4.11. TANGENTA I NORMALA NA RAVNINSKU KRIVULJU

JEDNADŽBE TANGENTE I NORMALE POVUČENE NA RAVNINSKU KRIVULJU

4.11.1. TANGENTA NA RAVNINSKU KRIVULJU

- **Tangenta** povučena **na graf derivabilne funkcije** f u njegovoj točki $T = (x_T, f(x_T))$ je pravac koji prolazi točkom T i ima koeficijent smjera $f'(x_T)$.
- Za standardne krivulje 2. reda (kružnica, elipsa, hiperbola, parabola) ta definicija podudara se s definicijom: *Tangenta je pravac koji siječe zadanu krivulju u točno jednoj točki*.
- Iz definicije tangente slijedi da je ona (kao i svaki pravac) jednoznačno određena svojim *koeficijentom smjera*, te svojim *diralištem.*
- U točki 4.7.1. istaknuli smo da se *derivacija funkcije f u točki c* geometrijski interpretira kao *koeficijent smjera tangente povučene na graf funkcije f u točki*
- $T = (c, f(c))$.
- Taj koeficijent je ujedno i *tangens kuta kojega tangenta zatvara s pozitivnim dijelom osi apscisa*.
- Slijedom navedenoga, jednadžba tangente povučene u točki $T = (x_T, f(x_T))$ na graf *derivabilne* funkcije f glasi:

$$y = f'(x_T) \cdot (x - x_T) + f(x_T)$$

- Ponekad se promatra i **duljina tangente**. Ona se *dogovorno* definira kao udaljenost između sjecišta tangente s osi apscisa i dirališta tangente (točke T).

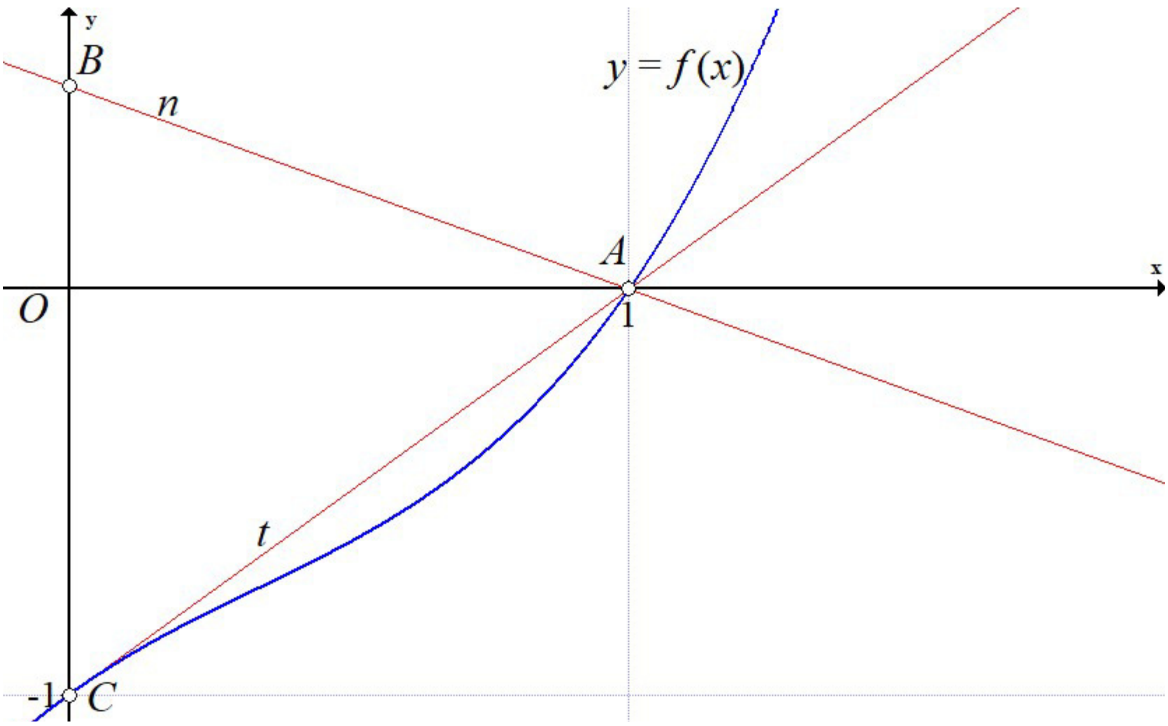
4.11.2. NORMALA NA RAVNINSKU KRIVULJU

- *Normala* na graf funkcije f povučena u njegovoj točki $T = (x_T, f(x_T))$ je pravac koji prolazi točkom T okomito na tangentu povučenu na graf funkcije f u točki T.
- Ako je $f'(x_T) \neq 0$, onda jednadžba normale povučene u točki T na graf *derivabilne* funkcije f glasi:

$$y = \frac{-1}{f'(x_T)} \cdot (x - x_T) + f(x_T)$$

- Koeficijent smjera normale povučene na graf funkcije f u nekoj točki *uvijek* je suprotan i recipročan koeficijentu smjera tangente povučene na taj graf u istoj točki.
- Analogno kao i kod tangente, **duljina normale** *dogovorno* se definira kao udaljenost sjecišta te normale s krivuljom (tj. točke T) i sjecišta iste normale s osi apscisa.

1. **(2. kolokvij, ak. god. 2019./2020.)** Na slici 1. prikazani su graf funkcije f, tangenta t povučena na taj graf u točki C i normala n povučena na taj graf u točki A.



Slika 1.

Ako površina trokuta ABC iznosi 0.75 kv. jed., odredite $f'(0)+f'(1)$. Sve svoje tvrdnje precizno obrazložite.

Rješenje: Iz slike 1. očitamo koordinate točaka A i C:

$$A=(1,0),\ C=(0,-1).$$

Zbog toga jednadžba tangente t u segmentnom obliku glasi:

$$t \ldots \ \frac{x}{1}+\frac{y}{-1}=1,$$

pa ta jednadžba zapisana u eksplicitnom obliku glasi:

$$y=x-1.$$

Odatle očitamo koeficijent smjera tangente t:

$$k_t=1.$$

S druge je strane taj koeficijent jednak vrijednosti prve derivacije funkcije f u točki $x=0$. To znači da je $f'(0)=1$.

Površina trokuta ABC jednaka je polovici umnoška duljine stranice $\overline{BC}$ i duljine visine povučene na tu stranicu. Duljina uočene visine jednaka je udaljenosti točke A od ishodišta pravokutnoga koordinatnoga sustava u ravnini. Ta je duljina jednaka apscisi točke A, tj. 1. Duljina stranice $\overline{BC}$ jednaka je zbroju ordinate točke B i apsolutne vrijednosti ordinate točke C. Označimo li s y_B ordinatu točke B, dobivamo jednadžbu:

$$\frac{(1+y_B)\cdot 1}{2}=0.75.$$

Njezinim rješavanjem lagano dobijemo $y_B=0.5$. Dakle, $B=(0,0.5)$.

Jednadžba normale n zapisana u segmentnom obliku glasi:

$$n\ldots\ \frac{x}{1}+\frac{y}{0.5}=1,$$

pa ta jednadžba zapisana u eksplicitnom obliku glasi:

$$y=(-0.5)\cdot x+0.5.$$

Odatle očitamo koeficijent smjera normale n:

$$k_n=-0.5.$$

S druge je strane taj koeficijent jednak suprotnoj i recipročnoj vrijednosti prve derivacije funkcije f u točki $x=1$. Tako iz jednadžbe

$$\frac{-1}{f'(1)}=-0.5$$

slijedi $f'(1)=2$.

Prema tome, rješenje zadatka je:

$$f'(0)+f'(1)=1+2=3.$$

2. U sjecištu krivulje $K \ldots y = x^3 + 2 \cdot x^2 - x - 2$ sa strogo pozitivnim dijelom osi apscisa povučena je tangenta t na krivulju K. Odredite jednadžbe tangenata povučenih u svim ostalim sjecištima pravca t i krivulje K.

Rješenje: Rastavimo izraz koji zadaje krivulju K na faktore:

$$\begin{aligned} x^3 + 2 \cdot x^2 - x - 2 &= x^2 \cdot (x+2) - (x+2) = \\ &= (x+2) \cdot (x^2 - 1) = \\ &= (x+2) \cdot (x+1) \cdot (x-1). \end{aligned}$$

Odavde „očitamo“ da su sjecišta krivulje K s osi apscisa točke $(-2,0)$, $(-1,0)$ i $(1,0)$. Od te tri točke jedino točka $T = (1,0)$ pripada strogo pozitivnom dijelu osi apscisa. Zbog toga je t tangenta povučena na krivulju K upravo u toj točki.

Jednadžbu tangente t odredimo standardnim postupkom. Imamo redom:

$$\begin{aligned} & y' = 3 \cdot x^2 + 4 \cdot x - 1, \\ & k_t = y'(1) = 3 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 - 1 = 6, \\ & t \ldots \; y = 6 \cdot (x-1), \\ & \qquad y = 6 \cdot x - 6. \end{aligned}$$

Odredimo sva sjecišta tangente t i krivulje K. U tu svrhu riješimo sustav dviju jednadžbi s dvije nepoznanice:

$$\begin{cases} y = x^3 + 2 \cdot x^2 - x - 2 \\ y = 6 \cdot x - 6 \end{cases}$$

Lijeve strane tih jednadžbi su jednake, pa takve moraju biti i desne strane. Tako dobivamo:

$$\begin{aligned} & x^3 + 2 \cdot x^2 - x - 2 = 6 \cdot x - 6, \\ & (x+2) \cdot (x+1) \cdot (x-1) = 6 \cdot (x-1), \\ & (x-1) \cdot \big((x+2) \cdot (x+1) - 6\big) = 0, \\ & (x-1) \cdot (x^2 + 3 \cdot x - 4) = 0, \\ & x_1 = x_2 = 1, \; x_3 = -4. \end{aligned}$$

Dakle, osim u točki (1, 0), tangenta t siječe krivulju K u točki T_1 s apscisom –4. Preostaje napisati jednadžbu tangente t_1 povučene na krivulju K u točki $T_1 = \left(-4, y_{T_1}\right)$. Imamo redom:

$$\begin{aligned} y_{T_1} &= 6 \cdot (-4) - 6 = \\ &= -24 - 6 = \\ &= -30, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_{t_1} &= y'(-4) = \\ &= 3 \cdot (-4)^2 + 4 \cdot (-4) - 1 = \\ &= 31, \end{aligned}$$

$$t_1 \ldots \quad y = 31 \cdot (x - (-4)) + (-30),$$
$$y = 31 \cdot x + 94.$$

3. U točki krivulje $y = \sqrt{x}$ čija je apscisa 4 povučene su tangenta i normala na krivulju. Izračunajte površinu lika kojega te krivulje zatvaraju s objema koordinatnim osima.

Rješenje: Dirałište tangente, odnosno sjecište normale i krivulje je točka

$$T = \left(4, \sqrt{4}\right) =$$
$$= (4, 2).$$

Derivacija funkcije $f(x) = \sqrt{x}$ u točki $c = 4$ jednaka je:

$$f'(4) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{4}} =$$
$$= \frac{1}{4}.$$

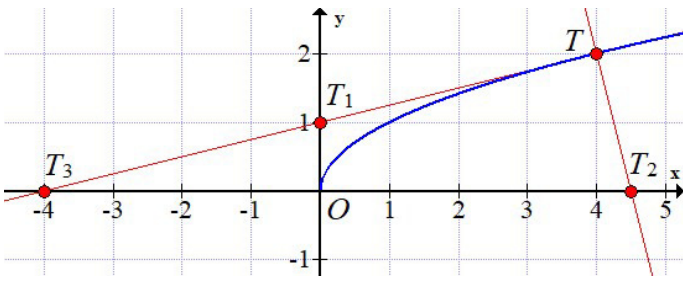
Zbog toga je jednadžba tangente povučene na zadanu krivulju u točki T

$$t \ldots y = \frac{1}{4} \cdot x + 1,$$

dok je jednadžba pripadne normale

$$n \ldots y = -4 \cdot x + 18.$$

Sjecište tangente s osi ordinata je točka T_1 = (0, 1), a s osi apscisa točka $T_3 = (-4, 0)$. Sjecište normale s osi apscisa je točka $T_2 = \left(\frac{9}{2}, 0\right)$. Lik čiju površinu tražimo je četverokut OT_1TT_2. (vidjeti sliku 2.)



Slika 2.

Traženu površinu najlakše odredimo tako da od površine trokuta čiji su vrhovi T_3, T_2 i T oduzmemo površinu trokuta čiji su vrhovi T_3, O i T_1. Tako odmah dobivamo:

$$P = \frac{\left(4 + \frac{9}{2}\right) \cdot 2}{2} - \frac{4 \cdot 1}{2} = \frac{13}{2} = 6.5 \text{ kv. jed.}$$

4. Zadana je krivulja $K \ldots y = x^3 + x + a$, pri čemu je $a \in \mathbb{R}$ konstanta. U sjecištu te krivulje s osi ordinata povučena je normala n. Odredite vrijednost a za koju je površina trokuta kojega normala n zatvara s objema koordinatnim osima jednaka 2 kv. jed.

Rješenje: Odredimo najprije sjecište krivulje K i osi ordinata. Dobijemo ga tako da u jednadžbu krivulje K uvrstimo $x = 0$. Lako izračunamo $S = (0,\ a)$.

Odredimo koeficijent smjera normale. Derivirajmo izraz koji zadaje krivulju K. Dobivamo:

$$y' = 3 \cdot x^2 + 1.$$

Odatle je

$$\begin{aligned} k_n &= \frac{-1}{y'(0)} = \\ &= \left(\frac{-1}{3 \cdot x^2 + 1} \right)_{x=0} = \\ &= \frac{-1}{3 \cdot 0^2 + 1} = -1. \end{aligned}$$

Prema tome, jednadžba normale u eksplicitnom obliku glasi: $n \ldots\ y = -x + a$. Ta jednadžba zapisana u segmentnom obliku glasi:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{a} = 1.$$

Normala n s objema koordinatnim osima zatvara jednakokračan pravokutan trokut čije su katete duge $|a|$ jedinica duljine. Površina toga trokuta (u kv. jed.) je:

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2} \cdot |a|^2 = \\ &= (\text{zbog } |a|^2 = a^2, \forall a \in \mathbb{R}) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot a^2 \end{aligned}$$

Tako iz jednadžbe $\frac{1}{2} \cdot a^2 = 2$ slijedi

$$a^2 = 4,$$

odnosno $a \in \{-2, 2\}$.

5. Zadana je krivulja $K \ldots \begin{cases} x = t \cdot \cos t \\ y = t \cdot \sin t \end{cases}$, pri čemu je $t \in \left[\frac{-3}{2} \cdot \pi,\ \frac{3}{2} \cdot \pi\right]$. U točki krivulje određenoj parametrom $t = \pi$ povučene su tangenta i normala na krivulju. Izračunajte površinu trokuta kojega ti pravci zatvaraju s osi ordinata.

Rješenje: Točka određena parametrom $t = \pi$ je:

$$\begin{aligned} T &= (\pi \cdot \cos \pi, \pi \cdot \sin \pi) = \\ &= (\pi \cdot (-1), \pi \cdot 0) = \\ &= (-\pi, 0) \end{aligned}.$$

Derivacija pripadne parametarski zadane funkcije u toj točki jednaka je

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(t \cdot \sin t)'}{(t \cdot \cos t)'} = \\ &= \frac{1 \cdot \sin t + t \cdot \cos t}{1 \cdot \cos t + t \cdot (-\sin t)} = \\ &= \frac{\sin t + t \cdot \cos t}{\cos t - t \cdot \sin t}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(y'\right)_{t=\pi} &= \frac{\sin \pi + \pi \cdot \cos \pi}{\cos \pi - \pi \cdot \sin \pi} = \\ &= \frac{0 + \pi \cdot (-1)}{-1 - \pi \cdot 0} = \pi, \end{aligned}$$

pa je jednadžba tangente povučene na zadanu krivulju u točki T

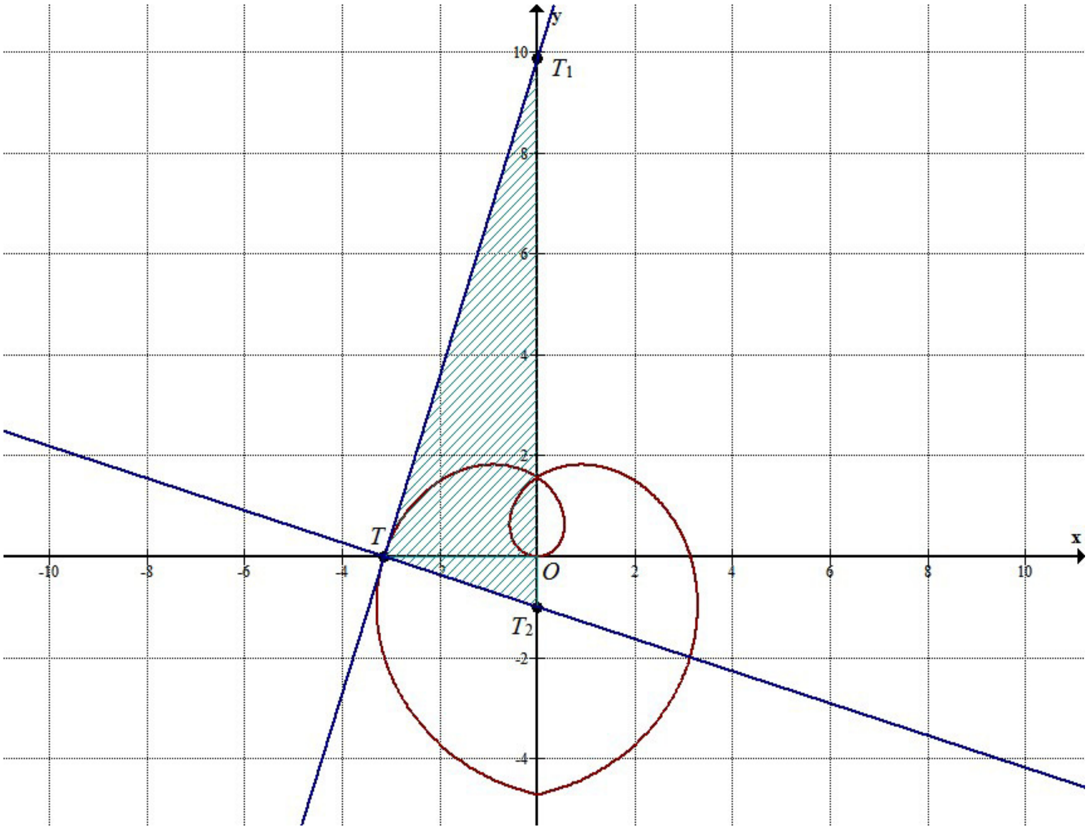
$$\begin{aligned} t \ldots\ y &= \pi \cdot (x - (-\pi)), \\ y &= \pi \cdot x + \pi^2. \end{aligned}$$

Jednadžba normale povučene na zadanu krivulju u istoj točki je:

$$\begin{aligned} n \ldots\ y &= \left(\frac{-1}{\pi}\right) \cdot (x - (-\pi)), \\ y &= \frac{-1}{\pi} \cdot x - 1. \end{aligned}$$

Tangenta t siječe os ordinata u točki $T_1 = \left(0, \pi^2\right)$, dok normala n siječe istu os u točki $T_2 = (0, -1)$ (vidjeti sliku 3.) Zbog toga je tražena površina jednaka:

$$P = \frac{1}{2} \cdot \left(\pi^2 + 1\right) \cdot \pi = \frac{\pi^3 + \pi}{2} \approx 17.07393 \text{ kv. jed.}$$



Slika 3.

6. U točki krivulje $K \ldots x^3 + y^2 + 2 \cdot x - 6 = 0$ čija je ordinata 3 povučene su tangenta i normala na krivulju. Izračunajte površinu trokuta kojega ti pravci zatvaraju s osi apscisa.

Rješenje: Apscisu navedene točke dobijemo iz jednadžbe

$$x^3 + 3^2 + 2 \cdot x - 6 = 0$$

odnosno iz jednadžbe

$$x^3 + 2 \cdot x + 3 = 0 .$$

Jedino realno rješenje ove jednadžbe je $x = -1$. Prema tome, diralište tangente, odnosno sjecište normale i krivulje je točka $T = (-1, 3)$.

Odredimo jednadžbu tangente i normale povučenih na zadanu krivulju u točki T. U tu svrhu najprije odredimo derivaciju implicitno zadane funkcije $x^3 + y^2 + 2 \cdot x - 6 = 0$ u točki T. Imamo redom:

$$\begin{aligned}
&3 \cdot x^2 + 2 \cdot y \cdot y' + 2 - 0 = 0, \\
&(\text{uvrstimo } x = -1,\ y = 3), \\
&3 \cdot (-1)^2 + 2 \cdot 3 \cdot y' + 2 = 0, \\
&3 + 6 \cdot y' + 2 = 0, \\
&6 \cdot y' = -5, \\
&y' = \frac{-5}{6}.
\end{aligned}$$

Dakle, koeficijent smjera tangente je jednak $k_t = -\frac{5}{6}$, a koeficijent smjera normale

$$\begin{aligned}
k_n &= \frac{-1}{k_t} = \\
&= \frac{-1}{-\frac{5}{6}} = \frac{6}{5}.
\end{aligned}$$

Prema tome, jednadžba tangente zapisana u segmentnom obliku glasi:

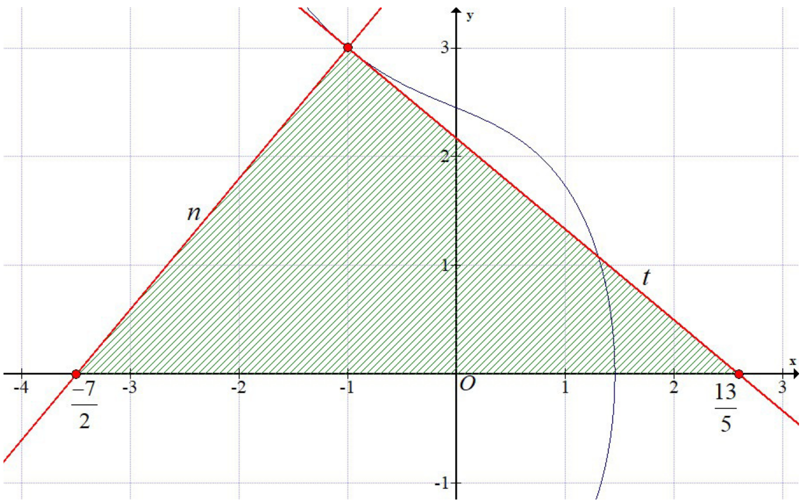
$$\begin{aligned}
&t \ldots y = -\frac{5}{6} \cdot (x - (-1)) + 3, \\
&y = -\frac{5}{6} \cdot x - \frac{5}{6} + 3,
\end{aligned}$$

$$y=-\frac{5}{6}\cdot x+\frac{13}{6},$$
$$\frac{5}{6}\cdot x+y=\frac{13}{6},$$
$$\frac{x}{\frac{13}{5}}+\frac{y}{\frac{13}{6}}=1.$$

Jednadžba normale zapisana u segmentnom obliku glasi:

$$n \ldots\ y=\frac{6}{5}\cdot(x-(-1)+3,$$
$$y=\frac{6}{5}\cdot x+\frac{6}{5}+3,$$
$$y=\frac{6}{5}\cdot x+\frac{21}{5},$$
$$\frac{-6}{5}\cdot x+y=\frac{21}{5},$$
$$\frac{x}{\frac{-7}{2}}+\frac{y}{\frac{21}{5}}=1.$$

Ti pravci sijeku os apscisa redom u točkama $T_1=\left(\frac{13}{5},0\right)$ i $T_2=\left(-\frac{7}{2},0\right)$ (vidjeti sliku 4.).



Slika 4.

Tako dobijemo da je tražena površina jednaka

$$P=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{13}{5}+\frac{7}{2}\right)\cdot 3=\frac{183}{20}=9.15 \text{ kv. jed.}$$

7. U sjecištima krivulje $K\ldots\ \ln(x\cdot y+1)+x-y-1=0$ s koordinatnim osima povučene su tangente na krivulju *K*. Izračunajte površinu lika kojega te tangente zatvaraju s objema koordinatnim osima.

Rješenje: Odredimo najprije sjecišta krivulje *K* s koordinatnim osima. Uvrstimo li $x=0$ u jednadžbu krivulje *K*, dobit ćemo:

$$\begin{aligned}&\ln(0\cdot y+1)+0-y-1=0,\\&\ln 1-y-1=0,\\&0-y-1=0,\\&-y-1=0,\\&y=-1,\end{aligned}$$

pa je sjecište krivulje *K* s osi ordinata točka $S_1=(0,-1)$.

Analogno, uvrstimo li $y=0$ u jednadžbu krivulje *K*, dobit ćemo:

$$\begin{aligned}&\ln(x\cdot 0+1)+x-0-1=0,\\&\ln 1+x-1=0,\\&x-1=0,\\&x=1,\end{aligned}$$

pa je sjecište krivulje *K* s osi apscisa točka $S_2=(1,0)$.

Deriviranjem izraza koji zadaje krivulju *K* kao implicitno zadane funkcije dobijemo:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{x\cdot y+1}\cdot\left(1\cdot y+x\cdot y^{'}\right)+1-y^{'}=0,\\&\frac{y+x\cdot y^{'}}{x\cdot y+1}+1-y^{'}=0.\end{aligned}$$

Uvrstimo li taj izraz $x=0$ i $y=-1$, dobit ćemo:

$$\begin{aligned}&\frac{1\cdot(-1)+0\cdot y^{'}}{0\cdot(-1)+1}+1-y^{'}=0,\\&-1+1-y^{'}=0,\\&y^{'}=0.\end{aligned}$$

Zbog toga jednadžba tangente povučene na krivulju *K* u točki S_1 glasi:

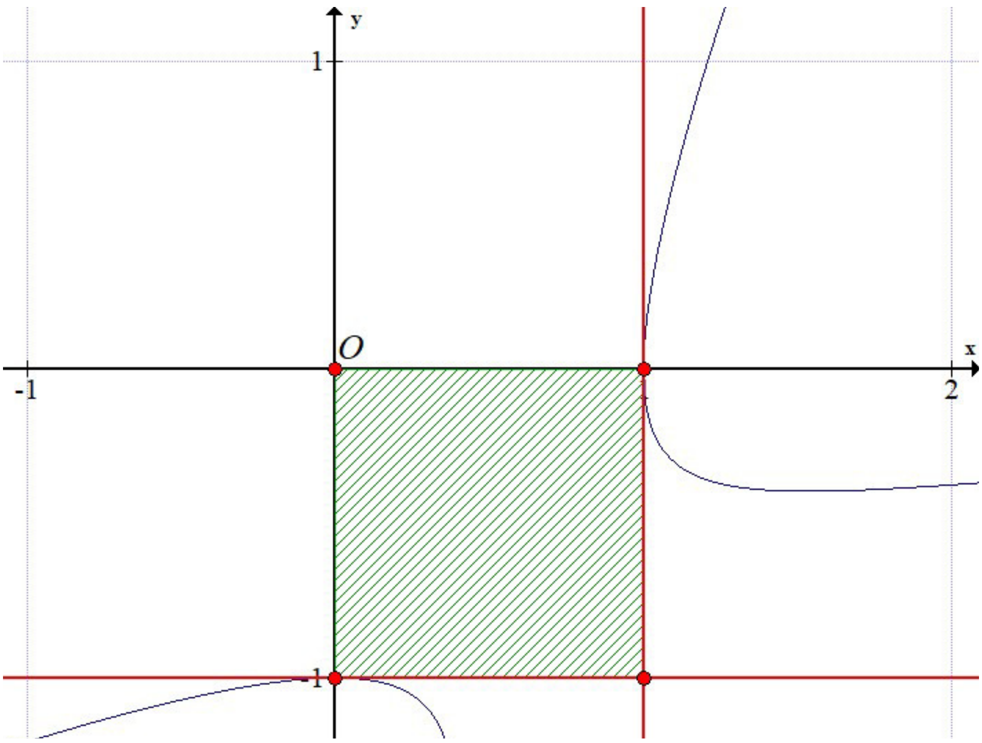
$$\begin{aligned}t_1\ldots\ y&=0\cdot(x-0)-1,\\y&=-1.\end{aligned}$$

Analogno, uvrstimo li $x=1$ i $y=0$ u izraz za y', dobit ćemo:

$$\begin{aligned}&\frac{0+1\cdot y'}{1\cdot 0+1}+1-y'=0,\\&y'+1-y'=0,\\&1=0,\end{aligned}$$

što je kontradikcija. Zbog toga zaključujemo da je tangenta povučena na krivulju K u točki S_2 usporedna s osi ordinata, pa njezina jednadžba glasi: $t_2 \ldots x=1$.

Dobivene pravce ucrtamo u pravokutni koordinatni sustav u ravnini. Dobivamo sliku 5.



Slika 5.

Lako se vidi da je ti pravci s objema koordinatnim osima zatvaraju kvadrat čija je stranica $a=1$ jed. duljine. Zbog toga je tražena površina jednaka:

$$P=a^2=1 \text{ kv. jed.}$$