1. Neka je $f = \frac{p}{q}$ racionalna funkcija, pri čemu su $m := \mathrm{st}(p)$, $n := \mathrm{st}(q)$. Nađite nužan i dovoljan uvjet da graf funkcije *f* ima:

a) vodoravnu asimptotu;
b) kosu asimptotu (različitu od vodoravne).

Sve svoje tvrdnje precizno obrazložite.

Rješenje: Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da su

$$p(x) = a_m \cdot x^m + a_{m-1} \cdot x^{m-1} ... + a_0 ,$$
$$q(x) = b_n \cdot x^n + b_{n-1} \cdot x^{n-1} + ... + b_0 .$$

Pritom su $a_m, b_n \neq 0$. Računamo koeficijent smjera kose asimptote:

$$k = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{a_m \cdot x^m + a_{m-1} \cdot x^{m-1} ... + a_0}{b_n \cdot x^{n+1} + b_{n-1} \cdot x^n + ... + b_0 \cdot x}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{a_m \cdot x^{m-n-1} + a_{m-1} \cdot x^{m-n-2} ... + a_0 \cdot x^{-n-1}}{b_n + b_{n-1} \cdot x^{-1} + ... + b_0 \cdot x^{-n}}\right).$$

Ova granična vrijednost postoji ako i samo ako je $m - n - 1 \leq 0$ jer su u tom slučaju svi eksponenti u brojniku i nazivniku strogo negativni, pa kad $x \to \infty$, pripadni članovi teže ka nuli. Navedena nejednakost ekvivalentna je nejednakosti $m \leq n + 1$ i ta je nejednakost traženi uvjet.

Dobiveni uvjet možemo razdvojiti na tri disjunktna podslučaja: $m < n$, $m = n$ i $m = n + 1$. Pogledajmo što se dobije u svakom pojedinom podslučaju.

1. slučaj ($m < n$): U ovome je slučaju *f* prava racionalna funkcija. Bez potrebe računanja koeficijenta smjera kose asimptote prema gornjoj formuli dobijemo:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{a_m \cdot x^m + a_{m-1} \cdot x^{m-1} ... + a_0}{b_n \cdot x^n + b_{n-1} \cdot x^{n-1} + ... + b_0}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{a_m \cdot x^{m-n} + a_{m-1} \cdot x^{m-n-1} ... + a_0 \cdot x^{-n}}{b_n + b_{n-1} \cdot x^{-1} + ... + b_0 \cdot x^{-n}}\right) = 0$$

jer su svi eksponenti strogo manji od nule, pa kad $x \to \infty$, pripadni članovi teže ka nuli. Dakle, graf *svake* prave racionalne funkcije ima vodoravnu asimptotu $y = 0$ (os apscisa).

2. slučaj ($m = n$): U ovome slučaju imamo nepravu racionalnu funkciju kojoj je stupanj brojnika jednak stupnju nazivnika. U ovom slučaju dobijemo:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} ... + a_0}{b_n \cdot x^n + b_{n-1} \cdot x^{n-1} + ... + b_0}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{a_n + a_{n-1} \cdot x^{-1} ... + a_0 \cdot x^{-n}}{b_n + b_{n-1} \cdot x^{-1} + ... + b_0 \cdot x^{-n}}\right) = \frac{a_n}{b_n}$$

pa u ovom slučaju graf funkcije f ima vodoravnu asimptotu $y = \frac{a_n}{b_n}$. Zbog pretpostavke $a_n \neq 0$, ta je asimptota pravac usporedan s osi apscisa (i različit od te osi).

3. slučaj ($m = n + 1$): U ovome slučaju vrijedi:

$$f(x) = \frac{a_{n+1} \cdot x^{n+1} + a_n \cdot x^n ... + a_0}{b_n \cdot x^n + b_{n-1} \cdot x^{n-1} ... + b_0} = \frac{a_{n+1} \cdot x + a_n + .. + a_0 \cdot x^{-n}}{b_n + b_{n-1} \cdot x^{-1} ... + b_0 \cdot x^{-n}},$$

pa slijedi:

$$k = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{a_{n+1} \cdot x + a_n + .. + a_0 \cdot x^{-n}}{b_n \cdot x + b_{n-1} + ... + b_0 \cdot x^{-n+1}}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{a_{n+1} + a_n \cdot x^{-1} + .. + a_0 \cdot x^{-n-1}}{b_n + b_{n-1} \cdot x^{-1} + ... + b_0 \cdot x^{-n+1}}\right) = \frac{a_{n+1}}{b_n},$$

$$l = \lim_{x\to\infty}\left(f(x) - k \cdot x\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{a_{n+1} \cdot x + a_n + .. + a_0 \cdot x^{-n}}{b_n + b_{n-1} \cdot x^{-1} ... + b_0 \cdot x^{-n}} - \frac{a_{n+1}}{b_n} \cdot x\right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{a_{n+1} \cdot x + a_n + .. + a_0 \cdot x^{-n} - \frac{a_{n+1}}{b_n} \cdot x \cdot \left(b_n + b_{n-1} \cdot x^{-1} ... + b_0 \cdot x^{-n}\right)}{b_n + b_{n-1} \cdot x^{-1} ... + b_0 \cdot x^{-n}}\right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\left(a_n - \frac{a_{n+1} \cdot b_{n-1}}{b_n}\right) + .. + a_0 \cdot x^{-n}}{b_n + b_{n-1} \cdot x^{-1} ... + b_0 \cdot x^{-n}}\right) = \frac{a_n - \frac{a_{n+1} \cdot b_{n-1}}{b_n}}{b_n} = \frac{a_n \cdot b_n - a_{n+1} \cdot b_{n-1}}{b_n^2}.$$

Prema pretpostavci su $a_m = a_{n+1} \neq 0,\ b_n \neq 0,$ pa u ovom slučaju graf funkcije f ima obostranu kosu asimptotu (koja nije vodoravna).

2. Odredite sve asimptote na sljedeće ravninske krivulje:

a) $y = x + \dfrac{1}{x-1}$;

Rješenje: Funkcija $f(x) = x + \dfrac{1}{x-1}$ ima pol $x = 1$, pa je uspravna asimptota na njezin graf pravac $p \ldots x = 1$. Računamo koeficijente lijeve kose asimptote:

$$k_1 = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{f(x)}{x} \right) = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{x + \frac{1}{x-1}}{x} \right) = \lim_{x \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{x \cdot (x-1)} \right) = 1 + 0 = 1;$$

$$l_1 = \lim_{x \to -\infty} \left(f(x) - k_1 \cdot x \right) = \lim_{x \to -\infty} \left(x + \frac{1}{x-1} - 1 \cdot x \right) = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{1}{x-1} \right) = 0.$$

Primijetimo da isti račun vrijedi i kad $x \to +\infty$. Zbog toga zadana krivulja ima dvije asimptote: $p_1 \ldots x = 1$ i $p_2 \ldots y = x$.

b) $y = \dfrac{x}{e^x}$;

Rješenje: Uočimo da je prirodna domena funkcije $f(x) = \dfrac{x}{e^x}$ skup $\mathbb{R}$ i da je f neprekidna na $\mathbb{R}$, pa zato zadana krivulja nema uspravnu asimptotu. Računamo koeficijente lijeve kose asimptote:

$$k_1 = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{f(x)}{x} \right) = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{x}{x \cdot e^x} \right) = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{1}{e^x} \right) = +\infty.$$

Dakle, zadana krivulja nema lijevu kosu asimptotu. No, isti zaključak **ne** vrijedi za desnu kosu asimptotu:

$$k_2 = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{f(x)}{x} \right) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x}{x \cdot e^x} \right) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{e^x} \right) = 0;$$

$$l_2 = \lim_{x \to +\infty} \left(f(x) - k_2 \cdot x \right) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x}{e^x} - 0 \cdot x \right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = \left\{ \frac{+\infty}{+\infty} \right\} = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{e^x} \right) = 0.$$

Prema tome, desna kosa (zapravo, horizontalna) asimptota je pravac $y = 0$, tj. os apscisa.

c) $y=\frac{\ln x}{x}$;

Rješenje: Prirodna domena funkcije $f(x)=\frac{\ln x}{x}$ je skup $\langle 0,+\infty\rangle$. Zbog toga najprije računamo:

$$\lim_{x\to 0+} f(x)=\lim_{x\to 0+}\left(\frac{\ln x}{x}\right)=\left\{\frac{-\infty}{0}\right\}=\lim_{x\to 0+}\left(\frac{1}{x}\right)=+\infty,$$

pa zaključujemo da je pravac $x=0$ (os ordinata) uspravna asimptota zadane krivulje. Nadalje, računamo isključivo koeficijente *desne kose asimptote* jer za negativne vrijednosti varijable x funkcija f nije definirana:

$$k_2=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\frac{\ln x}{x}}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{x^2}\right)=\left\{\frac{+\infty}{+\infty}\right\}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2\cdot x^2}\right)=0;$$

$$l_2=\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-k_2\cdot x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{x}-0\cdot x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{x}\right)=\left\{\frac{+\infty}{+\infty}\right\}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)=0.$$

Zaključujemo da zadana krivulja ima dvije asimptote: uspravnu asimptotu $x=0$ i desnu horizontalnu asimptotu $y=0$ (os apscisa).

d) $y=x-2\cdot\operatorname{arctg} x$;

Rješenje: Uočimo da je prirodna domena funkcije $f(x)=x-2\cdot\operatorname{arctg} x$ skup $\mathbb{R}$ i da je f neprekidna na $\mathbb{R}$. Zbog toga zadana krivulja nema uspravnu asimptotu. Računamo koeficijente lijeve kose asimptote:

$$k_1=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x-2\cdot\operatorname{arctg} x}{x}\right)=\left\{\frac{-\infty}{-\infty}\right\}=\lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{2}{1+x^2}\right)=1-0=1,$$

$$l_1=\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-k_1\cdot x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(x-2\cdot\operatorname{arctg} x-x\right)=\lim_{x\to-\infty}(-2\cdot\operatorname{arctg} x)=(-2)\cdot\lim_{x\to-\infty}\operatorname{arctg} x=(-2)\cdot\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\pi.$$

Uočimo da kad $x\to+\infty$ dobijemo $k_2=k_1=1$, dok je

$$l_2=\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-k_1\cdot x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(x-2\cdot\operatorname{arctg} x-x\right)=\lim_{x\to+\infty}(-2\cdot\operatorname{arctg} x)=(-2)\cdot\lim_{x\to+\infty}\operatorname{arctg} x=(-2)\cdot\frac{\pi}{2}=-\pi.$$

Zbog toga zadana krivulja ima dvije asimptote: lijevu kosu asimptotu $p_1 \ldots y=x+\pi$ i desnu kosu asimptotu $p_2 \ldots y=x-\pi$.

e) $y = x \cdot \ln x$.

Rješenje: Prirodna domena funkcije $f(x) = x \cdot \ln x$ je $\langle 0, +\infty \rangle$. Zbog toga ima smisla ispitati postoji li uspravna, odnosno desna kosa asimptota. Računamo:

$$L = \lim_{x \to 0+} f(x) = \lim_{x \to 0+} (x \cdot \ln x) = \{0 \cdot (-\infty)\} = \lim_{x \to 0+} \left(\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \right) = \left\{ \frac{-\infty}{+\infty} \right\} = \lim_{x \to 0+} \left(\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} \right) = \lim_{x \to 0+} (-x) = 0.$$

Zbog toga ne postoji uspravna asimptota.

Nadalje, primijetimo da vrijedi:

$$k = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{f(x)}{x} \right) = \lim_{x \to +\infty} (\ln x) = +\infty,$$

pa ne postoji ni desna kosa asimptota.

Dakle, zadana krivulja nema nijednu asimptotu.

3. Krivulja $y = \dfrac{a \cdot x + b}{c \cdot x + d}$ ima uspravnu asimptotu $x = 1$, vodoravnu asimptotu $y = 2$ i siječe os ordinata u točki s ordinatom –1. Odredite jednadžbu te krivulje.

Rješenje: Primijetimo najprije da mora biti $c \neq 0$ jer je u suprotnom y pravac koji nema nijednu asimptotu. Iz zadanih podataka dobivamo sljedeći sustav triju linearnih jednadžbi s četiri nepoznanice:

$$\begin{cases} c \cdot 1 + d = 0, \\ \dfrac{a}{c} = 2, \\ \dfrac{b}{d} = -1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c + d = 0, \\ a = 2 \cdot c, \\ b = -d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \cdot c, \\ b = c, \\ d = -c. \end{cases}$$

Zbog toga je:

$$y = \frac{a \cdot x + b}{c \cdot x + d} = \frac{2 \cdot c \cdot x + c}{c \cdot x - c} = \frac{c \cdot (2 \cdot x + 1)}{c \cdot (x - 1)} = (\text{zbog } c \neq 0) = \frac{2 \cdot x + 1}{x - 1}.$$