

4.10. ASIMPTOTE

USPRAVNE I KOSE ASIMPTOTE NA GRAF
REALNE FUNKCIJE JEDNE REALNE VARIJABLE.

4.10.1. DEFINICIJA ASIMPTOTE

- Intuitivno govoreći, asimptota je pravac kojemu se približava neka krivulja kad prva ili druga koordinata točke te krivulje teže u $\pm\infty$.
- Formalna definicija je:
- Pravac p je asimptota na graf Γ realne funkcije f ako udaljenost između pravca p i točke $T \in \Gamma$ teži ka nuli čim se točka T beskonačno udaljava od ishodišta koordinatnoga sustava.

4.10.2. KLASIFIKACIJA ASIMPTOTA

- Osnovna podjela asimptota: na uspravne (*vertikalne*) i kose (među kojima posebno izdvajamo vodoravne (*horizontalne*)).

- Uspravne asimptote su pravci usporedni s osi ordinata i imaju jednadžbu oblika $x = a$, gdje je $a \in \mathbb{R}$ takav da vrijedi:

$$\lim_{x \rightarrow a+} f(x) \text{ i/ili } \lim_{x \rightarrow a-} f(x) \in \{-\infty, +\infty\}$$

- Uspravne asimptote na graf funkcije f su najčešće pravci koji prolaze rubnim točkama prirodne domene te funkcije.
- U slučaju *racionalne* funkcije uspravne asimptote prolaze *polovima* te funkcije.
- Važno: Ako je f neprekidna funkcija na \mathbb{R} , onda graf funkcije f nema nijednu uspravnu asimptotu.

4.10.2. KLASIFIKACIJA ASIMPTOTA

- Kose asimptote su pravci oblika
- $y = k \cdot x + l$.
- Ako je $k = 0$, govorimo o vodoravnoj ili *horizontalnoj* asimptoti.
- Kose asimptote dodatno dijelimo na lijeve i desne.
- Ova podjela je potrebna jer neki graf može imati lijevu kosu asimptotu, ali ne i desnu, odnosno obrnuto.

4.10.3. ODREĐIVANJE LIJEVE KOSE ASIMPTOTE

- Koeficijenti k_1 i l_1 u jednadžbi $y = k_1 \cdot x + l_1$ lijeve kose asimptote određuju se prema formulama:

$$k_1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{f(x)}{x} \right)$$

$$l_1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - k_1 \cdot x)$$

- Pritom obje navedene granične vrijednosti moraju biti “konkretni” realni brojevi (nijedna od njih ne smije biti jednaka $\pm\infty$).
- Ako barem jedna od navedenih graničnih vrijednosti ne postoji, onda krivulja nema lijevu kosu asimptotu.

4.10.4. ODREĐIVANJE DESNE KOSE ASIMPTOTE

- Koeficijenti k_2 i l_2 u jednadžbi $y = k_2 \cdot x + l_2$ desne kose asimptote određuju se prema formulama:

$$k_2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f(x)}{x} \right)$$

$$l_2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - k_1 \cdot x)$$

- Pritom obje navedene granične vrijednosti *moraju* biti “konkretni” realni brojevi (nijedna od njih ne smije biti jednaka $\pm\infty$).
- Ako barem jedna od navedenih graničnih vrijednosti ne postoji, onda krivulja nema desnu kosu asimptotu.

4.10.5. NAPOMENE

- 1.) *Bilo koja* ravninska krivulja koja je graf realne funkcije jedne realne varijable ima najviše jednu lijevu i najviše jednu desnu kosu asimptotu.
- Broj uspravnih asimptota može biti bilo koji prirodan broj.
- 2.) Postupak određivanja kosih asimptota može se znatno skratiti ako se prigodom računanja koeficijenata lijeve kose asimptote utvrdi vrijede li isti zaključci i kad $x \rightarrow +\infty$.
- Ovakav način je osobito koristan kod određivanja asimptota racionalne funkcije, ali ga je *pogrešno* primjenjivati kod funkcija koje sadrže e^x , $\ln x$ i dr.
- 3.) Ako se utvrdi da je isti pravac i lijeva i desna kosa asimptota, kraće i jednostavnije govori se da je taj pravac *kosa* asimptota.