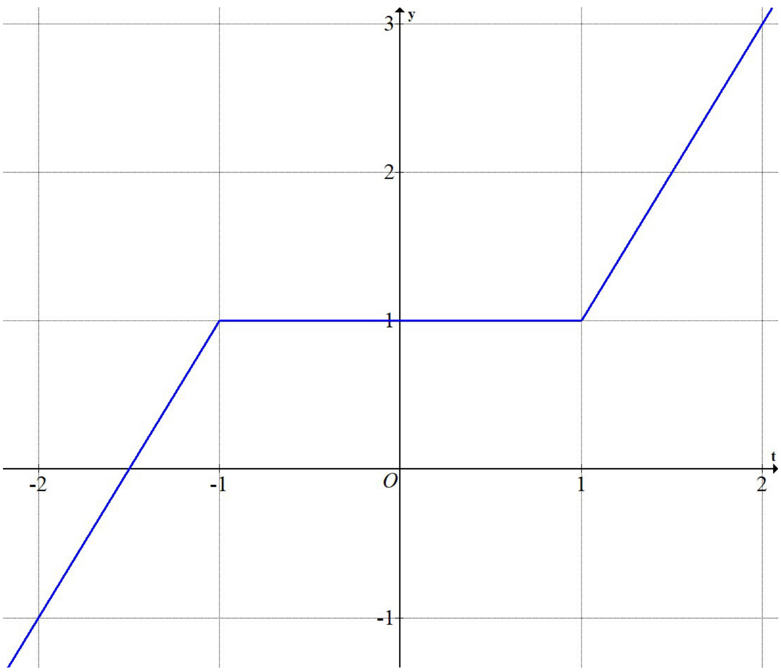
Napomena: Pretpostavljamo da su sve promatrane funkcije realne funkcije realne varijable.

1. Funkcija f zadana je grafički. Klasificirajte je s obzirom na omeđenost, monotonost i (ne)parnost ako je:

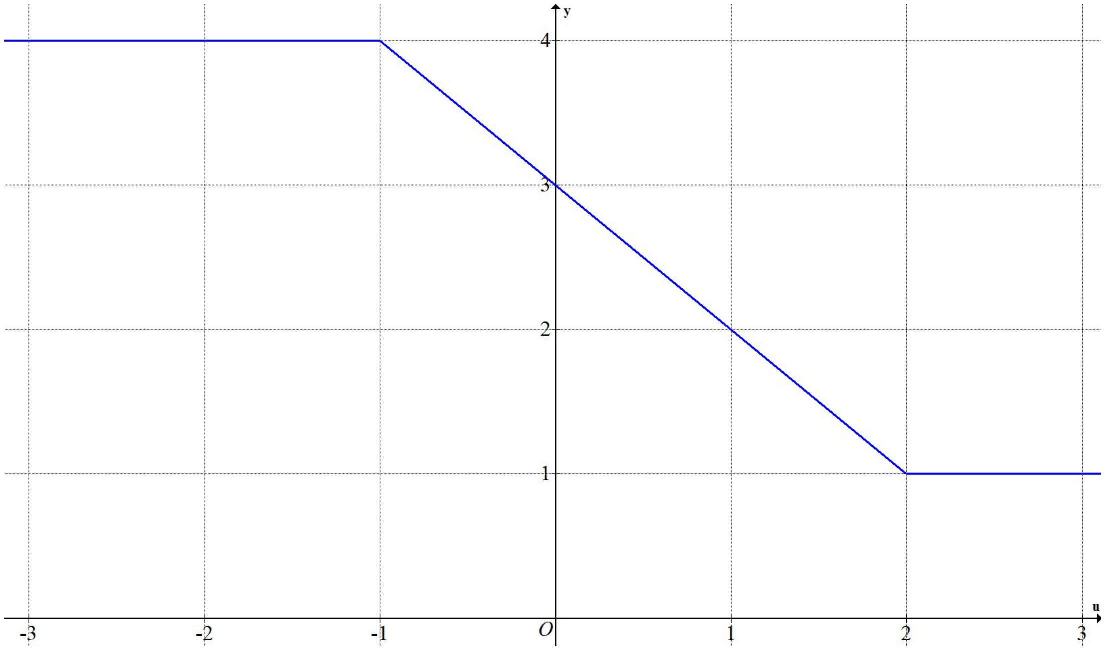
   a)



Slika 1.

Rješenje: Neomeđena, rastuća, ni parna, ni neparna. (Primijetite da su $f(2)=3$ i $f(-2)=-1$, pa postoje suprotni brojevi koji niti se preslikaju u jednake brojeve, niti se preslikaju u suprotne brojeve.)

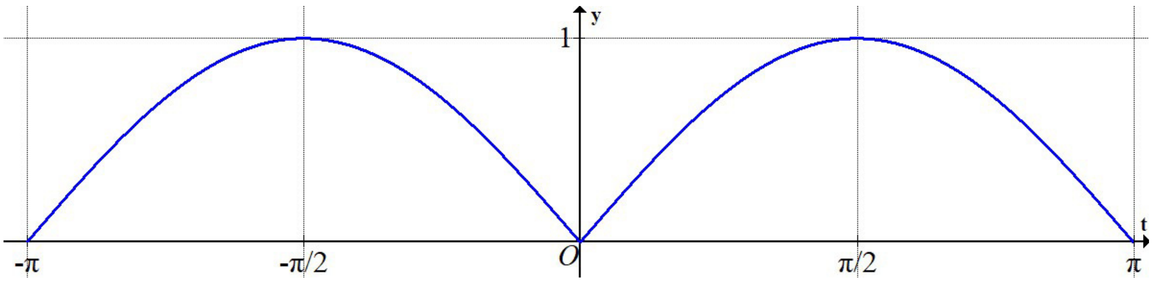
b)



Slika 2.

Rješenje: Neomeđena, padajuća, ni parna, ni neparna.

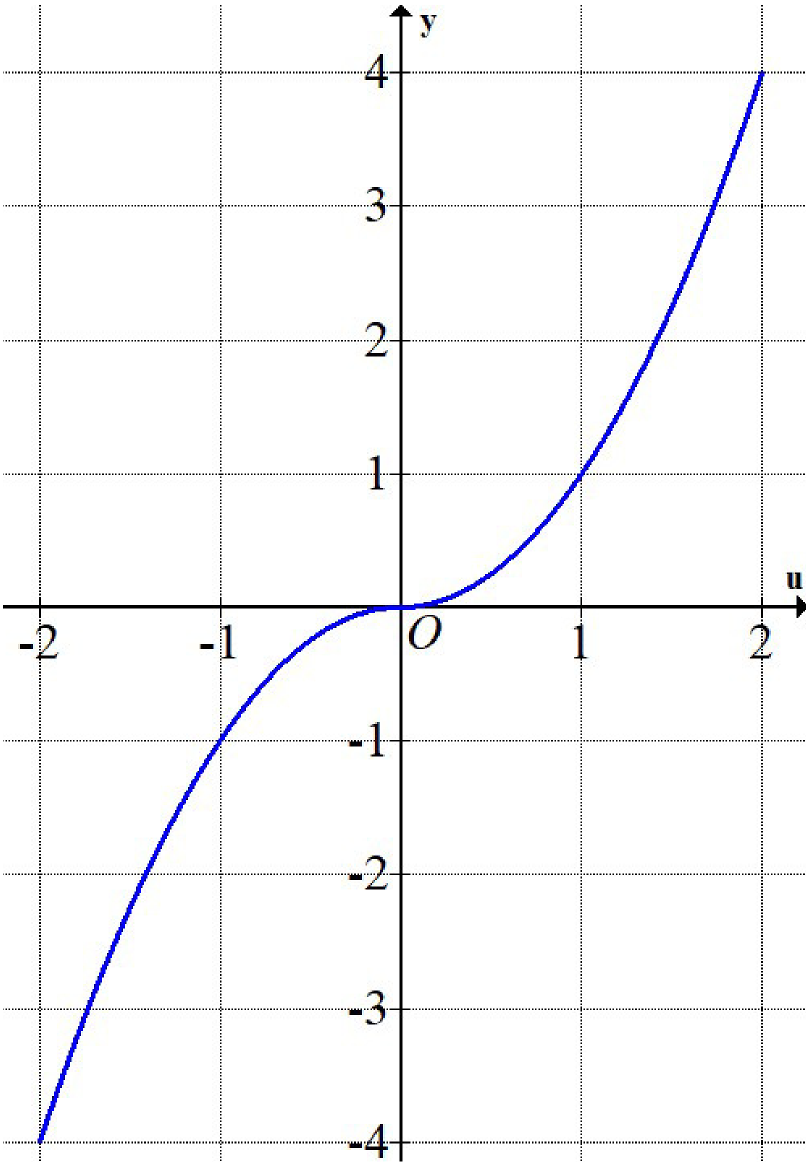
c)



Slika 3.

Rješenje: Omeđena, ni rastuća, ni padajuća, parna.

d)



Slika 4.

Rješenje: Omeđena, strogo rastuća, neparna.

2. Odredite prirodnu domenu sljedećih funkcija:

a) $f_1(x) = x^2 + x + 1;$

Rješenje: Funkcija f_1 je kvadratna funkcija (polinom stupnja 2). Ona je definirana za svaki $x \in \mathbb{R}$. Dakle, $D(f_1) = \mathbb{R}$.

b) $f_2(t) = \dfrac{t}{100 - t^2};$

Rješenje: Funkcija f_2 je definirana za svaki $t \in \mathbb{R}$ za koji vrijedi $100 - t^2 \neq 0$. Zbog toga riješimo jednadžbu $100 - t^2 = 0$. Njezina su rješenja $t_1 = -10,\ t_2 = 10$. Odatle slijedi da je $D(f_2) = \mathbb{R} \setminus \{-10, 10\}$.

c) $f_3(u) = \sqrt{\dfrac{(2-u)\cdot\left(u^2+1\right)}{u^2-1}};$

Rješenje: Primijetimo da za svaki $u \in \mathbb{R}$ vrijedi nejednakost $u^2 + 1 > 0$. Zbog toga je funkcija f_3 definirana za svaki $u \in \mathbb{R}$ za koji vrijedi $\dfrac{2-u}{u^2-1} \geq 0$. Razlikujemo točno dva različita slučaja:

$$\textbf{I}.\ \left.\begin{matrix} 2-u \geq 0, \\ u^2-1 > 0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} u \leq 2, \\ u \in \mathbb{R} \setminus [-1,1] \end{matrix}\right\} \Rightarrow u \in \langle -\infty, -1 \rangle \cup \langle 1, 2].$$

$$\textbf{II}.\ \left.\begin{matrix} 2-u \leq 0, \\ u^2-1 < 0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} u \geq 2, \\ u \in [-1,1] \end{matrix}\right\} \Rightarrow \emptyset.$$

Dakle, $D(f_3) = \langle -\infty, -1 \rangle \cup \langle 1, 2]$.

d) $f_4(v)=\sqrt{(3-2\cdot\sin v)\cdot(2\cdot\cos v-1)}$.

Rješenje: Primijetimo da vrijede nejednakosti:

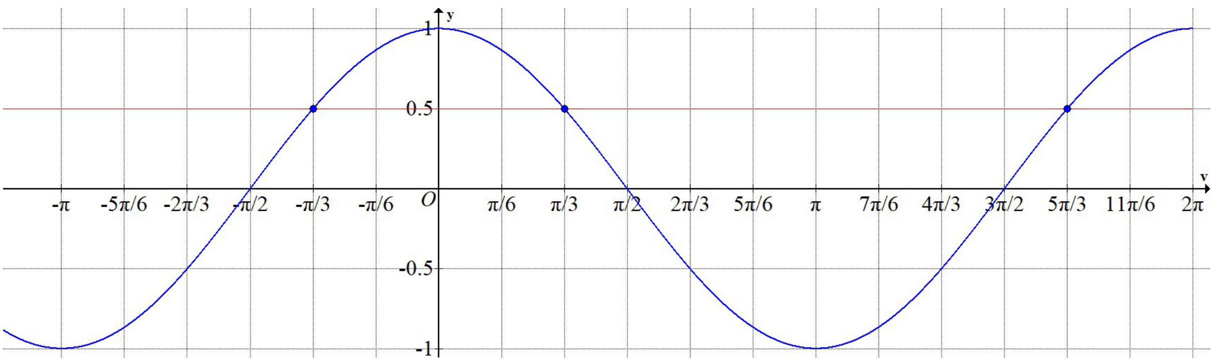
$$\begin{aligned}&-1\le\sin v\le 1, \quad /\cdot 2\\&-2\le -2\cdot\sin v\le 2, \quad /+3\\&1\le 3-2\cdot\sin v\le 5.\end{aligned}$$

Odatle zaključujemo da je $3-2\cdot\sin v>0$. Prema tome, jedini uvjet je:

$$2\cdot\cos v-1\ge 0.$$

Taj uvjet je ekvivalentan uvjetu $\cos v\ge\frac{1}{2}$. Ovu nejednadžbu riješimo grafički (vidjeti sliku 5.), pa dobijemo:

$$v\in\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left[-\frac{\pi}{3}+2\cdot k\cdot\pi,\frac{\pi}{3}+2\cdot k\cdot\pi\right]\Rightarrow D(f_4)=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left[-\frac{\pi}{3}+2\cdot k\cdot\pi,\frac{\pi}{3}+2\cdot k\cdot\pi\right].$$



Slika 5.

3. Zadana je funkcija $f:\mathbb{R}\setminus\{1\}\to\mathbb{R}$, $f(t)=\dfrac{2\cdot t+3}{t-1}$. Riješite jednadžbu: $\left(f^{-1}+f\right)(t)=3$.

Rješenje: Odredimo najprije pravilo inverza zadane funkcije. Imamo redom:

$$
\begin{aligned}
&y=\frac{2\cdot t+3}{t-1}, \quad /\cdot(t-1)\\
&y\cdot(t-1)=2\cdot t+3,\\
&y\cdot t-y=2\cdot t+3,\\
&y\cdot t-2\cdot t=y+3,\\
&t\cdot(y-2)=y+3 \quad /:(y-2)\\
&t=\frac{y+3}{y-2}.
\end{aligned}
$$

Dakle, $f^{-1}(t)=\dfrac{t+3}{t-2}$. Tako slijedi:

$$
\begin{aligned}
&\left(f^{-1}+f\right)(t)=3,\\
&\frac{t+3}{t-2}+\frac{2\cdot t+3}{t-1}=3, \quad /\cdot(t-2)\cdot(t-1)\\
&(t+3)\cdot(t-1)+(2\cdot t+3)\cdot(t-2)=3\cdot(t-2)\cdot(t-1),\\
&t^2+2\cdot t-3+2\cdot t^2-t-6=3\cdot t^2-9\cdot t+6,\\
&10\cdot t=15, \quad /:10\\
&t=\frac{15}{10}=\frac{3}{2}.
\end{aligned}
$$

4. Odredite skup svih nultočaka funkcije $h = f \circ g - g \circ f$ ako su:

a) $f(x) = x^3 - 1,\ g(x) = x + 2.$

Rješenje: Najprije ćemo odrediti pravilo funkcije *h*, a potom riješiti jednadžbu $h(x) = 0.$ Imamo redom:

$$\begin{aligned} h(x) &= (f \circ g - g \circ f)(x) = f(g(x)) - g(f(x)) = f(x+2) - g\left(x^3 - 1\right) = \\ &= (x+2)^3 - 1 - \left(\left(x^3 - 1\right) + 2\right) = x^3 + 6 \cdot x^2 + 12 \cdot x + 8 - 1 - x^3 - 1 = \\ &= 6 \cdot x^2 + 12 \cdot x + 6 = 6 \cdot \left(x^2 + 2 \cdot x + 1\right) = 6 \cdot (x+1)^2. \end{aligned}$$

Tako iz $h(x) = 0$ slijedi $(x+1)^2 = 0$, a odatle je $x = -1.$ Dakle, $N(h) = \{-1\}.$

b) $f(t) = e^{1-t},\ g(t) = \dfrac{1}{t}.$

Rješenje: Imamo redom:

$$\begin{aligned} h(t) &= (f \circ g - g \circ f)(t) = f(g(t)) - g(f(t)) = f\left(\frac{1}{t}\right) - g\left(e^{1-t}\right) = \\ &= e^{1-\frac{1}{t}} - \frac{1}{e^{1-t}} = e^{1-\frac{1}{t}} - e^{t-1}. \end{aligned}$$

Tako iz $h(t) = 0$ slijedi $e^{1-\frac{1}{t}} = e^{t-1}$, odnosno $1 - \dfrac{1}{t} = t - 1$. Množenjem ove jednadžbe s t (što smijemo napraviti jer je $D(g) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$) dobivamo jednadžbu $t - 1 = t^2 - t$, odnosno $t^2 - 2 \cdot t + 1 = 0$. Ova jednadžba ima jedinstveno rješenje $t = 1.$ Dakle, $N(h) = \{1\}.$

5. Zadane su funkcije $f(u)=\sin(\pi \cdot u)$ i $g(u)=|u|$.

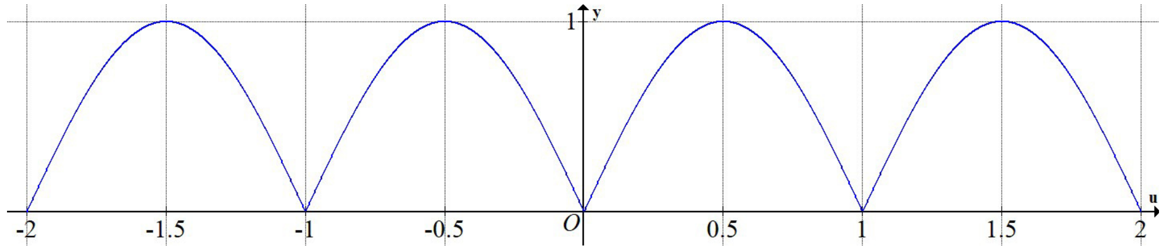
a) Nacrtajte graf funkcije $h=g \circ f$ na segmentu $[-2,2]$.

b) Odredite skup svih realnih rješenja jednadžbe $h(u)=1$.

Rješenje: a) Najprije odredimo pravilo funkcije h:

$$h(u)=g(f(u))=g(\sin(\pi \cdot u))=|\sin(\pi \cdot u)|.$$

Graf dobivene funkcije na segmentu $[-2,2]$ prikazan je na slici 6.



Slika 6.

b) Imamo redom:

$$\begin{aligned}
&h(u)=1,\\
&|\sin(\pi \cdot u)|=1,\\
&(\sin(\pi \cdot u)=-1) \vee (\sin(\pi \cdot u)=1),\\
&\left(\pi \cdot u=-\frac{\pi}{2}+2 \cdot k \cdot \pi\right) \vee \left(\pi \cdot u=\frac{\pi}{2}+2 \cdot k \cdot \pi\right),\\
&\left(u=-\frac{1}{2}+2 \cdot k\right) \vee \left(u=\frac{1}{2}+2 \cdot k\right),\\
&u=\frac{1}{2}+k,\ k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

Dakle, $S=\left\{k+\frac{1}{2}: k \in \mathbb{Z}\right\}$.

6. Zadane su funkcije $f(w) = \ln(w+1)$ i $g(w) = e^{2\cdot w} - 1$.

   a) Odredite prirodnu domenu **svake** od zadanih funkcija.

   b) Odredite skup svih nultočaka funkcije $h = f \circ g + g \circ f$ koje pripadaju **prirodnoj domeni** te funkcije.

Rješenje: a) Logaritamska funkcija je definirana ako i samo ako je logaritmand strogo pozitivan. Iz uvjeta $w+1>0$ slijedi $w>-1$, tj. $D(f) = \langle -1, +\infty \rangle$.

Funkcija g je kompozicija eksponencijalne funkcije i polinoma. Svaka od tih funkcija je definirana za svaki realan broj. Zbog toga je $D(g) = \mathbb{R}$.

b) Ponovno ćemo najprije odrediti pravilo funkcije h. Imamo:

$$\begin{aligned} h(w) &= (f \circ g + g \circ f)(w) = f(g(w)) + g(f(w)) = \\ &= f\left(e^{2\cdot w} - 1\right) + g(\ln(w+1)) = \\ &= \ln\left(\left(e^{2\cdot w} - 1\right) + 1\right) + \left(e^{2\cdot \ln(w+1)} - 1\right) = \\ &= \ln\left(e^{2\cdot w}\right) + e^{\ln\left((w+1)^2\right)} - 1 = \\ &= 2\cdot w + (w+1)^2 - 1 = \\ &= 2\cdot w + w^2 + 2\cdot w + 1 - 1 \\ &= w^2 + 4\cdot w. \end{aligned}$$

Funkcija h je kvadratna funkcija. Njezina prirodna domena je skup $\mathbb{R}$. Tako slijedi:

$$\begin{aligned} &h(w) = 0, \\ &w^2 + 4\cdot w = 0, \\ &w_1 = -4,\ w_2 = 0 \Rightarrow \\ &N(h) = \{-4, 0\}. \end{aligned}$$

7. Odredite prirodnu domenu i skup svih nultočaka funkcije $h = f \circ g$ ako su:

a) $f(x) = 2 \cdot \cos x + 1,\ g(x) = \dfrac{x-\pi}{2}$;

Rješenje: Imamo redom:

$$
\begin{aligned}
h(x) &= (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{x-\pi}{2}\right) = 2 \cdot \cos\left(\frac{x-\pi}{2}\right) + 1 = \\
&= 2 \cdot \cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{2}\right) + 1 = \\
&= 2 \cdot \left(\cos\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) + 1 = \\
&= 2 \cdot \sin\left(\frac{x}{2}\right) + 1.
\end{aligned}
$$

Tako iz jednadžbe $h(x) = 0$ redom slijedi:

$$
\begin{gathered}
2 \cdot \sin\left(\frac{x}{2}\right) + 1 = 0, \\
\sin\left(\frac{x}{2}\right) = -\frac{1}{2}, \\
\begin{cases} \dfrac{x}{2} = \dfrac{7}{6} \cdot \pi + 2 \cdot k \cdot \pi, \\ \dfrac{x}{2} = \dfrac{11}{6} \cdot \pi + 2 \cdot k \cdot \pi \end{cases} \\
\begin{cases} x = \dfrac{7}{3} \cdot \pi + 4 \cdot k \cdot \pi, \\ x = \dfrac{11}{3} \cdot \pi + 4 \cdot k \cdot \pi. \end{cases}
\end{gathered}
$$

Dakle, $N(h) = \bigcup\limits_{k \in \mathbb{Z}} \left\{\dfrac{7}{3} \cdot \pi + 4 \cdot k \cdot \pi,\ \dfrac{11}{3} \cdot \pi + 4 \cdot k \cdot \pi\right\}$.

b) $f(t)=\dfrac{t+1}{2},\ g(t)=1-4\cdot\cos t.$

Rješenje: Imamo redom:

$$h(t)=(f\circ g)(t)=f(g(t))=f(1-4\cdot\cos t)=$$
$$=\frac{(1-4\cdot\cos t)+1}{2}=\frac{2-4\cdot\cos t}{2}=1-2\cdot\cos t.$$

Tako iz jednadžbe $h(t)=0$ slijedi:

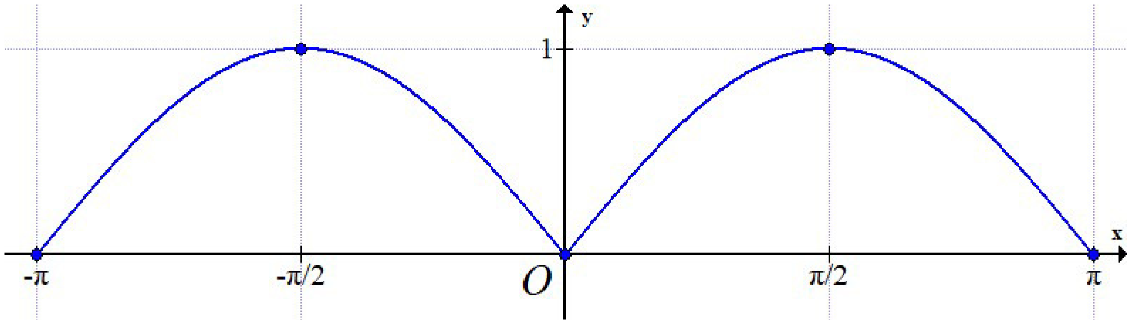
$$1-2\cdot\cos t=0,$$
$$\cos t=\frac{1}{2},$$
$$\begin{cases} t=\dfrac{\pi}{3}+2\cdot k\cdot\pi, \\ t=-\dfrac{\pi}{3}+2\cdot k\cdot\pi. \end{cases}$$

Dakle, $N(h)=\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}}\left\{\dfrac{\pi}{3}+2\cdot k\cdot\pi,-\dfrac{\pi}{3}+2\cdot k\cdot\pi\right\}.$

8. Nacrtajte grafove sljedećih funkcija:

a) $\begin{cases} f_1 \text{ je parna na } D(f_1)=[-\pi,\pi]; \\ f_1(x)=\sin x, \text{ za svaki } x\in[0,\pi]. \end{cases}$

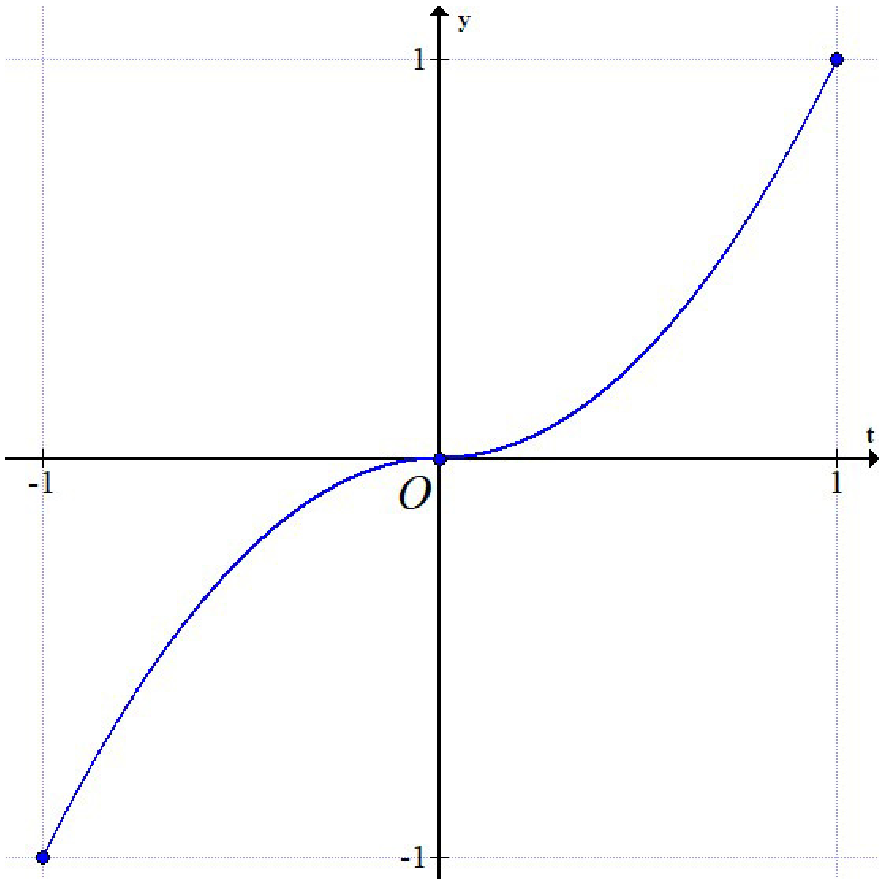
Rješenje: Vidjeti sliku 7.



Slika 7.

b) $\begin{cases} f_2 \text{ je neparna na } D(f_2)=[-1,1]; \\ f_2(t)=t^2, \text{ za svaki } t\in[0,1]. \end{cases}$

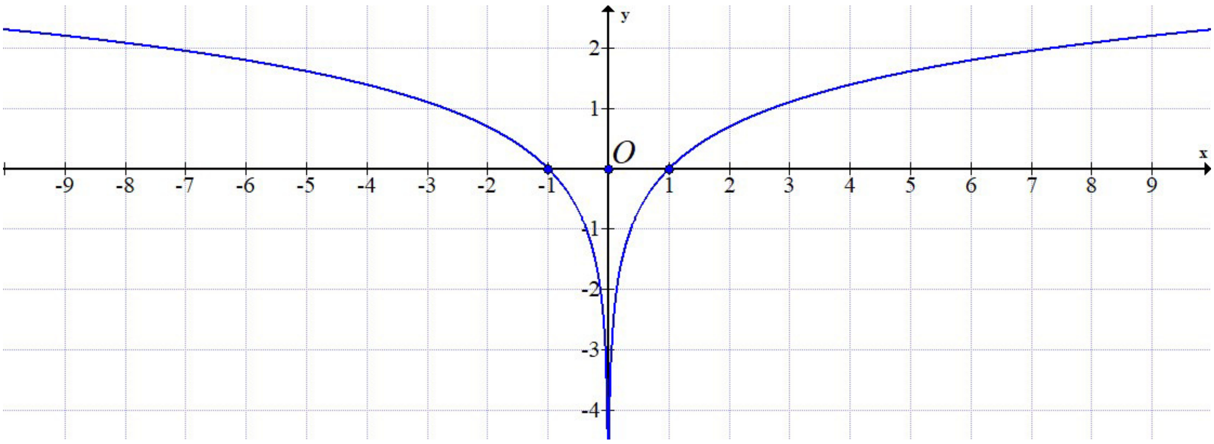
Rješenje: Vidjeti sliku 8.



Slika 8.

c) $\begin{cases} f_3 \text{ je parna na } D(f_3) = \mathbb{R}; \\ f_3(u) = \ln u, \text{ za svaki } u \in \langle 0, +\infty \rangle; \\ f_3(0) = 0. \end{cases}$

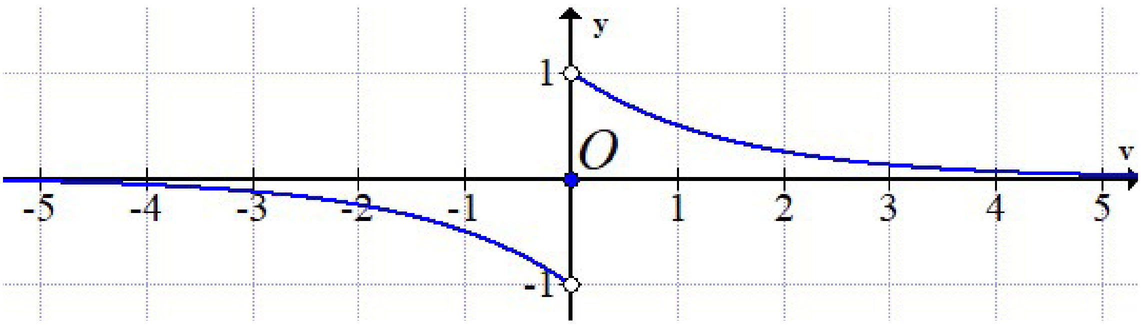
Rješenje: Vidjeti sliku 9.



Slika 9.

d) $\begin{cases} f_4 \text{ je neparna na } D(f_4) = \mathbb{R}; \\ f_4(v) = -2^v, \text{ za svaki } v \in \langle -\infty, 0 \rangle. \end{cases}$

Rješenje: Vidjeti sliku 10.



Slika 10.