4.10. ASIMPTOTE

USPRAVNE I KOSE ASIMPTOTE NA GRAF REALNE FUNKCIJE JEDNE REALNE VARIJABLE.

4.10.1. DEFINICIJA ASIMPTOTE

- Intuitivno govoreći, asimptota je pravac kojemu se približava neka krivulja kad prva ili druga koordinata točke te krivulje teže u $\pm\infty$.
- Formalna definicija je:
- Pravac p je asimptota na graf Γ realne funkcije f ako udaljenost između pravca p i točke $T \in \Gamma$ teži ka nuli čim se točka T beskonačno udaljava od ishodišta koordinatnoga sustava.

4.10.2. KLASIFIKACIJA ASIMPTOTA

- Osnovna podjela asimptota: na **uspravne** (*vertikalne*) i **kose**.
- U okviru kosih asimptota posebno se izdvajaju **vodoravne** (*horizontalne*)).
- **Uspravne** asimptote su pravci usporedni s osi ordinata i imaju jednadžbu oblika $x = a$, gdje je $a \in \mathbb{R}$ takav da vrijedi:

$$\lim_{x \to a+} f(x) \text{ i/ili } \lim_{x \to a-} f(x) \in \{-\infty, +\infty\}$$

- Uspravne asimptote na graf funkcije f su najčešće pravci koji prolaze rubnim točkama prirodne domene te funkcije.
- U slučaju *racionalne* funkcije uspravne asimptote prolaze *polovima* te funkcije.
- Važno: Ako je f **neprekidna** funkcija na $\mathbb{R}$, onda graf funkcije f **nema nijednu uspravnu asimptotu.**

4.10.2. KLASIFIKACIJA ASIMPTOTA

- Kose asimptote su pravci oblika
- $y = k \cdot x + l$.
- Ako je $k = 0$, govori se o vodoravnoj ili *horizontalnoj* asimptoti.
- Kose asimptote dodatno dijelimo na lijeve i desne.
- Ova podjela je potrebna jer neki graf može imati lijevu, ali ne i desnu kosu asimptotu, odnosno obrnuto.

4.10.3. ODREĐIVANJE LIJEVE KOSE ASIMPTOTE

- Koeficijenti k_1 i l_1 u jednadžbi $y = k_1 \cdot x + l_1$ lijeve kose asimptote određuju se prema formulama:

$$k_1 = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{f(x)}{x} \right)$$

$$l_1 = \lim_{x \to -\infty} \left(f(x) - k_1 \cdot x \right)$$

- Pritom obje navedene granične vrijednosti **moraju** biti "konkretni" realni brojevi (nijedna od njih ne smije biti jednaka $\pm\infty$).
- Ako barem jedna od navedenih graničnih vrijednosti ne postoji, onda krivulja nema lijevu kosu asimptotu.

4.10.4. ODREĐIVANJE DESNE KOSE ASIMPTOTE

- Koeficijenti k_2 i l_2 u jednadžbi $y = k_2 \cdot x + l_2$ desne kose asimptote određuju se prema formulama:

$$k_2 = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{f(x)}{x} \right)$$

$$l_2 = \lim_{x \to +\infty} \left(f(x) - k_1 \cdot x \right)$$

- Pritom obje navedene granične vrijednosti *moraju* biti "konkretni" realni brojevi (nijedna od njih ne smije biti jednaka $\pm\infty$).
- Ako barem jedna od navedenih graničnih vrijednosti ne postoji, onda krivulja nema desnu kosu asimptotu.

4.10.5. NAPOMENE

- 1.) *Bilo koja* ravninska krivulja koja je graf realne funkcije jedne realne varijable ima najviše jednu lijevu i najviše jednu desnu kosu asimptotu.
- Broj uspravnih asimptota može biti bilo koji nenegativan cijeli broj.
- 2.) Postupak određivanja kosih asimptota može se znatno skratiti ako se prigodom računanja koeficijenata lijeve kose asimptote utvrdi vrijede li isti zaključci i kad $x \to +\infty$.
- Ovakav način je osobito koristan kod određivanja asimptota racionalne funkcije, ali ga je *pogrešno* primjenjivati kod funkcija čija pravila sadrže e^x, $\ln x$ i dr.
- 3.) Ako se utvrdi da je isti pravac i lijeva i desna kosa asimptota, kraće i jednostavnije govori se da je taj pravac *kosa* asimptota.

1. Neka je $f=\dfrac{p}{q}$ racionalna funkcija. Neka su $m:=\mathrm{st}(p),\ n:=\mathrm{st}(q)$. Nađite nužan i dovoljan uvjet da graf funkcije f ima:

a) vodoravnu asimptotu;
b) kosu asimptotu (različitu od vodoravne).

Sve svoje tvrdnje precizno obrazložite.

Rješenje: Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da su

$$p(x)=a_m\cdot x^m+a_{m-1}\cdot x^{m-1}...+a_0\,,$$
$$q(x)=b_n\cdot x^n+b_{n-1}\cdot x^{n-1}+...+b_0\,.$$

Pritom su $a_m, b_n\neq 0$. Računamo koeficijent smjera kose asimptote:

$$k=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{a_m\cdot x^m+a_{m-1}\cdot x^{m-1}...+a_0}{b_n\cdot x^{n+1}+b_{n-1}\cdot x^n+...+b_0\cdot x}\right)=$$
$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{a_m\cdot x^{m-n-1}+a_{m-1}\cdot x^{m-n-2}...+a_0\cdot x^{-n-1}}{b_n+b_{n-1}\cdot x^{-1}+...+b_0\cdot x^{-n}}\right).$$

Ova granična vrijednost postoji ako i samo ako je

$$m-n-1\leq 0$$

jer su u tom slučaju svi eksponenti u brojniku i nazivniku strogo negativni, pa kad $x\to\infty$, pripadni članovi teže ka nuli. Navedena nejednakost ekvivalentna je nejednakosti

$$m\leq n+1$$

i ta je nejednakost traženi uvjet.

Dobiveni uvjet možemo razdvojiti na tri disjunktna podslučaja:

$$m<n,$$
$$m=n,$$
$$m=n+1.$$

Pogledajmo što se dobije u svakom pojedinom podslučaju.

1. slučaj ($m < n$): U ovome je slučaju f prava racionalna funkcija. Bez potrebe računanja koeficijenta smjera kose asimptote prema gornjoj formuli dobijemo:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} f(x) &= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{a_m\cdot x^m + a_{m-1}\cdot x^{m-1}\ldots + a_0}{b_n\cdot x^n + b_{n-1}\cdot x^{n-1} + \ldots + b_0}\right) = \\ &= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{a_m\cdot x^{m-n} + a_{m-1}\cdot x^{m-n-1}\ldots + a_0\cdot x^{-n}}{b_n + b_{n-1}\cdot x^{-1} + \ldots + b_0\cdot x^{-n}}\right) = \\ &= 0\end{aligned}$$

jer su svi eksponenti strogo manji od nule, pa kad $x\to\infty$, pripadni članovi teže ka nuli. Odatle zaključujemo:

Graf svake prave racionalne funkcije ima vodoravnu asimptotu $y = 0$ (os apscisa).

2. slučaj ($m = n$): U ovome slučaju imamo nepravu racionalnu funkciju kojoj je stupanj brojnika jednak stupnju nazivnika. U ovom slučaju dobijemo:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} f(x) &= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{a_n\cdot x^n + a_{n-1}\cdot x^{n-1}\ldots + a_0}{b_n\cdot x^n + b_{n-1}\cdot x^{n-1} + \ldots + b_0}\right) = \\ &= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{a_n + a_{n-1}\cdot x^{-1}\ldots + a_0\cdot x^{-n}}{b_n + b_{n-1}\cdot x^{-1} + \ldots + b_0\cdot x^{-n}}\right) = \\ &= \frac{a_n}{b_n}\end{aligned}$$

pa u ovom slučaju graf funkcije f ima vodoravnu asimptotu $y = \frac{a_n}{b_n}$. Zbog pretpostavke $a_n \neq 0$, ta je asimptota pravac usporedan s osi apscisa (i različit od te osi).

3. slučaj ($m = n + 1$): U ovome slučaju vrijedi:

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{a_{n+1}\cdot x^{n+1} + a_n\cdot x^n\ldots + a_0}{b_n\cdot x^n + b_{n-1}\cdot x^{n-1}\ldots + b_0} = \\ &= \frac{a_{n+1}\cdot x + a_n + .. + a_0\cdot x^{-n}}{b_n + b_{n-1}\cdot x^{-1}\ldots + b_0\cdot x^{-n}},\end{aligned}$$

pa slijedi:

$$k = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{a_{n+1}\cdot x + a_n + .. + a_0\cdot x^{-n}}{b_n\cdot x + b_{n-1} + ... + b_0\cdot x^{-n+1}}\right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{a_{n+1} + a_n\cdot x^{-1} + .. + a_0\cdot x^{-n-1}}{b_n + b_{n-1}\cdot x^{-1} + ... + b_0\cdot x^{-n+1}}\right) =$$

$$= \frac{a_{n+1}}{b_n},$$

$$l = \lim_{x\to\infty}\left(f(x) - k\cdot x\right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{a_{n+1}\cdot x + a_n + .. + a_0\cdot x^{-n}}{b_n + b_{n-1}\cdot x^{-1} ... + b_0\cdot x^{-n}} - \frac{a_{n+1}}{b_n}\cdot x\right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{a_{n+1}\cdot x + a_n + .. + a_0\cdot x^{-n} - \frac{a_{n+1}}{b_n}\cdot x\cdot\left(b_n + b_{n-1}\cdot x^{-1} ... + b_0\cdot x^{-n}\right)}{b_n + b_{n-1}\cdot x^{-1} ... + b_0\cdot x^{-n}}\right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\left(a_n - \frac{a_{n+1}\cdot b_{n-1}}{b_n}\right) + .. + a_0\cdot x^{-n}}{b_n + b_{n-1}\cdot x^{-1} ... + b_0\cdot x^{-n}}\right) =$$

$$= \frac{a_n - \frac{a_{n+1}\cdot b_{n-1}}{b_n}}{b_n} =$$

$$= \frac{a_n\cdot b_n - a_{n+1}\cdot b_{n-1}}{b_n^2}.$$

Prema pretpostavci su $a_m = a_{n+1} \neq 0,\ b_n \neq 0,$ pa u ovom slučaju graf funkcije f ima obostranu kosu asimptotu (koja nije vodoravna).

2. Odredite sve asimptote na sljedeće ravninske krivulje:

a) $y = x + \dfrac{1}{x-1}$;

Rješenje: Funkcija $f(x) = x + \dfrac{1}{x-1}$ ima pol $x = 1$, pa je uspravna asimptota na njezin graf pravac $p \ldots x = 1$.

Računamo koeficijente lijeve kose asimptote:

$$\begin{aligned}
k_1 &= \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{f(x)}{x} \right) = \\
&= \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{x + \frac{1}{x-1}}{x} \right) = \\
&= \lim_{x \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{x \cdot (x-1)} \right) = \\
&= 1 + 0 = \\
&= 1;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
l_1 &= \lim_{x \to -\infty} \left(f(x) - k_1 \cdot x \right) = \\
&= \lim_{x \to -\infty} \left(x + \frac{1}{x-1} - 1 \cdot x \right) = \\
&= \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{1}{x-1} \right) = \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Primijetimo da isti račun vrijedi i kad $x \to +\infty$. Zbog toga zadana krivulja ima dvije asimptote: $p_1 \ldots x = 1$ i $p_2 \ldots y = x$.

b) $y = \frac{x}{\mathrm{e}^x}$;

Rješenje: Uočimo da je prirodna domena funkcije $f(x) = \frac{x}{\mathrm{e}^x}$ skup $\mathbb{R}$ i da je f neprekidna na $\mathbb{R}$, pa zato zadana krivulja nema uspravnu asimptotu. Računamo koeficijente lijeve kose asimptote:

$$\begin{aligned} k_1 &= \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right) = \\ &= \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x}{x\cdot \mathrm{e}^x}\right) = \\ &= \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{\mathrm{e}^x}\right) = +\infty \end{aligned}$$

Dakle, zadana krivulja nema lijevu kosu asimptotu. No, analogan zaključak **ne** vrijedi za desnu kosu asimptotu:

$$\begin{aligned} k_2 &= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right) = \\ &= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x\cdot \mathrm{e}^x}\right) = \\ &= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\mathrm{e}^x}\right) = \\ &= 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} l_2 &= \lim_{x\to+\infty}\left(f(x) - k_2\cdot x\right) = \\ &= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{\mathrm{e}^x} - 0\cdot x\right) = \\ &= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{\mathrm{e}^x}\right) = \left\{\frac{+\infty}{+\infty}\right\} = \\ &= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\mathrm{e}^x}\right) = \\ &= 0. \end{aligned}$$

Prema tome, desna kosa (zapravo, horizontalna) asimptota je pravac $y = 0$, tj. os apscisa.

c) $y = \dfrac{\ln x}{x}$;

Rješenje: Prirodna domena funkcije $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ je skup $\langle 0, +\infty \rangle$. Zbog toga najprije računamo:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0+} f(x) &= \lim_{x\to 0+}\left(\frac{\ln x}{x}\right) = \left\{\frac{-\infty}{0}\right\} = \\ &= \lim_{x\to 0+}\left(\frac{1}{x}\right) = \\ &= +\infty\end{aligned},$$

pa zaključujemo da je pravac $x = 0$ (os ordinata) uspravna asimptota zadane krivulje.

Nadalje, računamo isključivo koeficijente *desne kose asimptote* jer za negativne vrijednosti varijable x funkcija f nije definirana:

$$\begin{aligned}k_2 &= \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right) = \\ &= \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{\frac{\ln x}{x}}{x}\right) = \\ &= \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{\ln x}{x^2}\right) = \left\{\frac{+\infty}{+\infty}\right\} = \\ &= \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{1}{2\cdot x^2}\right) = \\ &= 0;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}l_2 &= \lim_{x\to +\infty}\left(f(x) - k_2\cdot x\right) = \\ &= \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{\ln x}{x} - 0\cdot x\right) = \\ &= \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{\ln x}{x}\right) = \left\{\frac{+\infty}{+\infty}\right\} = \\ &= \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{1}{x}\right) = \\ &= 0.\end{aligned}$$

Zaključujemo da zadana krivulja ima dvije asimptote: uspravnu asimptotu $x = 0$ i desnu horizontalnu asimptotu $y = 0$ (os apscisa).

d) $y = x - 2 \cdot \operatorname{arctg} x$;

Rješenje: Uočimo da je prirodna domena funkcije $f(x) = x - 2 \cdot \operatorname{arctg} x$ skup $\mathbb{R}$ i da je f neprekidna na $\mathbb{R}$. Zbog toga zadana krivulja nema uspravnu asimptotu.

Računamo koeficijente lijeve kose asimptote:

$$\begin{aligned} k_1 &= \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{f(x)}{x} \right) = \\ &= \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{x - 2 \cdot \operatorname{arctg} x}{x} \right) = \\ &= \lim_{x \to -\infty} \left(1 - \frac{2 \cdot \operatorname{arctg} x}{x} \right) = \\ &= 1 - 0 = \\ &= 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} l_1 &= \lim_{x \to -\infty} \left(f(x) - k_1 \cdot x \right) = \\ &= \lim_{x \to -\infty} \left(x - 2 \cdot \operatorname{arctg} x - x \right) = \\ &= \lim_{x \to -\infty} (-2 \cdot \operatorname{arctg} x) = \\ &= (-2) \cdot \lim_{x \to -\infty} \operatorname{arctg} x = \\ &= (-2) \cdot \left(-\frac{\pi}{2} \right) = \\ &= \pi. \end{aligned}$$

Uočimo da kad $x \to +\infty$ dobijemo $k_2 = k_1 = 1$, dok je

$$\begin{aligned} l_2 &= \lim_{x \to +\infty} \left(f(x) - k_1 \cdot x \right) = \\ &= \lim_{x \to +\infty} \left(x - 2 \cdot \operatorname{arctg} x - x \right) = \\ &= \lim_{x \to +\infty} (-2 \cdot \operatorname{arctg} x) = \\ &= (-2) \cdot \lim_{x \to +\infty} \operatorname{arctg} x = \\ &= (-2) \cdot \frac{\pi}{2} = \\ &= -\pi. \end{aligned}$$

Zbog toga zadana krivulja ima dvije asimptote: lijevu kosu asimptotu $p_1 \ldots y = x + \pi$ i desnu kosu asimptotu $p_2 \ldots y = x - \pi$.

e) $y = x \cdot \ln x.$

Rješenje: Prirodna domena funkcije $f(x) = x \cdot \ln x$ je $\langle 0, +\infty \rangle$. Zbog toga ima smisla ispitati postoje li uspravna asimptota i desna kosa asimptota.

Računamo:

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x \to 0+} f(x) = \lim_{x \to 0+} (x \cdot \ln x) = \{0 \cdot (-\infty)\} = \\ &= \lim_{x \to 0+} \left(\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \right) = \left\{ \frac{-\infty}{+\infty} \right\} = \\ &= \lim_{x \to 0+} \left(\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} \right) = \\ &= \lim_{x \to 0+} (-x) = \\ &= 0. \end{aligned}$$

Zbog toga ne postoji uspravna asimptota.

Nadalje, primijetimo da vrijedi:

$$\begin{aligned} k &= \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{f(x)}{x} \right) = \\ &= \lim_{x \to +\infty} (\ln x) = \\ &= +\infty \end{aligned},$$

pa ne postoji ni desna kosa asimptota.

Dakle, zadana krivulja nema nijednu asimptotu.

3. Krivulja $y = \dfrac{a \cdot x + b}{c \cdot x + d}$ ima uspravnu asimptotu $x = 1$, vodoravnu asimptotu $y = 2$ i siječe os ordinata u točki s ordinatom –1. Odredite jednadžbu te krivulje.

Rješenje: Primijetimo najprije da mora biti $c \neq 0$ jer je u suprotnom krivulja y zapravo pravac koji nema nijednu asimptotu. Iz zadanih podataka dobivamo sljedeći sustav triju linearnih jednadžbi s četiri nepoznanice:

$$\begin{cases} c \cdot 1 + d = 0, \\ \dfrac{a}{c} = 2, \\ \dfrac{b}{d} = -1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} c + d = 0, \\ a = 2 \cdot c, \\ b = -d \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 2 \cdot c, \\ b = c, \\ d = -c. \end{cases}$$

Zbog toga je:

$$\begin{aligned} y &= \frac{a \cdot x + b}{c \cdot x + d} = \\ &= \frac{2 \cdot c \cdot x + c}{c \cdot x - c} = \\ &= \frac{c \cdot (2 \cdot x + 1)}{c \cdot (x - 1)} = (\text{zbog } c \neq 0) = \\ &= \frac{2 \cdot x + 1}{x - 1}. \end{aligned}$$