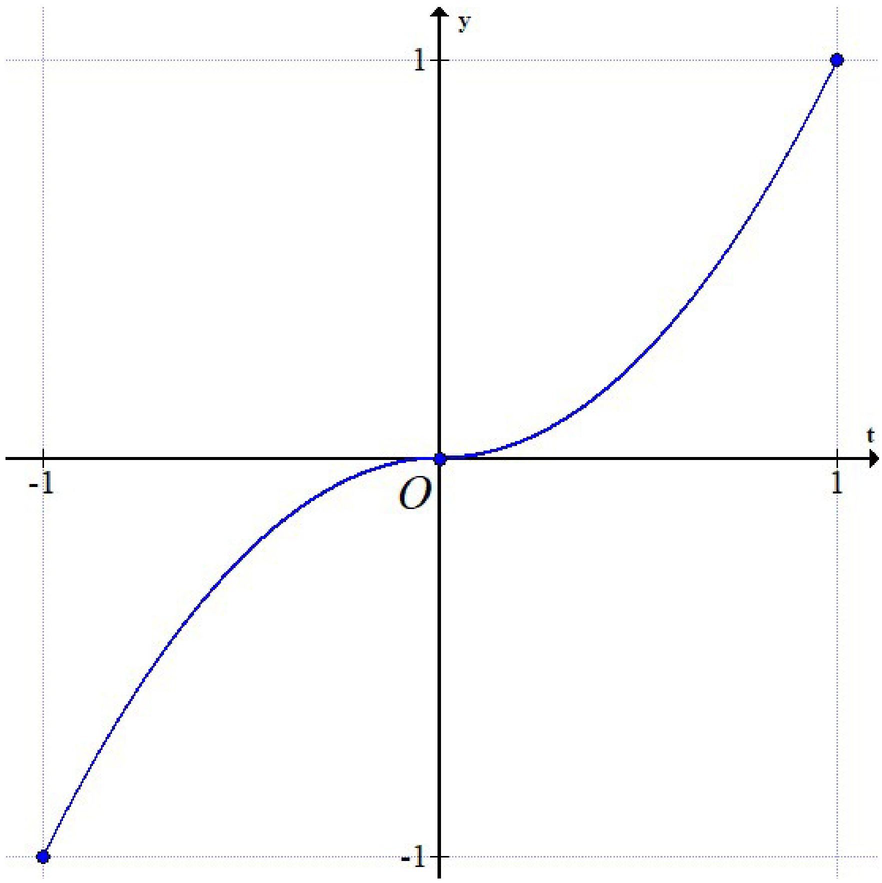
Rješenje: Vidjeti sliku 5.



Slika 5.

b) $\begin{cases} f_2 \text{ je neparna na } D(f_2) = [-1, 1]; \\ f_2(t) = t^2, \text{ za svaki } t \in [0, 1]. \end{cases}$

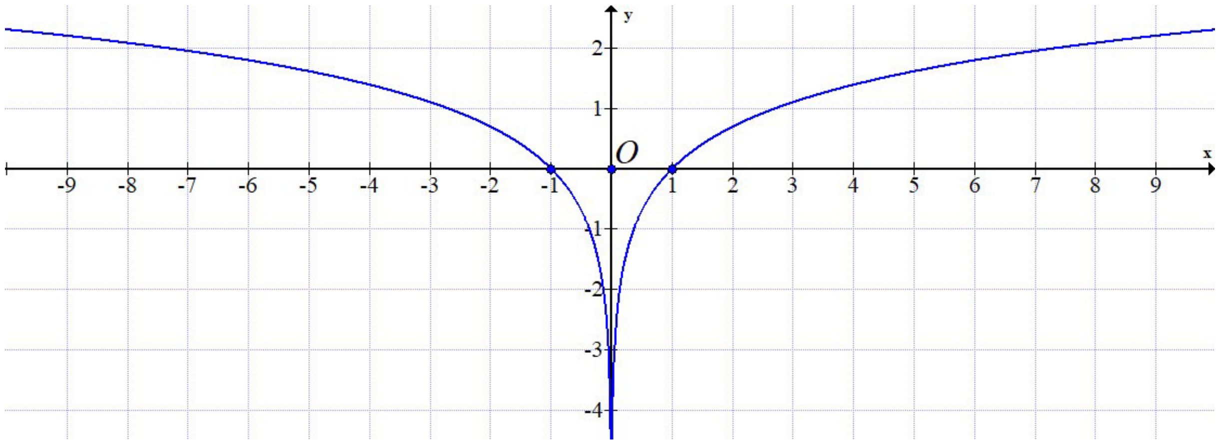
Rješenje: Vidjeti sliku 6.



Slika 6.

c) $\begin{cases} f_3 \text{ je parna na } D(f_3) = \mathbb{R}; \\ f_3(u) = \ln u, \text{ za svaki } u \in \langle 0, +\infty \rangle; \\ f_3(0) = 0. \end{cases}$

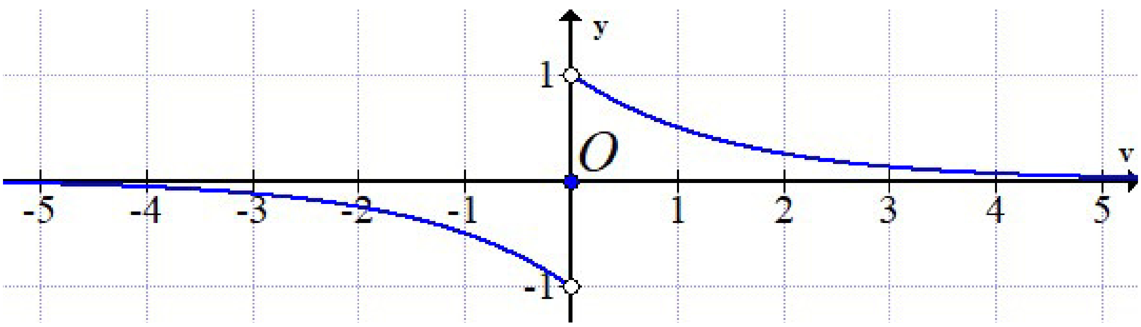
Rješenje: Vidjeti sliku 7.



Slika 7.

d) $\begin{cases} f_4 \text{ je neparna na } D(f_4) = \mathbb{R}; \\ f_4(v) = -2^v, \text{ za svaki } v \in \langle -\infty, 0 \rangle. \end{cases}$

Rješenje: Vidjeti sliku 8.



Slika 8.

3. Utvrdite jesu li sljedeće funkcije bijekcije i, ako jesu, odredite njihove inverze:

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = a \cdot x + b$, pri čemu su $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$;

b) $f : \mathbb{R} \to \left\langle 0, +\infty \right\rangle$, $f(x) = a^x$, pri čemu je $a > 0$, $a \neq 1$;

c) $f : \left\langle \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{tg} x$;

Rješenje: Sve navedene funkcije su bijekcije.
Inverz prve funkcije je također polinom 1. stupnja.
Inverz druge funkcije je logaritamska funkcija (s bazom a).
Inverz treće funkcije je funkcija arctg (arkus tangens).

4. Neka je $n \in \mathbb{N}$ proizvoljan, ali fiksiran. Diskutirajte bijektivnost funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definirane pravilom

$$f(x) = x^n$$

u zavisnosti od vrijednosti konstante *n*.

Rješenje: Uočimo da vrijedi jednakost:

$$(-x)^{2\cdot n} = x^{2\cdot n}, \ \forall x \in \mathbb{R}, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Naime,

$$\begin{aligned}(-x)^{2\cdot n} &= \left(((-1)\cdot x)^2\right)^n = \\ &= \left((-1)^2 \cdot x^2\right)^n = \\ &= \left(1 \cdot x^2\right)^n = \\ &= \left(x^2\right)^n = \\ &= x^{2\cdot n}.\end{aligned}$$

Dakle, ako je *n* paran prirodan broj, onda f nije injekcija (međusobno suprotnim brojevima pridružen je isti realan (preciznije, strogo pozitivan realan) broj).

Međutim, ako je *n* neparan prirodan broj, onda je f bijekcija. Vrijedi i obratno: ako je f bijekcija, onda je *n* neparan prirodan broj. Za $n = 1$ tvrdnja izravno slijedi iz zadatka 3. a). Za ostale neparne prirodne brojeve dokaz bijektivnosti nije elementaran, pa ga izostavljamo.

Napomena: Izravna posljedica ovoga zadatka je sljedeća tvrdnja.

Tvrdnja 1. Neka je $n \in \mathbb{N}$ proizvoljan ali fiksiran.

a) Funkcija $f_1 : \left[0, +\infty\right\rangle \to \left[0, +\infty\right\rangle$ definirana pravilom

$$f_1(x) = x^{2\cdot n}$$

je bijekcija. Njezin inverz je funkcija $f_2 : \left[0, +\infty\right\rangle \to \left[0, +\infty\right\rangle$ definirana pravilom

$$f_2(x) = \sqrt[2\cdot n]{x}.$$

b) Funkcija $f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definirana pravilom

$$f_3(x) = x^{2 \cdot n - 1}$$

je bijekcija. Njezin inverz je funkcija $f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definirana pravilom

$$f_4(x) = \sqrt[2 \cdot n - 1]{x}.$$

5. Odredite *pravilo* inverza bijekcije f (ne trebate provjeravati bijektivnost funkcije f) ako je:

a) $f(x) = 2^{1-\sqrt{x}}$;

Rješenje: Imamo redom:

$$\begin{aligned}
&x = 2^{1-\sqrt{y}}, \quad / \log_2 \\
&1-\sqrt{y} = \log_2 x, \\
&\sqrt{y} = 1-\log_2 x, \quad /^2 \\
&y = \left(1-\log_2 x\right)^2,
\end{aligned}$$

otkuda slijedi:

$$f^{-1}(x) = (1-\log_2 x)^2.$$

b) $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$;

Rješenje: Imamo redom:

$$\begin{aligned}
&x=\frac{y+1}{y-1}, \qquad /\cdot(y-1)\\
&x\cdot y-x=y+1,\\
&x\cdot y-y=x+1,\\
&y\cdot(x-1)=x+1,\\
&y=\frac{x+1}{x-1}.
\end{aligned}$$

Prema tome,

$$f^{-1}(x)=f(x)=\frac{x+1}{x-1}.$$

6. Navođenjem konkretne bijekcije dokažite jednakobrojnost sljedećih skupova:

a) $\mathbb{N}$ i $2\cdot\mathbb{N} := \{2\cdot n : n \in \mathbb{N}\}$;

b) $\mathbb{N}$ i $2\cdot\mathbb{N}-1 := \{2\cdot n-1 : n \in \mathbb{N}\}$;

c) $\mathbb{Z}$ i $\mathbb{N}$;

d) $\mathbb{R}$ i $\langle 0,+\infty\rangle$;

e) $\langle a,b\rangle$ i $\mathbb{R}$, gdje su $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$, proizvoljne, ali fiksirane konstante.

Rješenje: Tražene bijekcije su redom:

a) $f:\mathbb{N}\to 2\cdot\mathbb{N},\ f(n)=2\cdot n;$

b) $f:\mathbb{N}\to 2\cdot\mathbb{N}-1,\ f(n)=2\cdot n-1;$

c) $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{N},\ f(k)=\begin{cases}(-2)\cdot k, & \text{ako je } n\le 0,\\ 2\cdot k-1, & \text{inače.}\end{cases}$

d) $f:\mathbb{R}\to\langle 0,+\infty\rangle,\ f(x)=a^x,$ pri čemu je $a>0,\ a\neq 1,$ konstanta;

e) $f:\langle a,b\rangle\to\mathbb{R},\ f(x)=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{b-a}\cdot x-\frac{\pi\cdot b}{b-a}+\frac{\pi}{2}\right).$

Zadatak za vježbu: Nađite pravila za inverze svih navedenih bijekcija.

7. Neka su A i B beskonačni skupovi takvi da je $A \subset B$. Dokažite ili opovrgnite protuprimjerom:

a) Ako je A prebrojiv, onda je i B prebrojiv.
b) Ako je B prebrojiv, onda je i A prebrojiv.
c) Ako je A neprebrojiv, onda je i B neprebrojiv.
d) Ako je B neprebrojiv, onda je i A neprebrojiv.

Rješenje: a) Tvrdnja nije točna. Neka su $A = \mathbb{N}$ i $B = \mathbb{R}$. Tada je očito $A \subset B$. Nadalje, A je prebrojiv skup, ali B nije prebrojiv skup.

Posljedica: Nadskup prebrojivoga skupa ne mora biti prebrojiv.

b) Tvrdnja je točna. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $B = \mathbb{N}$. Budući da *svaki* (pa posebno i svaki beskonačni) podskup skupa $\mathbb{N}$ ima najmanji element, zaključujemo da i skup A ima najmanji element. Označimo taj element s a_1. Promotrimo skup $A \setminus \{a_1\}$. I taj skup – kao pravi podskup skupa $\mathbb{N}$ - ima najmanji element, pa označimo taj element s a_2. Postupak nastavimo dalje sa skupom $A \setminus \{a_1, a_2\}$ koji je također beskonačan i ima najmanji element a_3 itd. Preostaje definirati funkciju $f : \mathbb{N} \to A$ pravilom

$$f(n) = a_n.$$

Lako se provjeri da je ta funkcija bijekcija, pa slijedi tvrdnja.

c) Tvrdnja je točna. Najlakše ju je dokazati tako da se najprije dokaže da je izjava

$$C : ((A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (-B \Rightarrow -A))$$

tautologija, tj. istinita neovisno o istinitosti izjava A i B. Uzmemo li

A: Skup A je neprebrojiv.
B: Skup B je neprebrojiv.

dobivamo da je zadana tvrdnja ekvivalentna tvrdnji iz b) podzadatka, a za nju smo dokazali da je istinita.

d) Tvrdnja nije točna. Protuprimjer je isti kao u a) podzadatku.

Posljedica: Beskonačan pravi podskup prebrojivoga skupa je nužno prebrojiv, ali beskonačan pravi podskup neprebrojivoga skupa ne mora biti neprebrojiv.