4. FUNKCIJE

4.1. POJAM FUNKCIJE. PRIRODNA DOMENA FUNKCIJE. NULTOČKA FUNKCIJE. BIJEKCIJA.INVERZ BIJEKCIJE. GRAF FUNKCIJE. OMEĐENOST, MONOTONOST I PARNOST REALNE FUNKCIJE

4.1.1. POJAM FUNKCIJE

- Pojam funkcije jedan je od najvažnijih za matematiku i njezine primjene.
- Poznavanje svih prirodnih i tehničkih procesa je zapravo poznavanje međusobne *zavisnosti* veličina koje sudjeluju u tom procesu.
- Npr. jakost struje u nekom vodiču struje zavisi o naponu između krajeva vodiča i o ukupnom otporu strujnoga kruga u koji je uključen taj vodič (*Ohmov zakon*).
- Opisivanje takve zavisnosti vodi na pojam *funkcije.*

4.1.1. POJAM FUNKCIJE

- Neka su X i Y dva neprazna skupa. Ako je prema nekom *pravilu* f **svakom** elementu skupa X pridružen **točno jedan** element skupa Y, kažemo da je na skupu X zadana **funkcija** f s vrijednostima u skupu Y.
- Pišemo: $f : X \to Y$.
- Skup X nazivamo **područje definicije** ili **domena** funkcije f.
- Skup Y nazivamo **područje vrijednosti** ili **kodomena** funkcije f.
- Funkcija f je potpuno zadana ako zadamo njezinu domenu, kodomenu i pravilo prema kojemu se elementima domene pridružuju elementi kodomene.

4.1.1. POJAM FUNKCIJE

- Svaki element domene funkcije f naziva se (**nezavisna**) **varijabla** ili **argument** funkcije f. Zbog toga se obično kaže da je f funkcija *argumenta* ili *varijable* x, t, u i sl.
- Ako se pravilom f elementu x pridružuje element y, to pišemo kao $y = f(x)$ ili kao $x \mapsto y$. (Prvi zapis se koristi znatno češće.)
- *Pravilo* f najčešće je neka analitička formula npr. $f(x) = x + 1$, ali može biti zadano i *tablično*, odnosno *grafički.*
- Ne istaknemo li drugačije, skupovi X i Y bit će podskupovi skupa $\mathbb{R}$, pa ćemo govoriti o **realnim funkcijama** (taj dio izraza znači da je kodomena podskup skupa $\mathbb{R}$) **jedne realne varijable** (ovaj dio izraza znači da je domena neki podskup skupa $\mathbb{R}$).
- Dvije funkcije f i g su **jednake** ako im se (zasebno) podudaraju domene, podudaraju kodomene i ako vrijedi jednakost $f(x) = g(x)$, za svaki x iz domene.
- Npr. funkcije $f(x) = 1$ i $g(x) = \sin^2 x + \cos^2 x$ su jednake, a funkcije $f(x) = 1$ i $g(x) = \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x$ nisu jednake (jer imaju različite domene).
- Ne istaknemo li drugačije, u nastavku pretpostavljamo da je f realna funkcija jedne realne varijable.

4.1.2. NAPOMENA

- Funkcije $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ i $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definirane pravilima $f(x) = \sin x$ i $g(x) = \sin x$ *nisu* jednake jer nemaju jednake domene. Međutim, domena funkcije f je pravi podskup domene funkcije g. U tom slučaju kažemo da je f **suženje** ili **restrikcija** funkcije g na segment $[0, 1]$, odnosno, ekvivalentno, da je g **proširenje** funkcije f na skup $\mathbb{R}$.
- Da bismo izbjegli ovakve situacije (tj. utvrđivanje tražimo li domenu restrikcije funkcije ili domenu nekoga od njezinih proširenja), definiramo **prirodnu domenu** funkcije kao najveći (s obzirom na relaciju „biti podskup”) podskup skupa $\mathbb{R}$ na kojemu je definirana ta funkcija.
- Kad god ne istaknemo drukčije, pretpostavljamo da je domena funkcije jednaka njezinoj prirodnoj domeni.

4.1.2. NAPOMENA

- Pojam *kodomene* funkcije treba razlikovati od pojma *slike* funkcije.
- Slika funkcije $f : A \to B$ je skup
- $\operatorname{Im} f := \{f(x) : x \in A\} \subseteq B$.
- Iako je vrlo korisna, sliku funkcije je u većini slučajeva vrlo teško odrediti, pa čak i grafički. U takvim slučajevima je bolje i prikladnije koristiti kodomenu.

4.1.3. NULTOČKA FUNKCIJE

- Neka je $f : X \to Y$ i neka je $0 \in Y$.
- Svaki $x \in X$ takav da je $f(x) = 0$ nazivamo **nultočka funkcije** f.
- Skup svih nultočaka funkcije f označavamo s $N(f)$.
- **Oprez:** Iz definicije nultočke slijedi $N(f) \subseteq X$. Tako npr. funkcija $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 4$ nema nijednu nultočku, funkcija $g : [0, 2] \to \mathbb{R}$, $g(t) = \sin t$ ima točno jednu nultočku itd.

4.1.4. ALGEBARSKE OPERACIJE S FUNKCIJAMA

- Neka su A, $B \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ i $g : B \to \mathbb{R}$.
- Definiramo sljedeće **osnovne algebarske operacije** s funkcijama:

a) zbrajanje: $(f+g)(x) := f(x)+g(x), \ \forall x \in A \cap B$;

b) oduzimanje: $(f-g)(x) := f(x)-g(x), \ \forall x \in A \cap B$;

c) množenje: $(f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x), \ \forall x \in A \cap B$;

d) dijeljenje: $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) := \dfrac{f(x)}{g(x)}, \ \forall x \in A \cap (B \setminus N(g))$;

e) kompozicija: $(g \circ f)(x) := g(f(x)), \ \forall x \in C := \left\{x \in A : f(x) \in B\right\} \subseteq A$.

4.1.5. BIJEKCIJA. INVERZ BIJEKCIJE

- Neka je $f: X \to Y$.
- Kažemo da je funkcija f **bijekcija** ako postoji funkcija $g : Y \to X$ takva da *istovremeno* vrijede jednakosti:

$$\begin{cases} (f \circ g)(y) = y, \ \forall y \in Y, \\ (g \circ f)(x) = x, \ \forall x \in X. \end{cases}$$

- Može se pokazati da, ako funkcija g postoji, onda je ona jedinstvena. Zbog toga je označavamo s f^{-1} i nazivamo **inverz funkcije** f.
- Oprez: $f^{-1} \neq \frac{1}{f}$.

4.1.6. ODREĐIVANJE PRAVILA INVERZA BIJEKCIJE

- Domena i kodomena inverza bijekcije određeni su zadavanjem same bijekcije. Zbog toga preostaje razmotriti sljedeći problem.
- **Problem**: Odrediti pravilo inverza zadane bijekcije f.
- **Algoritam za određivanje pravila inverza bijekcije f**
- **Ulaz**: bijekcija $f : X \to Y$ čije je pravilo zadano analitički (zatvorenom formulom)
- **Korak 1.** Iz jednakosti $y = f(x)$ izraziti x. Dobiva se izraz oblika $x = g(y)$, gdje je g nova funkcija varijable y.
- **Korak 2.** Pravilo funkcije g je traženo pravilo inverza f^{-1}. (Praktično, samo treba zamijeniti oznaku varijable u funkciji dobivenoj u koraku 1.)

4.1.7. PRIMJER 1.

- a) Funkcija $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + 1$ ima skup $\mathbb{R}$ i kao domenu i kao kodomenu.
- Ta funkcija je bijekcija. Njezin inverz je funkcija $f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f^{-1}(x) = x - 1$.
- b) Funkcija $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^2$ ima skup $\mathbb{R}$ i kao domenu i kao kodomenu.
- Može se pokazati da ta funkcija nije bijekcija. Međutim, ako za domenu i kodomenu uzmemo skup $[0,+\infty\rangle$, onda je funkcija f bijekcija i njezin inverz je:

$$g^{-1}:[0,+\infty\rangle \to [0,+\infty\rangle,\ g^{-1}(x)=\sqrt{x}.$$

4.1.8. GRAF FUNKCIJE

- Neka je $f: X \to Y$.
- Graf funkcije f je skup $\Gamma(f) := \{(x, f(x)) : x \in X\}$.
- Na prvom mjestu *svakoga* elementa skupa $\Gamma(f)$ uvijek je vrijednost nezavisne varijable (argumenta) funkcije f, a na drugom pripadna vrijednost iz kodomene.
- Graf takve funkcije obično je prikladno prikazati u pravokutnom koordinatnom sustavu u ravnini. Na os apscisa nanose se vrijednosti nezavisne varijable, a na os ordinata nanose se pripadne vrijednosti iz kodomene.

4.1.8. GRAF FUNKCIJE

- Oprez: Često se tvrdi da je graf *svake* realne funkcije jedne realne varijable neka ravninska krivulja. To je općenito netočno. Postoje realne funkcije jedne realne varijable kojima graf nije ravninska krivulja, a postoje i ravninske krivulje (npr. kružnica, elipsa) koje nisu grafovi nijedne realne funkcije jedne realne varijable.
- Za utvrđivanje je li neka ravninska krivulja graf neke realne funkcije praktično je koristan sljedeći kriterij:
- *Neka ravninska krivulja je graf neke realne funkcije ako i samo ako svaki pravac usporedan s osi ordinata siječe tu ravninsku krivulju u najviše jednoj točki* (tj. ili je uopće ne siječe ili je siječe u točno jednoj točki).

4.1.9. OMEĐENA FUNKCIJA

- Neka je $f : X \to Y$.
- Ako postoji barem jedan $m \in \mathbb{R}$ takav da za svaki $x \in X$ vrijedi nejednakost $f(x) \geq m$, kažemo da je funkcija f **omeđena odozdo**.
- To praktično znači da se cijeli graf funkcije f nalazi *iznad* pravca $y = m$ ili na tom pravcu. Drugim riječima, nijedna točka grafa funkcije f ne nalazi se ispod pravca $y = m$.
- Analogno, ako postoji barem jedan $M \in \mathbb{R}$ takav da za svaki $x \in X$ vrijedi nejednakost $f(x) \leq M$, kažemo da je funkcija f **omeđena odozgo**.
- To praktično znači da se cijeli graf funkcije f nalazi *ispod* pravca $y = M$ ili na tom pravcu. Drugim riječima, nijedna točka grafa funkcije f ne nalazi se iznad pravca $y = M$.
- Funkciju koja je omeđena i odozdo i odozgo kratko nazivamo **omeđenom funkcijom**.
- Dakle, funkcija f je omeđena ako postoje m, $M \in \mathbb{R}$ takvi da za svaki $x \in X$ vrijedi nejednakost $m \leq f(x) \leq M$. To znači da je graf funkcije f "ukliješten" između pravaca $y = m$ i $y = M$.
- U posebnom slučaju kada je $m = M$ funkciju f nazivamo *konstantnom funkcijom* (kraće i nepreciznije: *konstantom*). Njezina slika je jednočlan skup $\{M\}$.

4.1.10. MONOTONE FUNKCIJE

- Neka je $f: X \to Y$.
- Ako je za *svake dvije* vrijednosti $x_1, x_2 \in X$ istinita tvrdnja:
- $(x_1 < x_2) \Rightarrow (f(x_1) \leq f(x_2))$,
- kažemo da je funkcija f **monotono rastuća** (ili kraće **rastuća**).
- To znači da povećanje vrijednosti nezavisne varijable povlači nesmanjivanje vrijednosti funkcije (tj. vrijednost funkcije f se ili ne mijenja ili povećava).
- Ako u gornjoj implikaciji umjesto $\leq$ vrijedi stroga nejednakost $<$, tj. ako je za *svake dvije* vrijednosti $x_1, x_2 \in X$ istinita tvrdnja:
- $(x_1 < x_2) \Rightarrow (f(x_1) < f(x_2))$,
- kažemo da je funkcija f **strogo rastuća**.
- To znači da povećanje vrijednosti nezavisne varijable povlači povećanje vrijednosti funkcije.

4.1.10. MONOTONE FUNKCIJE

- Ako je za *svake dvije* vrijednosti $x_1, x_2 \in X$ istinita tvrdnja:
- $(x_1 < x_2) \Rightarrow (f(x_1) \geq f(x_2))$,
- kažemo da je funkcija f **monotono padajuća** (ili kraće *padajuća*).
- To znači da povećanje vrijednosti nezavisne varijable povlači nepovećanje vrijednosti funkcije (tj. vrijednost funkcije f se ili ne mijenja ili smanjuje).
- Ako u gornjoj implikaciji umjesto $\geq$ vrijedi stroga nejednakost $>$, tj. ako je za *svake dvije* vrijednosti $x_1, x_2 \in X$ istinita tvrdnja:
- $(x_1 < x_2) \Rightarrow (f(x_1) > f(x_2))$,
- kažemo da je funkcija f **strogo padajuća**.
- To znači da povećanje vrijednosti nezavisne varijable povlači smanjenje vrijednosti funkcije.

4.1.10. MONOTONE FUNKCIJE

- Strogo rastuće i strogo padajuće funkcije nazivamo **strogo monotone funkcije.**
- Iz te definicije strogo izravno slijedi:
- **Tvrdnja:** Svaka strogo monotona funkcija je injekcija.
- Obratna tvrdnja nije točna. Protuprimjer je funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definirana s

$$f(x) = \begin{cases} x, \text{ ako je } x \in \mathbb{Q}, \\ -x, \text{ ako je } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

4.1.11. (NE)PARNE FUNKCIJE

- Neka je $f: X \to Y$.
- Ako su za *svaki* $x \in X$ *istovremeno* istinite tvrdnje:
- 1.) $-x \in X$;
- 2.) $f(-x) = f(x)$,
- kažemo da je funkcija f **parna**.
- Ako jednakost 2.) zamijenimo jednakošću
- 2'.) $f(-x) = -f(x)$,
- kažemo da je funkcija **neparna**.

4.1.11. (NE)PARNE FUNKCIJE

- Iz definicije parne funkcije slijedi da nijedna parna funkcija nije injekcija.
- Za neparne funkcije je moguće da budu injekcije (npr. $f(x) = x$) i da ne budu injekcije (npr. $f(x) = \sin x$).
- (Ne)parnost funkcije može se "očitati" iz njezina grafa.
- Graf parne funkcije je *osno simetričan* s obzirom na os ordinata.
- Graf neparne funkcije je *centralno simetričan* s obzirom na ishodište pravokutnoga koordinatnoga sustava u ravnini.
- (Ne)parnost funkcije najlakše je provjeravati izravno iz odgovarajuće definicije toga svojstva funkcije.

4.1.12. PRIMJER 2.

- a) Funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definirana pravilom $f(x) = x^2$ je strogo padajuća na intervalu $\langle -\infty, 0\rangle$, a strogo rastuća na intervalu $\langle 0, +\infty\rangle$. Ta funkcija je parna i omeđena odozdo (npr. uzmimo $m = 0$).
- b) Funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definirana pravilom $f(x) = x^3$ je strogo rastuća i nije omeđena ni odozdo ni odozgo. Ta funkcija je neparna bijekcija čiji je inverz $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$.
- c) Funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definirana pravilom $f(x) = -|x|$ je strogo rastuća na intervalu $\langle -\infty, 0\rangle$, a strogo padajuća na intervalu $\langle 0, +\infty\rangle$. Ta funkcija je parna i omeđena odozgo (npr. uzmimo $m = 0$).

4.1.13. NAPOMENA

- Neka je $n \in \mathbb{N}$. Promatramo funkciju $f : [0, +\infty\rangle \to \mathbb{R}$
- defniranu pravilom $f(x) = \sqrt[n]{x}$.
- f je bijekcija ako i samo ako je n neparan prirodan broj.
- To znači da ako su n neparan prirodan broj i $a \in \mathbb{R}$, onda jednadžba

$$x^n = a$$

- ima jedinstveno realno rješenje $x = \sqrt[n]{a}$.
- Ako su n paran prirodan broj i $a \in \mathbb{R}$, onda jednadžba

$$x^n = a$$

- ili nema nijedno realno rješenje (npr. za $n = 2$ i $a = -1$) ili ima točno dva realna rješenja (npr. za $n = 2$ i $a = 1$).

4.1.14. PREBROJIVI I NEPREBROJIVI SKUPOVI

- Osnovni „motiv” za uvođenje pojma bijekcije nije definiranje inverza osnovnih elementarnih funkcija, nego *prebrajanje* (bes)konačnih skupova.
- Za *bilo koja* dva skupa, kao i za kompleksne brojeve, možemo reći (samo) jesu li međusobno jednaki ili međusobno različiti. U posebnim slučajevima možemo govoriti i o podskupovima.
- Koristeći bijekcije, *bilo koja* dva skupa možemo uspoređivati i prema *broju elemenata*.
- Kažemo da su skupovi A i B **jednakobrojni** ili **ekvipotentni** ako postoji (barem jedna) bijekcija $f\colon A \to B$.
- Može se pokazati da se u slučaju *konačnih* skupova ta definicija podudara s uobičajenom definicijom jednakobrojnosti konačnih skupova (imaju jednako mnogo elemenata).
- Bitno zanimljiviji slučaj je kad su A i B *beskonačni* skupovi.

4.1.14. PREBROJIVI I NEPREBROJIVI SKUPOVI

- Neka je A beskonačan skup.
- Kažemo da je skup A **prebrojiv** ili *prebrojivo beskonačan* ako postoji bijekcija $f : \mathbb{N} \to A$.
- To zapravo znači da sve elemente skupa A možemo poredati u beskonačan niz.
- Može se pokazati da su skupovi $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ *i svi njihovi beskonačni podskupovi* prebrojivi skupovi.
- Skup iracionalnih brojeva, skup $\mathbb{R}$ i skup $\mathbb{C}$ nisu prebrojivi skupovi. Takve skupove nazivamo **neprebrojivi** ili *neprebrojivo beskonačni skupovi*.
- Preciznije, skup A je *neprebrojiv* ili *neprebrojivo beskonačan* ako postoji bijekcija $f : \mathbb{R} \to A$.
- Svi standardni oblici intervala su neprebrojivi skupovi.
- Sve elemente takvih skupova ne možemo poredati u beskonačan niz.

4.1.15. PRIMJER 3.

- a) Neka je P skup svih parnih prirodnih brojeva. P je prebrojiv skup jer je funkcija

$$f : \mathbb{N} \to P, \;\; f(n) = 2 \cdot n$$

- bijekcija.
- b) Interval $\langle 0, +\infty \rangle$ je neprebrojiv skup jer je npr. funkcija

$$g : \mathbb{R} \to \langle 0, +\infty \rangle, \;\; g(t) = 2^t$$

- bijekcija.