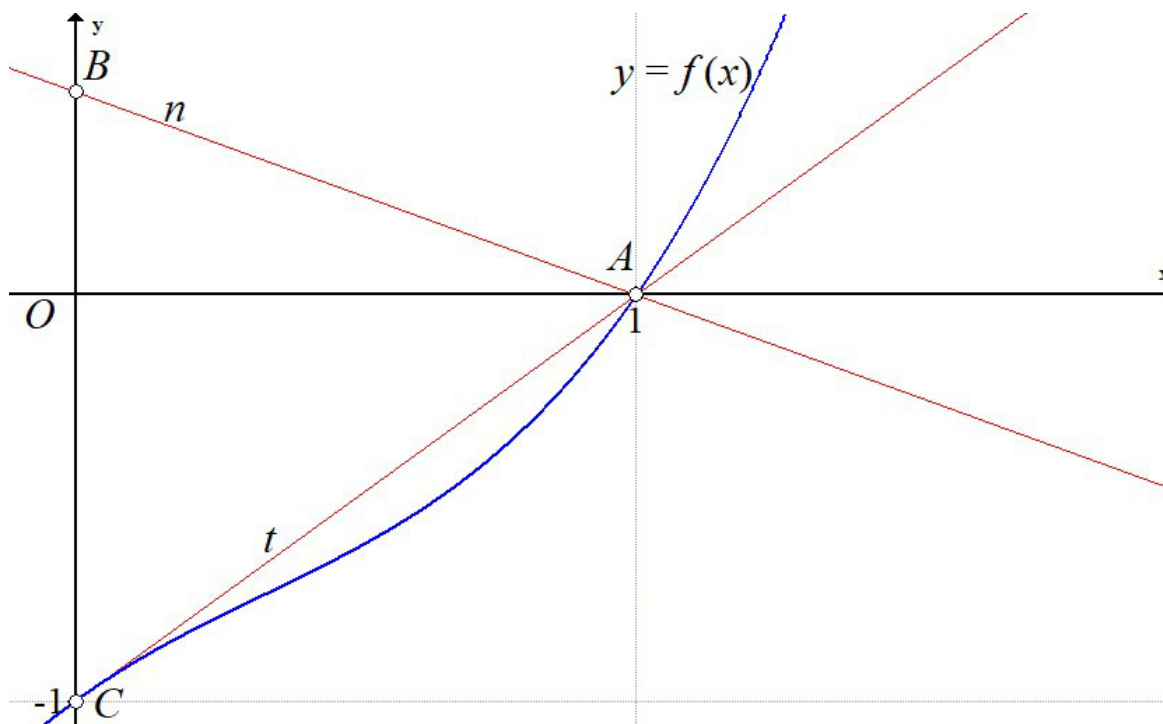


1. (2. kolokvij, ak. god. 2019./2020.) Na slici 1. prikazani su graf funkcije f , tangenta t povučena na taj graf u točki C i normala n povučena na taj graf u točki A .



Slika 1.

Ako površina trokuta ABC iznosi 0.75 kv. jed., odredite $f'(0) + f'(1)$. Sve svoje tvrdnje precizno obrazložite.

Rješenje: Iz slike 1. očitamo koordinate točaka A i C :

$$A = (1, 0), C = (0, -1).$$

Zbog toga jednačba tangente t u segmentnom obliku glasi:

$$t... \frac{x}{1} + \frac{y}{-1} = 1,$$


pa ta jednačba zapisana u eksplicitnom obliku glasi:

$$y = x - 1.$$

Odatle očitamo koeficijent smjera tangente t :

$$k_t = 1.$$

S druge je strane taj koeficijent jednak vrijednosti prve derivacije funkcije f u točki $x=0$. To znači da je $f'(0) = 1$.

 TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU POLYTECHNICUM ZAGABIENSE Elektrotehnički odjel	Matematika 1 (preddiplomski stručni studij elektrotehnike)	4.11. Tangenta i normala na ravninsku krivulju - zadaci
--	---	--

Površina trokuta ABC jednaka je polovici umnoška duljine stranice \overline{BC} i duljine visine povučene na tu stranicu. Duljina uočene visine jednaka je udaljenosti točke A od ishodišta pravokutnoga koordinatnoga sustava u ravnini. Ta je duljina jednaka apsisci točke A , tj. 1. Duljina stranice \overline{BC} jednaka je zbroju ordinate točke B i apsolutne vrijednosti ordinate točke C . Označimo li s y_B ordinatu točke B , dobivamo jednadžbu:

$$\frac{(1 + y_B) \cdot 1}{2} = 0.75.$$

Njezinim rješavanjem lagano dobijemo $y_B = 0.5$. Dakle, $B = (0, 0.5)$.

Jednadžba normale n zapisana u segmentnom obliku glasi:

$$n... \frac{x}{1} + \frac{y}{0.5} = 1,$$

pa ta jednadžba zapisana u eksplicitnom obliku glasi:

$$y = (-0.5) \cdot x + 0.5.$$

Odatle očitamo koeficijent smjera normale n :

$$k_n = -0.5.$$


S druge je strane taj koeficijent jednak suprotnoj i recipročnoj vrijednosti prve derivacije funkcije f u točki $x=1$. Tako iz jednadžbe

$$-\frac{1}{f'(1)} = -0.5$$

slijedi $f'(1) = 2$.

Prema tome, rješenje zadatka je:

$$f'(0) + f'(1) = 1 + 2 = 3.$$

 TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU POLYTECHNICUM ZAGABIENSE Elektrotehnički odjel	Matematika 1 (preddiplomski stručni studij elektrotehnike)	4.11. Tangenta i normala na ravninsku krivulju - zadaci
--	---	--

2. U sjecištu krivulje $K: y = x^3 + 2 \cdot x^2 - x - 2$ sa strogo pozitivnim dijelom osi apscisa povučena je tangenta t na krivulju K . Odredite jednadžbe tangenata povučenih u svim ostalim sjecištima pravca t i krivulje K .

Rješenje: Rastavimo izraz koji zadaje krivulju K na faktore:

$$x^3 + 2 \cdot x^2 - x - 2 = x^2 \cdot (x + 2) - (x + 2) = (x + 2) \cdot (x^2 - 1) = (x + 2) \cdot (x + 1) \cdot (x - 1).$$

Odavde „očitamo“ da su sjecišta krivulje K s osi apscisa točke $(-2, 0)$, $(-1, 0)$ i $(1, 0)$. Od te tri točke jedino točka $T = (1, 0)$ pripada strogo pozitivnom dijelu osi apscisa. Zbog toga je t tangenta povučena na krivulju K upravo u toj točki.

Jednadžbu tangente t odredimo standardnim postupkom. Imamo redom:

$$\begin{aligned} y' &= 3 \cdot x^2 + 4 \cdot x - 1, \\ k_t &= y'(1) = 3 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 - 1 = 6, \\ t \dots y &= 6 \cdot (x - 1) \Leftrightarrow y = 6 \cdot x - 6. \end{aligned}$$

Odredimo sva sjecišta tangente t i krivulje K . U tu svrhu riješimo sustav dviju jednadžbi s dvije nepoznanice:

$$\begin{cases} y = x^3 + 2 \cdot x^2 - x - 2 \\ y = 6 \cdot x - 6 \end{cases}$$

Lijeve strane tih jednadžbi su jednake, pa takve moraju biti i desne strane. Tako dobivamo:

$$\begin{aligned} x^3 + 2 \cdot x^2 - x - 2 &= 6 \cdot x - 6, \\ (x + 2) \cdot (x + 1) \cdot (x - 1) &= 6 \cdot (x - 1), \\ (x - 1) \cdot ((x + 2) \cdot (x + 1) - 6) &= 0, \\ (x - 1) \cdot (x^2 + 3 \cdot x - 4) &= 0, \\ x_1 = x_2 = 1, x_3 &= -4. \end{aligned}$$

Dakle, osim u točki $(1, 0)$, tangenta t siječe krivulju K u točki T_1 s apscisom -4 . Preostaje napisati jednadžbu tangente t_1 povučene na krivulju K u točki $T_1 = (-4, y_{T_1})$. Imamo redom:

$$\begin{aligned} y_{T_1} &= 6 \cdot (-4) - 6 = -24 - 6 = -30, \\ k_{t_1} &= y'(-4) = 3 \cdot (-4)^2 + 4 \cdot (-4) - 1 = 31, \\ t_1 \dots y &= 31 \cdot (x - (-4)) + (-30) \Leftrightarrow y = 31 \cdot x + 94. \end{aligned}$$

3. U točki krivulje $y = \sqrt{x}$ čija je apscisa 4 povučene su tangenta i normala na krivulju. Izračunajte površinu lika kojega te krivulje zatvaraju s objema koordinatnim osima.

Rješenje: Diralište tangente, odnosno sjecište normale i krivulje je točka $T = (4, 2)$. Derivacija funkcije $f(x) = \sqrt{x}$ u točki $c = 4$ jednaka je:

$$f'(4) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{4}} = \frac{1}{4}.$$

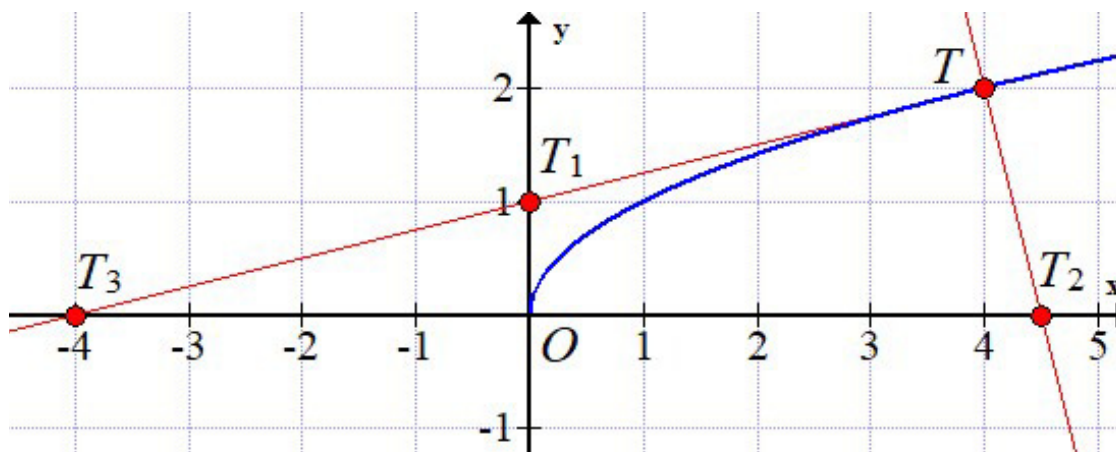
Zbog toga je jednadžba tangente povučene na zadanu krivulju u točki T

$$t... y = \frac{1}{4} \cdot x + 1,$$

dok je jednadžba pripadne normale

$$n... y = -4 \cdot x + 18.$$


Sjecište tangente s osi ordinata je točka $T_1 = (0, 1)$, a s osi apscisa točka $T_3 = (-4, 0)$. Sjecište normale s osi apscisa je točka $T_2 = \left(\frac{9}{2}, 0\right)$. Lik čiju površinu tražimo je četverokut OT_1TT_2 . (vidjeti sliku 2.)



Slika 2.

Traženu površinu najlakše odredimo tako da od površine trokuta čiji su vrhovi T_3 , T_2 i T oduzmemo površinu trokuta čiji su vrhovi T_3 , O i T_1 . Tako odmah dobivamo:

$$P = \frac{\left(4 + \frac{9}{2}\right) \cdot 2}{2} - \frac{4 \cdot 1}{2} = \frac{13}{2} = 6.5 \text{ kv. jed.}$$

 TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU POLYTECHNICUM ZAGABIENSE Elektrotehnički odjel	Matematika 1 (preddiplomski stručni studij elektrotehnike)	4.11. Tangenta i normala na ravninsku krivulju - zadaci
--	---	--

4. Zadana je krivulja $K \dots y = x^3 + x + a$, pri čemu je $a \in \mathbb{R}$ konstanta. U sjecištu te krivulje s osi ordinata povučena je normala n . Odredite vrijednost a za koju je površina trokuta kojega normala n zatvara s objema koordinatnim osima jednaka 2 kv. jed.

Rješenje: Odredimo najprije sjecište krivulje K i osi ordinata. Dobijemo ga tako da u jednadžbu krivulje K uvrstimo $x = 0$. Lako izračunamo $S = (0, a)$.

Odredimo koeficijent smjera normale. Derivirajmo izraz koji zadaje krivulju K . Dobivamo:

$$y' = 3 \cdot x^2 + 1.$$

Odatle je

$$k_n = \frac{-1}{y'(0)} = \left(\frac{-1}{3 \cdot x^2 + 1} \right)_{x=0} = \frac{-1}{3 \cdot 0^2 + 1} = -1.$$

Prema tome, jednadžba normale u eksplicitnom obliku glasi: $n \dots y = -x + a$. Ta jednadžba zapisana u segmentnom obliku glasi: $\frac{x}{a} + \frac{y}{a} = 1$.

Normala n s objema koordinatnim osima zatvara jednakokračan pravokutan trokut čije su katete duge $|a|$ jedinica duljine. Površina toga trokuta je:

$$P = \frac{1}{2} \cdot |a|^2 = (\text{zbog } |a|^2 = a^2, \forall a \in \mathbb{R}) = \frac{1}{2} \cdot a^2 \text{ kv. jed.}$$

Tako iz jednadžbe $\frac{1}{2} \cdot a^2 = 2$ slijedi $a^2 = 4$, odnosno $a \in \{-2, 2\}$.

5. Zadana je krivulja $K \dots \begin{cases} x = t \cdot \cos t \\ y = t \cdot \sin t \end{cases}$, pri čemu je $t \in \left[-\frac{3}{2} \cdot \pi, \frac{3}{2} \cdot \pi\right]$. U točki krivulje određenoj parametrom $t = \pi$ povučene su tangenta i normala na krivulju. Izračunajte površinu trokuta kojega ti pravci zatvaraju s osi ordinata.

Rješenje: Točka određena parametrom $t = \pi$ je:

$$T = (\pi \cdot \cos \pi, \pi \cdot \sin \pi) = (\pi \cdot (-1), \pi \cdot 0) = (-\pi, 0).$$

Derivacija pripadne parametarski zadane funkcije u toj točki jednaka je

$$y' = \frac{(t \cdot \sin t)'}{(t \cdot \cos t)'} = \frac{1 \cdot \sin t + t \cdot \cos t}{1 \cdot \cos t + t \cdot (-\sin t)} = \frac{\sin t + t \cdot \cos t}{\cos t - t \cdot \sin t} \Rightarrow$$

$$(y')_{t=\pi} = \frac{\sin \pi + \pi \cdot \cos \pi}{\cos \pi - \pi \cdot \sin \pi} = \frac{0 + \pi \cdot (-1)}{-1 - \pi \cdot 0} = \pi,$$

pa je jednadžba tangente povučene na zadanu krivulju u točki T

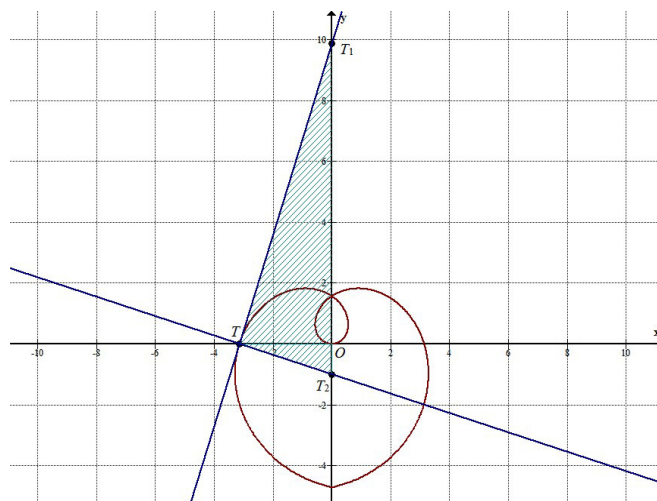
$$t \dots y = \pi \cdot (x - (-\pi)) \Leftrightarrow y = \pi \cdot x + \pi^2.$$

Jednadžba normale povučene na zadanu krivulju u istoj točki je:


$$n \dots y = \left(-\frac{1}{\pi}\right) \cdot (x - (-\pi)) \Leftrightarrow y = -\frac{1}{\pi} \cdot x - 1.$$

Tangenta t siječe os ordinata u točki $T_1 = (0, \pi^2)$, dok normala n siječe istu os u točki $T_2 = (0, -1)$ (vidjeti sliku 3.) Zbog toga je tražena površina jednaka

$$P = \frac{1}{2} \cdot (\pi^2 + 1) \cdot \pi = \frac{\pi^3 + \pi}{2} \approx 17.07393 \text{ kv. jed.}$$



Slika 3.

 TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU POLYTECHNICUM ZAGABIENSE Elektrotehnički odjel	Matematika 1 (preddiplomski stručni studij elektrotehnike)	4.11. Tangenta i normala na ravninsku krivulju - zadaci
--	---	--

6. U točki krivulje $K... x^3 + y^2 + 2 \cdot x - 6 = 0$ čija je ordinata 3 povučene su tangenta i normala na krivulju. Izračunajte površinu trokuta kojega ti pravci zatvaraju s osi apscisa.

Rješenje: Apscisu navedene točke dobijemo iz jednadžbe

$$x^3 + 3^2 + 2 \cdot x - 6 = 0$$

odnosno iz jednadžbe

$$x^3 + 2 \cdot x + 3 = 0.$$

Jedino realno rješenje ove jednadžbe je $x = -1$. Prema tome, diralište tangente, odnosno sjecište normale i krivulje je točka $T = (-1, 3)$.

Odredimo jednadžbu tangente i normale povučenih na zadanu krivulju u točki T . U tu svrhu najprije odredimo derivaciju implicitno zadane funkcije $x^3 + y^2 + 2 \cdot x - 6 = 0$ u točki T . Imamo redom:

$$\begin{aligned} 3 \cdot x^2 + 2 \cdot y \cdot y' + 2 - 0 = 0 &\Rightarrow (\text{uvrstimo } x = -1, y = 3) \Rightarrow 3 \cdot (-1)^2 + 2 \cdot 3 \cdot y' + 2 = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 3 + 6 \cdot y' + 2 = 0 &\Leftrightarrow 6 \cdot y' = -5 \Rightarrow y' = -\frac{5}{6}. \end{aligned}$$

Dakle, koeficijent smjera tangente je jednak $k_t = -\frac{5}{6}$, a koeficijent smjera normale

$$k_n = -\frac{1}{k_t} = -\frac{1}{-\frac{5}{6}} = \frac{6}{5}. \text{ Prema tome, jednadžba tangente zapisana u segmentnom}$$

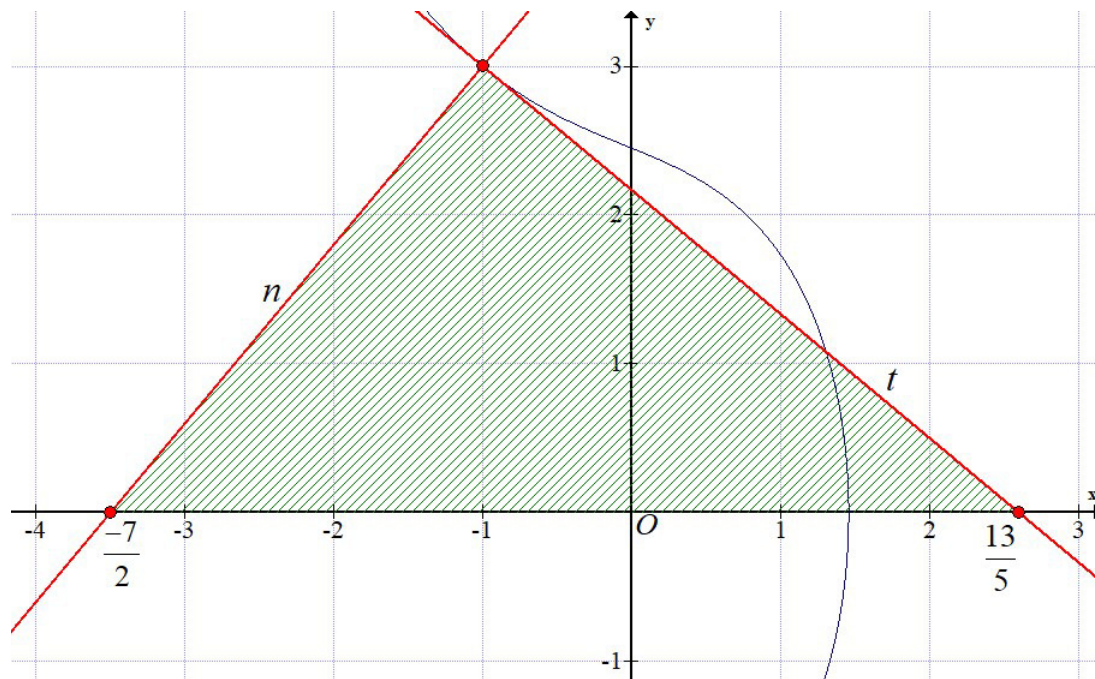
obliku glasi:

$$\begin{aligned} t... y = -\frac{5}{6} \cdot (x - (-1)) + 3 &\Leftrightarrow y = -\frac{5}{6} \cdot x - \frac{5}{6} + 3 \Leftrightarrow y = -\frac{5}{6} \cdot x + \frac{13}{6} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{5}{6} \cdot x + y &= \frac{13}{6} \Leftrightarrow \frac{x}{\frac{13}{5}} + \frac{y}{\frac{13}{6}} = 1. \end{aligned}$$

Jednadžba normale zapisana u segmentnom obliku glasi:

$$\begin{aligned} n... y = \frac{6}{5} \cdot (x - (-1)) + 3 &\Leftrightarrow y = \frac{6}{5} \cdot x + \frac{6}{5} + 3 \Leftrightarrow y = \frac{6}{5} \cdot x + \frac{21}{5} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{-6}{5} \cdot x + y &= \frac{21}{5} \Leftrightarrow \frac{x}{\frac{-7}{2}} + \frac{y}{\frac{21}{5}} = 1. \end{aligned}$$


Ti pravci sijeku os apscisa redom u točkama $T_1 = \left(\frac{13}{5}, 0\right)$ i $T_2 = \left(-\frac{7}{2}, 0\right)$ (vidjeti sliku 4.).



Slika 4.

Tako dobijemo da je tražena površina jednaka

$$P = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{13}{5} + \frac{7}{2} \right) \cdot 3 = \frac{183}{20} = 9.15 \text{ kv. jed.}$$

 TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU POLYTECHNICUM ZAGABIENSE Elektrotehnički odjel	Matematika 1 (preddiplomski stručni studij elektrotehnike)	4.11. Tangenta i normala na ravninsku krivulju - zadaci
--	---	--

7. U sjecištima krivulje $K \dots \ln(x \cdot y + 1) + x - y - 1 = 0$ s koordinatnim osima povučene su tangente na krivulju K . Izračunajte površinu lika kojega te tangente zatvaraju s objema koordinatnim osima.

Rješenje: Odredimo najprije sjecišta krivulje K s koordinatnim osima. Uvrstimo li $x = 0$ u jednadžbu krivulje K , dobit ćemo:

$$\ln(0 \cdot y + 1) + 0 - y - 1 = 0 \Leftrightarrow \ln 1 - y - 1 = 0 \Leftrightarrow 0 - y - 1 = 0 \Leftrightarrow -y - 1 = 0 \Leftrightarrow y = -1,$$

pa je sjecište krivulje K s osi ordinata točka $S_1 = (0, -1)$.

Analogno, uvrstimo li $y = 0$ u jednadžbu krivulje K , dobit ćemo:

$$\ln(x \cdot 0 + 1) + x - 0 - 1 = 0 \Leftrightarrow \ln 1 + x - 1 = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1,$$

pa je sjecište krivulje K s osi apscisa točka $S_2 = (1, 0)$.

Deriviranjem izraza koji zadaje krivulju K kao implicitno zadane funkcije dobijemo:

$$\frac{1}{x \cdot y + 1} \cdot (1 \cdot y + x \cdot y') + 1 - y' = 0 \Leftrightarrow \frac{y + x \cdot y'}{x \cdot y + 1} + 1 - y' = 0.$$

Uvrstimo li taj izraz $x = 0$ i $y = -1$, dobit ćemo:

$$\frac{1 \cdot (-1) + 0 \cdot y'}{0 \cdot (-1) + 1} + 1 - y' = 0 \Leftrightarrow -1 + 1 - y' = 0 \Leftrightarrow y' = 0.$$

Zbog toga jednadžba tangente povučene na krivulju K u točki S_1 glasi:

$$t_1 \dots y = 0 \cdot (x - 0) - 1 \Leftrightarrow y = -1.$$

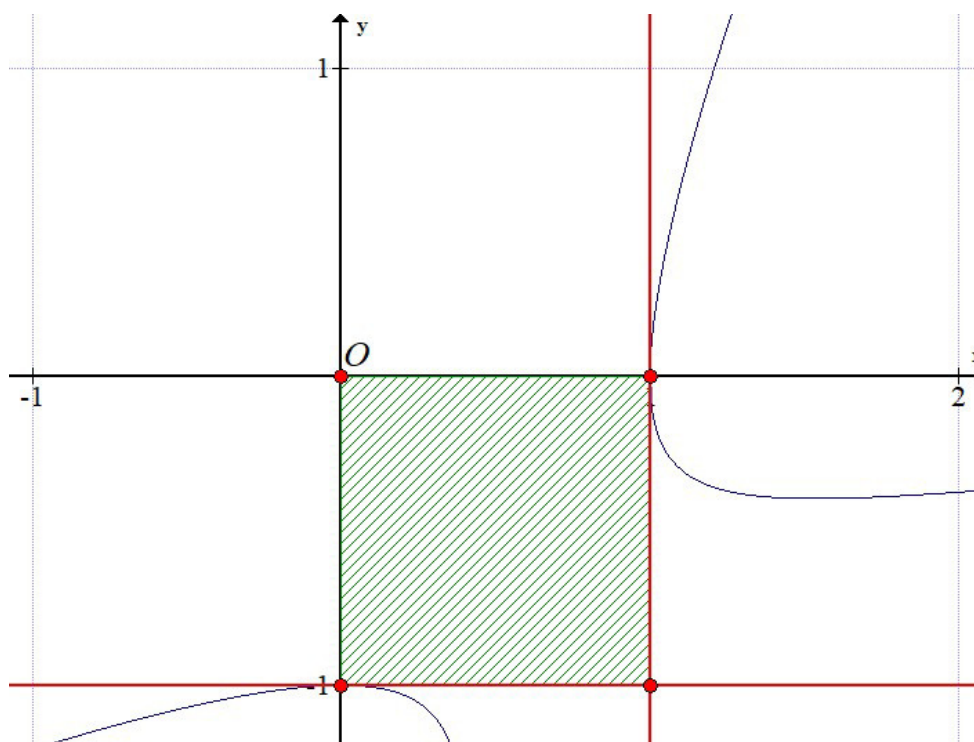
Analogno, uvrstimo li $x = 1$ i $y = 0$ u izraz za y' , dobit ćemo:

$$\frac{0 + 1 \cdot y'}{1 \cdot 0 + 1} + 1 - y' = 0 \Leftrightarrow y' + 1 - y' = 0 \Leftrightarrow 1 = 0,$$

što je kontradikcija. Zbog toga zaključujemo da je tangenta povučena na krivulju K u točki S_2 usporedna s osi ordinata, pa njezina jednadžba glasi: $t_2 \dots x = 1$.

Dobivene pravce ucrtamo u pravokutni koordinatni sustav u ravnini. Dobivamo sliku 5. Lako se vidi da je ti pravci s objema koordinatnim osima zatvaraju kvadrat čija je stranica $a = 1$ jed. duljine. Zbog toga je tražena površina jednaka:

$$P = a^2 = 1 \text{ kv. jed.}$$



Slika 5.